Note di Matematica Vol. XI, 1-5 (1991)

DER SATZ ÜBER OFFENE LINEARE RELATIONEN IN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN

N. ADASCH

Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe

Wir verallgemeinern die Ergebnisse von [1] [2] auf den Fall linearer Relaltionen in topologischen Vektorräumen. Sie gelten dann sowohl für lokalkonvexe als auch für allgemeine topologische Vektorräume.

In der Terminologie folgen wir [6] und [3].

Unter einer linearen Relation R von E in F verstehen wir einen linearen Teilraum $R \subset E \times F$.

Man überlegt sich leicht:

(1) *R ist genau dann offen, wenn di Einschränkung P der kanonischen Projektion P_F : $E \times F \to F$ auf R offen ist.*

Um also zu zeigen, daß eine lineare Relation offen ist, genügt es zu zeigen, daß die lineare Abbildung P offen ist.

Eine lineare Abbildung A aus E in F heißt **quasiabgeschlossen**, wenn $\overline{N(A)} = \{x; (x,0) \in \overline{G(A)}\}$ $(N(A) = A^{-1}(0), G(A)$ der Graph von $A)$.

Entsprechend nennen wir R **quasiabgeschlossen**, wenn P quasiabgeschlossen ist. A (wie oben) heißt **lokalquasiabgeschlossen**, wenn für jede Banachsche Teilmenge B von F die Einschränkung A_B von A auf $A^{-1}(F_B)$ als Abbildung aus E in F_B quasiabgeschlossen ist. (F_B = lineare Hülle von B in F, versehen mit der Normtopologie, die durch B erzeugt wird).

Entsprechend heißt R **lokalquasiabgeschlossen**, wenn P lokalquasiabgeschlossen ist.

Es gilt somit [2]:

(2) *Jede offene lineare Relation aus E auf F ist (lokal)quasiabgeschlossen.*

In zwei wichtigen Fällen werden wir die Umkehrung von (2) zeigen.

Da wir nach (1) dazu die lineare Abbildung P zu untersuchen haben, geben wir folgende Faktorisierung [2] an, die sich bei der Betrachtung offener linearer Abbildungen als nützlich erwiesen hat.

(3) *Seien A lineare Abbildung aus E auf F, $K_1 : E \to E/_{\overline{N(A)}}$, $K_2 : F \to F/_{A(\overline{N(A)} \cap D(A))}$, $(D(A)$ = Definitionsbereich von $A)$ die Quotientenabbildungen.*

Für die auf $K_1(D(A))$ definierte $\widehat{A}$ mit

$$\widehat{A}\left(K_1(x)\right) = K_2(Ax)$$

gilt

a) A ist genau dann quasiabgeschlossen, wenn $\widehat{A}$ graphenabgeschlossen ist.

b) A ist genau dann offen, wenn $\widehat{A}$ offen ist.

Sei nun $R \subset E \times F$ mit $P_F(R) = F$ und $P_{F|R} = P$ quasiabgeschlossen. Da $P(\overline{N(P)} \cap R) = 0$, ergibt (3) für P eine Zerlegung

$$E \times F|_{\overline{(E\times 0)\cap R}} \overset{\widehat{P}}{\hookrightarrow} F.$$

Identifiziert man

$$E \times F|_{\overline{(E\times 0)\cap R}} \text{ kanonisch mit } \left(E \times 0\,|_{\overline{(E\times 0)\cap R}}\right) \times (0 \times F),$$

dann geht $\widehat{P}$ in eine graphenabgeschlossene Abbildung $\widetilde{P}$ über

$$\left(E \times 0\,|_{\overline{(E\times 0)\cap R}}\right) \times (0 \times F) \overset{\widetilde{P}}{\hookrightarrow} F$$

mit der Eigenschaft $P_2\widetilde{P}^{-1}$ = Identität von F und $(0 \times F)$. Dabei P_1, P_2 die Projektionen von

$$\left(E \times 0\,|_{\overline{(E\times 0)\cap R}}\right) \times (0 \times F) \text{ auf } E \times 0\,|_{\overline{(E\times 0)\cap R}} \text{ bzw. } (0 \times F).$$

Da $\widetilde{P}^{-1}$ graphenabgeschlossen und $P_2\widetilde{P}_1^{-1}$ stetig ist, überzeugt man sich, daß $P_1\widetilde{P}^{-1}$ eine abgeschlossenen Graphen hat.

Sei nun E s-Raum ([5] [4] bzw. [6] [3]) und F tonneliert. Da jeder Quotientenraum eines s-Raumes ein Infra-s-Raum ist, folgt nach dem Graphensatz für tonnelierte Räume und Infra-s-Räume die Stetigkeit von $P_1\widetilde{P}^{-1}$. Also ist $\widetilde{P}^{-1}$ stetig, also P offen.

