Note di Matematica Vol. IX - n. 2, 181-188(1989)

ÜBER DIE BLASCHKESCHE KOVARIANTE ABLEITUNG UND DIE KINEMATISCHE ABBILDUNG

M. HUSTY, P.T. NAGY

Abstract. *Investigating the kinematic mapping of plane euclidian (spherical euclidian) one parameter motions Blaschke developped a differential geometry of curves in a quasielliptic (resp. elliptic) space. He used a certain differentiation process and we show that this Blaschke derivation is connected with the (0)-connection of Cartan.*

Blaschke [2] hat im Zusammenhang mit der kinematischen Abbildung der ebenen euklidischen (bzw. sphärischen euklidischen) Zwangläufe für den als quasielliptisch (bzw. elliptisch) erkannten kinematischen Gruppenraum eine differentialgeometrische Kurventheorie entwickelt. Er verwendet dabei einen Differentiationsprozeß, um die Frenet-Formeln für Kurven im quasielliptischen (bzw. elliptischen) Gruppenraum zu erhalten. Wir wollen die Blaschkesche Ableitung mit Lie-Gruppenmethoden herleiten und einen Zusammenhang mit der mittleren Cartanschen Ableitung für Lie-Gruppen herstellen (vgl. z.B. Kobayashi-Nomizu [5], S. 198).

1. DEFINITION DER BLASCHKESCHEN KOVARIANTEN ABLEITUNG IM KINEMATISCHEN BILDRAUM

Zur Beschreibung des kinematischen Bildraumes verwenden wir die parabolischen Biquaternionen (vgl. [2], S. 178). Den 4-dimensionalen Vektorraum der parabolischen Biquaternionen bezeichnen wir mit $\mathbf{A}$. Die genormten Biquaternionen seien $\mathbf{A}_n$

$$\mathbf{A}_n = \{\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{A} \,|\, N(\vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_0^2 + a_1^2 = 1\} \tag{1.1}$$

Für Quaternionen mit $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ ist in $\mathbf{A}$ durch $\langle\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle\rangle = b_2^2 + b_3^2$ eine Ersatznorm definiert. $\mathbf{A}_n$ bildet eine Gruppe mit der Biquaternionenmultiplikation als Gruppenmultiplikation. Es kann nun in bekannter Weise ein Paar $(\vec{a}, -\vec{a})$, $a \in \mathbf{A}_n$ in eindeutiger Weise mit einer Bewegung der euklidischen Ebene E_2 identifiziert werden. Diese Identifikation ist ein Gruppenhomomorphismus

$$E(2) \cong \mathbf{A}/\{\pm 1\} \tag{1.2}$$

Wir betrachten $\mathbf{A}_n$ als Hyperfläche im 4-dimensionalen Vektorraum $\mathbf{A}$ und wollen auf $\mathbf{A}_n$ eine kovariante Ableitung definieren:

Es seien X, Y Tangentialvektorfelder auf $\mathbf{A}_n$, $D_X Y$ sei die gewöhnliche Richtungsableitung des Vektorfeldes Y in die Tangentialrichtung X. Wir zerlegen $D_X Y$ in zwei Komponenten

$$D_X Y = \nabla_X Y + \varphi \vec{a}, \tag{1.3}$$

wobei $\nabla_X Y$ die Tangentialkomponente und $\varphi\vec{a}$ die Radialkomponente sind; d.h. die Tangentialkomponente $\nabla_X Y$ kann als die Radialprojektion der gewöhnlichen Richtungsableitung aufgefaßt werden.

Lemma 1. *$\nabla_X Y$ ist eine kovariante Ableitung.*

Beweis. Weil die Radialprojektion linear ist und die gewöhnliche Richtungsableitung linear in X und additiv in Y ist, muß $\nabla_X Y$ ebenfalls diese Eigenschaften haben. Für die gewöhnliche Richtungsableitung gilt weiters

$$D_X f(Y) = (Xf)Y + fD_X Y \tag{1.4}$$

Durch Radialprojektion erhalten wir

$$\nabla_X f(Y) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \tag{1.5}$$

womit die Gültigkeit der Leibniz Regel für die Tangentialkomponente bewiesen ist. *q.e.d.*.

Der Homomorphismus $\varphi : \mathbf{A}_n \to E(2)$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, daher kann die in $\mathbf{A}_n$ definierte kovariante Ableitung auf $E(2)$ übertragen werden. Die dadurch definierte kovariante Ableitung in $E(2)$ bezeichnen wir als die *Blaschkesche Ableitung*: $\tilde{\nabla}_X Y$.

