

Le equazioni di Maxwell

Marco Panareo

*Dipartimento di Matematica & Fisica "Ennio De Giorgi", Università del Salento
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sez. di Lecce, Lecce, Italy*

I fenomeni elettrici e magnetici erano stati considerati per centinaia di anni come fenomeni naturali indipendenti tra loro. Nella seconda metà del XIX secolo James Clerk Maxwell elaborò una teoria completa dell'elettromagnetismo alla quale contribuirono un gran numero di scienziati quali, tra gli altri, Charles Augustin de Coulomb, André-Marie Ampère, Hans Christian Ørsted, Carl Friedrich Gauss e Michel Faraday. Maxwell, in particolare, raccolse i diversi risultati conseguiti da questi ricercatori e li riformulò sotto forma di un insieme di equazioni, ora note col nome di equazioni di Maxwell. La formulazione di Maxwell della teoria unificata dell'elettromagnetismo è considerata tra le maggiori conquiste nella storia della Fisica e la sua influenza sui successivi sviluppi sia della Fisica che della Tecnologia può difficilmente essere sottovalutata. La società moderna è completamente dipendente dalle applicazioni dell'elettromagnetismo per le comunicazioni, i trasporti, il trasferimento dell'energia e può essere difficile per le persone di oggi comprendere fino a che punto un risultato scientifico di circa 160 anni fa influenzi la nostra esistenza. Questa nota ha l'obiettivo di tracciare il percorso storico che ha condotto alla formalizzazione matematica dell'elettromagnetismo classico.

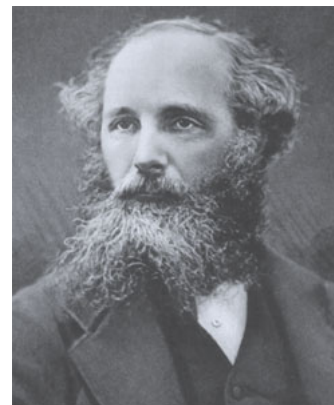


Figura 1: James Clerk Maxwell (1831-1879)

Premessa

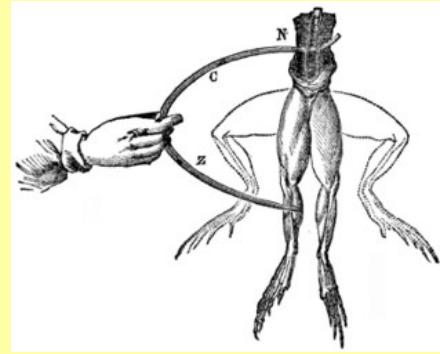
L'identificazione sperimentale da parte di Coulomb delle leggi della forza elettrica e della forza magnetica alla fine del XVII secolo comportò una ristrutturazione della base empirica dell'elettricità e del magnetismo. Tale scoperta permise l'ordinamento secondo schemi teorici di carattere generale della fenomenologia nota fino ad allora.

Guidati da tali schemi si potevano aprire nuovi campi di indagine. In particolare, l'analogia formale delle leggi di Coulomb con la legge della gravitazione permise di adattare alle quantità elettriche e magnetiche i modelli matematici già ampiamente collaudati sui corpi materiali soggetti alla gravitazione. Seguendo questo approccio e facendo uso della funzione potenziale introdotta da Leonhard Euler e Pierre-Simon Laplace, nei primi anni del XIX secolo, Siméon-Denis Poisson stabilì molteplici proprietà relative alla

La polemica Galvani-Volta

Nel 1791 Luigi Galvani, professore di anatomia ed ostetricia a Bologna notò casualmente che i muscoli delle zampe di una rana, una volta posti a contatto con due metalli diversi (zinco e rame) si contraevano spasmodicamente. Galvani ipotizzò la natura biologica del fenomeno ritenendo che fosse dovuto ad una forma di elettricità accumulata nei muscoli e nei nervi dell'animale. L'anno dopo Alessandro Volta, professore di Fisica sperimentale presso l'università di Pavia, respinse l'ipotesi di Galvani circa l'origine biologica del fenomeno osservato, proponendo l'idea che la corrente fosse prodotta dai due diversi metalli una volta posti a contatto con le terminazioni nervose della zampa della rana.