Damit ist gezeigt

(4) *Jede quasiabgeschlossene lineare Relation aus einem s-Raum E auf einen tonne- lierten Raum F ist offen.*

Hinsichtlich der Allgemeinheit von (4) bemerken wir

(5) *Die Voraussetzung an R in (4) ist notwendig und hinreichend.*

Da (4) natürlich speziell für lineare Abbildungen gilt, folgt aus der Theorie der s-Räume:

(6) *E ist genau dann s-Raum, wenn jede quasiabgeschlossene lineare Relation R aus E auf einen tonnelierten Raum F offen ist.*

Daß auch F durch die Gültigkeit von (4) charakterisiert werden kann, folgt aus den «Mahowaldschen Sätzen» (vgl. [6], [3]).

Sei dazu T eine Tonne (bzw. abgeschlossener topologischer Faden) von F. Dann hat die kanonische Abbildung $K : F \to \widetilde{F}_T$ einen abgeschlossenen Graphen. $R = \{(Ky, y) | y \in \in F\}$ ist also eine abgeschlossene, also auch quasiabgeschlossene Relation aus dem s-Raum $\widetilde{F}_T$ auf F.

Damit gilt

(7) *F ist genau dann tonneliert, wenn jede quasiabgeschlossene lineare Relation aus einem s-Raum auf F offen ist.*

Wir wenden uns nun dem Fall zu, daß F ein ultrabornologischer Raum ist und betrachten die dazugehörigen u-Räume [6] (analog auch für den Fall nicht notwendig lokalkonvexer Räume definierbar).

Dann zeigt man wie bei (4)

(8) *Jede quasiabgeschlossene lineare Relation R aus einem u-Raum E auf einen ultrabornologischen Raum F ist offen.*

Daraus erhalten wir

(9) *Jede lokalquasiabgeschlossene lineare Relation R aus einem u-Raum E auf einen ultrabornologischen Raum F ist offen.*

Beweis. Wir betrachten die lokalquasiabgeschlossene Projektion P von R auf F. Für jede Banachsche Teilmenge B von F betrachten wir die Einschränkung P_B von P auf $P^{-1}(F_B)$ als Abbildung aus $E \times F$ auf F_B. Sie ist quasiabgeschlossen und bleibt quasiabgeschlossen als Abbildung aus $E \times F_B$ auf F_B. Nach (9) ist P_B offen und bleibt offen, wenn wir auf F_B im Produkt die gröbere durch F induzierte Topologie nehmen. Für absolutkonvexe Nullumgebungen U, V (bzw. Fäden) von E, F) gilt also

$$P((U \times V) \cap R) \supset P\left((U \times V) \cap P^{-1}(F_B)\right) = P_B\left((U \times V) \cap P^{-1}(F_B)\right).$$

Damit absorbiert $P((U \times V) \cap R)$ jede Banachsche Teilmenge von F, ist also Nullumgebung (bzw. topologischer Faden) von F. P ist somit offen.

Wir bemerken wieder

(10) *Die Voraussetzung an R in (9) ist notwendig und hinreichend.*

Aus der Theorie der $\mathfrak{u}$-Räume folgt:

(11) *E ist genau dann $\mathfrak{u}$-Raum, wenn jede lokalquasiabgeschlossene lineare Relation aus E auf jeden ultrabornologischen Raum offen ist.*

Die entsprechende Aussage für F folgt teilweise aus einem Satz von De Wilde [6] § 35(10). Sei dazu V eine absolutkonvexe Menge (bzw. topologischer Faden) die alle Banachschen Teilmengen B von F absorbiert und $K : F \to \widetilde{F}_V$ die kanonische Abbildung. Wir betrachten wieder $R = \{(Ky, y) | y \in F\} \subset \widetilde{F}_V \times F$. Da die Einschränkung von K auf F_B stetig ist, folgert man, daß P lokal quasiabgeschlossen ist. Es gilt also ebenfalls

(12) *F ist genau dann ultrabornologisch, wenn jede lokalquasiabgeschlossene Relation R aus einem $\mathfrak{u}$-Raum E auf F offen ist.*

Die Sätze (4) und (9) stellen somit im Sinne von (5), (6), (7) bzw. (10), (11), (12) maximale Sätze über offene lineare Relationen dar.

REFERENCES

[1] N. ADASCH, *Ein optimaler Satz über offene Abbildungen*, Math. Ann., **265** (1983), pp. 113-114.

[2] N. ADASCH, *Der Satz über offene Abbildungen in topologischen Vektorräumen*, Math. Z., (1986), pp. 645-684.

[3] N. ADASCH, B. ERNST, D. KEIM, *Topological Vector Spaces*, Lectures Notes in Math., **639** Springer, 1978.

[4] N. ADASCH, *Der Graphensatz in topologischen Vektorräumen*, Math. Z., **119** (1971), pp. 131-142.

[5] N. ADASCH, *Tonnelierte Räume und zwei Sätze von Banach*, Math. Ann., **186** (1970), pp. 209-214.

[6] G. KÖTHE, *Topological Vector Spaces I, II*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1961-1979.

Received March 12, 1990
N. Adasch
FB-Mathematik
Universität Frankfurt a.M.
Robert-Mayer-Str. 6-10
D-6000 Frankfurt a.M.
Germany