2. EIGENSCHAFTEN DER BLASCHKESCHEN KOVARIANTEN ABLEITUNG

Lemma 2. *Der Torsionstensor*

$$\tilde{T}(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X,Y] \tag{2.1}$$

verschwindet.

Beweis. In $\mathbf{A}$ ist die Lie-Klammer zweier Vektorfelder definiert durch

$$[X,Y] = D_X Y - D_Y X \Rightarrow \tag{2.2}$$

$$D_X Y - D_Y X - [X,Y] = 0. \tag{2.3}$$

Durch Radialprojektion und Anwendung von φ bekommt man:

$$\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X,Y] = 0. \quad q.e.d. \tag{2.4}$$

Lemma 3. *$\tilde{\nabla}_X Y$ ist biinvariant auf $E(2)$.*

Beweis. In $\mathbf{A}_n$ sind die Links- und Rechtsmultiplikationen mit Gruppenelementen $\vec{a} \in \mathbf{A}_n$ lineare Abbildungen von $\mathbf{A}$ derart, daß die Hyperfläche $\mathbf{A}_n$, ihr Tangentialbündel sowie die Radialprojektion invariant sind. Durch Anwendung des Homomorphismus φ folgt die Behauptung. *q.e.d.*

Lemma 4. *Die einparametrigen Untergruppen in $E(2)$ sind die Geodätischen durch das Einheitselement von $E(2)$.*

Beweis. Sei $\vec{r}(t)$ eine geodätische Linie in A, d.h. $\nabla_{\dot{r}}\dot{\vec{r}} = 0$.
FALL A. Es gilt $N(\dot{\vec{r}}(t_0)) = \langle\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}\rangle = 0$; dann gibt es auf A_n durch den zum Parameter t_0 gehörigen Punkt eine Erzeugende von A_n mit der Richtung $\dot{\vec{r}}(t_0)$. Sie erfüllt die Differentialgleichung für eine geodätische Linie.
FALL B. Es git $N(\dot{\vec{r}}(t_0)) \neq 0$, dann gilt wegen Fall A für alle t : $N(\dot{\vec{r}}(t)) \neq 0$.$\vec{r}(t)$ kann daher so parametrisiert werden, daß $N(\dot{\vec{r}}(t)) = 1 \Rightarrow$

$$(2.5a,b) \qquad \langle\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)\rangle = 0 \quad und \quad \langle\vec{r}(t), \ddot{\vec{r}}(t)\rangle = -1.$$

Aus $N\dot{\vec{r}}(t)) = 1$ folgt $\langle\dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t)\rangle = 0$, andererseits gilt wegen der Differentialgleichung für geodätische Linien:

$$(2.6) \qquad \ddot{\vec{r}}(t) = \nabla_{\dot{r}}\dot{\vec{r}}(t) + \lambda\vec{r} = \lambda\vec{r}.$$

Unter Benutzung von (2.5) folgt damit:

$$(2.7) \qquad \ddot{\vec{r}}(t) + \vec{r}(t) = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$(2.8) \qquad \vec{r}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Die beiden Konstanten werden festgelegt durch die Anfangsbedingungen

$$(2.9) \qquad \vec{r}(t_0) = e_0 \Rightarrow C_1 = e_0$$

und

$$(2.10) \qquad \dot{\vec{r}}(t_0) = \pm(e_1 + me_2 + ne_3),$$

dies kann wegen $\langle\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0)\rangle = 0$ sowie $N(\dot{\vec{r}}(t_0)) = 1$ gesetzt werden. Damit haben wir für

$$(2.11) \qquad C_2 = \pm(e_1 + me_2 + ne_3)$$

und die Gleichung der Geodätischen Linien lautet:

$$\vec{r}(t) = e_0 \cos t \pm (e_1 + me_2 + ne_3) \sin t. \tag{2.12}$$

Mit Blaschke ([2], S. 179 (13)) haben wir aus der Quaternionendarstellung die Gleichung
(2.13)

$$a_0(t) : a_1(t) : a_2(t) : a_3(t) = \pm \cos t : \sin t : m \sin t : n \sin t = \pm \cot t : 1 : m : n.$$

Aus dieser Darstellung folgt unmittelbar, daß durch (2.12) eine einparametrige Drehungsgruppe mit dem Drehzentrum (m, n) und dem Drehwinkel $\pm t$ repräsentiert wird.