Secondo Volta il nervo non produceva alcuna corrente, come pensava Galvani, ma ne costituiva semplicemente il conduttore. A conferma di tale ipotesi, Volta dimostrò che se le due estremità di una bacchetta di rame ed una di zinco immerse in acido solforico venivano collegate da un filo conduttore, circolava una corrente. Questo dispositivo costituì la prima batteria elettrica, rappresentando l'inizio della tecnologia elettrica. Volta inoltre dimostrò che l'intensità della corrente elettrica così prodotta dipende sia dal tipo di metallo costituente le bacchette che dall'acido utilizzato.



distribuzione di cariche elettriche nei conduttori. Adoperando la stessa analogia, Johann Friedrich Carl Gauss nel 1839 ricavò la legge del flusso.

La controversia tra Giovanni Galvani ed Alessandro Volta sull'elettricità animale (si veda il riquadro) condusse, tra l'altro, all'invenzione nel 1800 della pila elettrica che, consentendo la disponibilità di intense correnti elettriche, aprì nuove opportunità nello studio dei fenomeni elettrici. La pila elettrica permise a Ørsted nel 1820 di rivelare gli effetti magnetici dovuti alla corrente ed a Michel Faraday nel 1831 di scoprire il fenomeno dell'induzione elettromagnetica (si veda il riquadro). Ad entrambe le scoperte seguì un intenso lavoro teorico volto alla formalizzazione di questi fenomeni, in particolare da parte di Jean-Baptiste Biot, Félix Savart e soprattutto Ampère per l'identificazione delle relazioni che stabilivano le forze tra correnti, e di Emil Christianovich Lenz e Franz Ernst Neumann per la formulazione di una legge generale delle forze elettromotrici indotte.

Le linee di forza

Con l'obiettivo di dare una prima spiegazione del fenomeno induttivo, in una memoria presentata alla Royal Institution di Londra il 24 novembre 1831 (Vol I, par. 60 di [1]) Faraday ipotizzò l'esistenza di un nuovo stato della materia, definito **stato elettrotonico**, che secondo lui si manifestava in tali processi. Faraday immaginò che, al passaggio della corrente nel circuito induttore, si instaurasse nel filo del circuito indotto questo particolare stato che si contrapponeva al flusso della corrente di induzione, determinandone la rapida interruzione. Non appena si apriva il circuito induttore, lo stato elettrotonico cessava e si generava la corrente inversa osservata. A dispetto di tutti i suoi sforzi, comunque, Faraday non riuscì ad ottenere una caratterizzazione fisica più specifica di tale stato.

Nei due mesi successivi, Faraday continuò a fare ipotesi sull'origine dell'induzione e in una memoria del 12 gennaio 1833 introdusse il con-

Induzione elettromagnetica

L'induzione elettromagnetica è il processo attraverso il quale viene prodotta una forza elettromotrice in un conduttore elettrico per effetto di un campo magnetico variabile. La scoperta di Ørsted nel 1820 della formazione di una azione magnetica da parte di un filo percorso da corrente indusse i ricercatori, sulla base di un principio di simmetria, a cercare il fenomeno opposto, ovvero la generazione di una corrente attraverso il magnetismo. Molti si erano avvicinati alla soluzione di questo problema più o meno consapevolmente, tuttavia il fenomeno fu scoperto nel 1831 dal fisico inglese Michel Faraday e, indipendentemente, dall'americano Joseph Henry due anni dopo. Nella prima dimostrazione sperimentale Faraday avvolse due fili conduttori isolati attorno ai lati opposti di un anello di ferro per formare due distinti avvolgimenti. Nell'istante in cui collegava gli estremi di un avvolgimento ad una batteria, Faraday osservò, attraverso la deflessione di un ago magnetico, il passaggio transitorio di una corrente nel secondo avvolgimento quando i relativi estremi erano connessi tra loro. Successivamente Faraday trovò altre manifestazioni di questo fenomeno, quale, ad esempio, la formazione di correnti transitorie in una bobina di filo conduttore quando al suo interno veniva fatta scorrere rapidamente una barra metallica magnetizzata. L'induzione elettromagnetica trova attualmente molteplici applicazioni nella realizzazione di componenti elettrici quali induttori e trasformatori e di dispositivi come motori e generatori di corrente.

cetto di linea di forza magnetica (Vol I, par. 114 di [1]):

“ Per curve magnetiche intendo le linee di forze magnetiche, comunque modificate dalla giustapposizione di poli, che potrebbero essere rappresentate da limatura di ferro; o quelli a cui un ago magnetico molto piccolo formerebbe una tangente.”

Attraverso la tecnica della limatura di ferro, Faraday osservò che le linee si disponevano secondo percorsi circolari su un piano normale ad un filo percorso da corrente, deducendo che la corrente esercita, nel suo intorno, forze tangenziali anziché forze agenti lungo linee rette. Sebbene originariamente tale concetto esprimesse solo un carattere geometrico, successivamente Faraday attribuì un valore dinamico alle linee di forza, ritenendole, a dispetto del vago concetto di stato elettrotonico, uno strumento più chiaro per la descrizione dei processi induttivi (Vol. I par. 232 e 238 di [1]).

Nel 1806 Amedeo Avogadro aveva provato a spiegare il processo della polarizzazione molecolare e il concetto di azione attraverso un mezzo, in un isolante disposto tra le armature di una bottiglia di Leida [2] (si veda il riquadro):

“ [...] come lo spessore di una lamina compatta, qualsiasi [isolante] può essere concepito diviso in tanti strati in cui vi sono delle molecole elementari [atomi], tutti questi strati devono essere considerati, allorché questa lamina è caricata, come aventi ciascuno una carica particolare, in maniera che la faccia dell'uno, che porta una specie di elettricità, sia successivamente in contatto con la faccia dell'altro che porta l'elettricità della specie contraria [...] Ecco dunque l'idea che i fatti ci hanno condotto a formarci di ogni strato isolante elettricamente carico, o che è lo stesso, di ogni strato preso fra due elettricità di specie contraria; una lamina isolante si deve concepire perciò come formata da un'infinità di strati che, per quanto sottili possano essere, offrono sulle loro superfici opposte due elettricità di specie contraria [...]”

Questa proposta sull'azione tra corpi isolanti carichi portava naturalmente ad ipotizzare una azione per il tramite di un mezzo. Questa idea fu raccolta da Humphry Davy nel 1812 che, confrontando il diverso comportamento degli isolanti e dei conduttori scrisse [3]:

“La differenza in ciò che si chiama potere conduttivo dei corpi sembra dipendere interamente dal diverso modo con cui questi ricevono le polarità elettriche, o con cui le loro parti sono messe in stato di comunicare

i poteri attrattivo o repulsivo ad altri corpi. I non conduttori sembrano ricevere difficilmente le polarità; ma essi le ritengono per lungo tempo, e presentano probabilmente in un piccolo spazio, un certo numero di alternazioni differenti di poli. I conduttori perfetti sono facilmente elettrizzabili su tutta la loro estensione, ma tutt'al più non presentano se non due poli, e i loro strati si distruggono prontamente."

Nel 1836, a partire da tali ipotesi, Ottaviano Fabrizio Mossotti, propose una teoria della struttura della materia e dell'azione che si esplica tra le molecole componenti le sostanze [4]. Per Mossotti

"le molecole vestendosi ciascuna di un'atmosfera di etere, vengono ad esercitare tra loro delle azioni repulsive a piccolissime distanze ed attrattive a distanze maggiori, come richiedono i fenomeni molecolari."

Riconoscendo il valore dell'opera, Faraday nel 1837 la tradusse in inglese e la presentò alla Royal Institution. Nello stesso anno, influenzato dalle proposte di Davy e Mossotti, Faraday fu spinto a rivedere il concetto di induzione (Vol I, par. 1164 di [1]), sospettando che l'induzione

"fosse in tutti i casi un'azione di particelle contigue e che l'azione elettrica a distanza (cioè l'ordinaria azione induttiva) non si ha se non attraverso l'influenza della materia interposta"

dove per "ordinaria azione induttiva" si riferiva all'induzione tra i corpi immersi in un mezzo materiale. Faraday partì dalla considerazione che la materia conduttiva come quella isolante non può essere "elettrizzata per induzione con una carica elettrica di un segno astraendosi da quella opposta" (Vol I, par. 1171 di [1]) siccome in ogni fenomeno induttivo si separano cariche uguali ma di segno opposto. Cioè le due elettricità si mostrano sempre associate nei corpi materiali. Questa osservazione, già avanzata da Franklin nel 1749 [5], lo indusse a rivedere la materia elettrizzata come costituita da particelle materiali contigue nelle quali sono presenti entrambe le elettricità nella stessa misura, quella positiva da una parte e quella negativa dall'altra. Cioè, secondo Faraday, le particelle materiali soggette

all'induzione formano dei dipoli elettrici, infatti successivamente ritenne opportuno precisare questo concetto (Vol I, par. 1298 di [1]):

"L'induzione sembra consistere in un certo stato polarizzato delle particelle in cui esse si trovano per la presenza del corpo elettrizzato che sostiene l'induzione; le particelle assumono parti positive e negative, che sono simmetricamente poste l'una rispetto all'altra e rispetto alle superfici o particelle inducenti ..."