Für den Fall A erhalten wir $r(t_0) = e_0$ und $\dot{\vec{r}}(t_0) = me_2 + ne_3$ und

$$\dot{\vec{r}}(t) = e_0 + t(me_2 + ne_3). \tag{2.14}$$

Durch (2.14) wird eine einparametrige Schiebungsgruppe in Richtung $(0 : m : n)$ repräsen tiert. *q.e.d.*

Nun gilt der

Satz 1. *Die Blaschkesche kovariante Ableitung* $\tilde{\nabla}_X Y$ *kann mit Hilfe der Lie-Algebra-multiplikation durch*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

ausgedrückt werden, wobei X, Y *linksinvariante Vektorfelder sind.*

Beweis. Aus Lemma 4 folgt: Die Blaschkesche kovariante Ableitung hat dieselbe Geodätische wie die linksinvariante kovariante Ableitung. Wir zeigen vorerst, daß für kovariante Ableitungen mit identischen Geodätischen das Differenztensorfeld

$$A(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla^l_X Y \tag{2.15}$$

schiefsymmetrisch ist. Sei $X_{g_0} \in T_{g_0} E(2)$ und sei $g(t)$ die Geodätische durch g_0 und $\dot{g}(t_0) = X_{g_0}$, dann gilt:

$$A(X_{g_0}, X_{g_0}) = \tilde{\nabla}_{\dot{g}} \dot{g} - \nabla^l_{\dot{g}} \dot{g}|_{t_0} = 0 \tag{2.16}$$

Daraus folgt die Schiefsymmetrie unmittelbar. Es seien X, Y linksinvariante Vektorfelder, dann gilt:
(2.17)

$$A(X,Y) = \frac{1}{2}(A(X,Y) - A(Y,X)) = \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X,Y] - \nabla^l_X + \nabla^l_Y X + [X,Y]).$$

Aus Lemma 2 folgt $\tilde{T}(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X,Y] = 0$. Damit und wegen der Linksinvarianz der Vektorfelder gilt

$$A(X,Y) = \frac{1}{2}[X,Y]. \tag{2.18}$$

Zusammen mit (2.15) haben wir dann

$$\tilde{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}[X,Y] \quad q.e.d. \tag{2.19}$$

3. Sei $g(\varphi)$ eine durch $\langle \dot{g}, \dot{g} \rangle = 1$ normierte Kurve in $E(2)$, dann erhalten wir für die Blaschkesche kovariante Ableitung $\tilde{\nabla}\dot{g}$ folgende Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \vec{t} \\ \tilde{\nabla}_{\dot{g}}\vec{t} &= \tilde{\kappa}_1 \vec{h} \\ \tilde{\nabla}_{\dot{g}}\vec{h} &= \tilde{\kappa}_2 \vec{b} \\ \tilde{\nabla}_{\dot{g}}\vec{b} &= -\tilde{\kappa}_2 \vec{h} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dabei stellt (t,h,b) ein mit $\langle , \rangle$ bzw. $\langle\langle , \rangle\rangle$ orthonormiertes, begleitendes 3-Bein von $g(\varphi)$ dar und es wurde bei der Ableitung von (3.1) die Konstanz von $\langle\rangle, \langle\langle\rangle\rangle$ gegenüber $\tilde{\nabla}_{\dot{g}}$ benutzt. Die Konstanz kann unmittelbar aus Formel (2.19) und der Biinvarianz von $\langle\rangle$ und $\langle\langle\rangle\rangle$ geschlossen werden.

Die Polkurven sind in [4] mit Liegruppenmethoden folgendermaßen definiert: Die Vektorfunktion $R(\varphi) = (L_{g^{-1}})'\dot{g}(\varphi)$ ist der bewegte Polkegel und $\overline{R}(\varphi) = (R_{g^{-1}})\dot{g}(\varphi)$ ist der feste Polkegel. Mit $R(\varphi)$ bzw. $R(\varphi)$ lassen sich durch

$$\begin{aligned} R(\varphi) &= (L_{g^{-1}})'\vec{t} \\ T(\varphi) &= (L_{g^{-1}})'\vec{h} \\ N(\varphi) &= (L_{g^{-1}})'\vec{b} \end{aligned} \tag{3.2a}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \overline{R}(\varphi) &= (R_{g^{-1}})'\vec{t} \\ \overline{T}(\varphi) &= (R_{g^{-1}})'\vec{h} \\ \overline{N}(\varphi) &= (R_{g^{-1}})'\vec{b} \end{aligned} \tag{3.2b}$$

begleitende orthonormierte 3-Beine definieren.

Satz 2. *Die Vektorfunktionen $R(\varphi)$ bzw. $\overline{R}(\varphi)$ besitzen in dem begleitenden 3-Bein folgende Ableitungsgleichungen:*

$$
\begin{aligned}
\dot{R}(\varphi) &= \tilde{\kappa}_1 T \\
\dot{T}(\varphi) &= (\tilde{\kappa}_2 - 1) N \qquad (3.3a)\\
\dot{N}(\varphi) &= -(\tilde{\kappa}_2 - 1) T
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
\dot{\overline{R}}(\varphi) &= \tilde{\kappa}_1 \overline{T} \\
\dot{\overline{T}}(\varphi) &= (\tilde{\kappa}_2 + 1) \overline{N} \qquad (3.3b)\\
\dot{\overline{N}}(\varphi) &= -(\tilde{\kappa}_2 + 1) \overline{T}
\end{aligned}
$$

Beweis. Durch die Links- bzw. Rechtsparallelverschiebung können die Tangentialräume längs $g(\varphi)$ mit der Lie Algebra $T_e E(2)$ identifiziert werden. In der Lie Algebra $\varepsilon(2)$ kann $\nabla^l_{\dot{g}}$ bzw. $\nabla^r_{\dot{g}}$ durch die gewöhnliche Ableitung $d/d\varphi$ ersetzt werden.

Damit ergibt sich:

$$(3.4) \qquad \dot{R} = (L_{g^{-1}})' \nabla^l_{\dot{g}} \vec{t} = (L_{g^{-1}})' \left(\tilde{\nabla}_{\dot{g}} \vec{t} - \frac{1}{2}[\vec{t}, \vec{t}] \right) = (L_{g^{-1}})'(\tilde{\nabla}_{\dot{g}} \vec{t}) = \tilde{\kappa}_1 T.$$

Durch analoge Ableitung erhalten wir

$$(3.5) \qquad \dot{\overline{R}} = \tilde{\kappa}_1 \overline{T}$$

Weiter haben wir:

$$(3.6) \qquad \dot{T} = (L_{g^{-1}})'(\nabla^l_{\dot{g}} \vec{h}) = (L_{g^{-1}})' \left(\tilde{\nabla}_{\dot{g}} \vec{h} - \frac{1}{2}[\vec{t}, \vec{h}] \right).$$

Hier ist $(L_{g^{-1}})'[\vec{t}, \vec{h}] = [R, T]$ und für $[R, T] = (RT - TR) = 2RT = 2N$ (vgl. [5], S. 89). So bekommt man für

$$(3.7) \qquad \dot{T} = (\tilde{\kappa}_2 - 1) N.$$

Analog für

$$\dot{\overline{T}} = (\widetilde{\kappa}_2 + 1)\overline{N} \tag{3.8}$$

bzw.

$$\dot{N} = -(\widetilde{\kappa}_2 - 1)T \quad und \quad \dot{\overline{N}} = -(\widetilde{\kappa}_2 + 1)T. \quad q.e.d. \tag{3.9a,b}$$

Folgerung. In der Lie Algebra $\varepsilon(2)$ läßt sich auf der Einheitssphäre die geodätische Krümmung $\kappa_g(\overline{\kappa}_g)$ der Kurven $R(\varphi)$ bzw. $\overline{R}(\varphi)$ durch

$$\kappa_g = \frac{\widetilde{\kappa}_2 - 1}{\widetilde{\kappa}_1} \quad bzw. \quad \overline{\kappa}_g = \frac{\widetilde{\kappa}_2 + 1}{\widetilde{\kappa}_1} \tag{3.10}$$

erklären.

Bemerkung. Auch in der Kinematik der elliptischen bzw. der hyperbolischen Ebenen kann durch ein analoges Vorgehen ein ähnlicher Zusammenhang zwischen den Invarianten der Gruppen-kurven und den Invarianten der Polkurven hergestellt werden (vgl. Husty-Nagy [4]).

LITERATUR

[1] W. BLASCHKE, *Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie*, Zeitschrift f. Math. u. Phys. **60** (1911) 61-91, 203-204.

[2] W. BLASCHKE, H.R. MÜLLER, *Ebene Kinematik*, München (1956).

[3] M. HUSTY, P.T. NAGY, *Zur Kinematik der hyperbolischen Ebene*, (in Vorbereitung).

[4] A. KARGER, J. NOVAK, *Space Kinematics and Lie Groups*, Gordon & Breach, 1978.

[5] KOBAYASHI- NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry II*, Interscience Publ. 1969.

Received August 1, 1988.
M. Husty
Inst. f. Math. u. Angew. Geometrie
Montanuniversität Leoben
Franz-Josefstraße 18
A-8700 Leoben, Austria

P.T. Nagy
Bolyai Institut
Univ. Szeged
Aradi vértanuk tere 1

derzeit
Math. Inst. d.
Akademie d. Wissenschaft en
Reáltanoda u. 13-15
H-1053 Budapest, Hungary