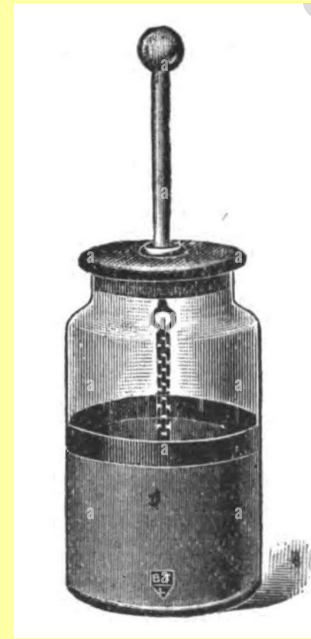
La connessione tra induzione e polarizzazione di un dielettrico costituiva per Faraday una implicita rappresentazione delle linee di forza elettriche disposte nella regione compresa tra due corpi elettrizzati. Infatti le molecole polarizzate disposte lungo la direzione dell'azione induttiva portavano a immaginare un insieme di linee di forza elettriche. Questa visione gli permise di costruire una rappresentazione di tali linee di forza in maniera analoga a quanto fatto nel caso magnetico (Vol I, par. 1679 di [1]):

"Le particelle di un dielettrico isolante sotto induzione possono essere paragonate ad una serie di piccoli aghi magnetici, o più correttamente ancora ad una serie di piccoli conduttori isolati."

Queste ipotesi, sebbene permisero a Faraday di formalizzare il meccanismo attraverso il quale il materiale interposto tra le armature di un condensatore ne influenza la capacità, destarono molteplici riserve nel mondo scientifico a causa dell'introduzione di concetti poco comprensibili perché privi di una specifica identità quali, ad esempio le linee di forza magnetiche ed elettriche e l'azione di contatto. Tale problematica era oltremodo accentuata dalle difficoltà incontrate dai ricercatori nel tentativo di dare una forma matematica al concetto di linee di forza. Le posizioni critiche si accentuarono a partire dal 1839 a seguito dell'interpretazione di Faraday dell'azione induttiva attraverso le particelle del mezzo dielettrico. Faraday rappresentava i dielettrici come un insieme di particelle conduttrici immerse nel mezzo isolante che, se il materiale è compreso tra le armature di un condensatore carico, si dispongono ordinatamente lungo le linee di forza; pertanto l'azione induttiva non si trasmette direttamente da una armatura all'altra ma da una

La bottiglia di Leida

Con l'obiettivo di trovare un metodo per immagazzinare il fenomeno elettrico, nel 1745 Pieter van Musschenbroek, fisico e matematico di Leida, nei Paesi Bassi, inserì un chiodo nel collo di una bottiglia di vetro riempita con acqua e con esso toccò il conduttore di una macchina elettrica in funzione. Dopo aver interrotto il contatto col conduttore, sfiorò con l'altra mano il chiodo avvertendo un'intensa scossa. Lo stesso anno il canonico tedesco Ewald Jurgen von Kleist, a Wicewo, attualmente in Polonia, sviluppò indipendentemente un dispositivo simile. L'anno successivo, William Watson, un medico inglese, costruì una versione più pratica della bottiglia di Leida che faceva a meno dell'acqua ed era costituita da una ampolla le cui superfici interna ed esterna erano rivestite da un foglio metallico. Adoperando tale dispositivo nel 1747 Watson trasmise una scintilla elettrica lungo un filo teso attraverso il Tamigi a Londra, presso il ponte di Westminster.



La bottiglia di Leida, come fu denominato questo apparecchio, rivoluzionò lo studio dell'elettrostatica, costituendo il primo dispositivo in grado di immagazzinare la carica elettrica. Questo strumento rappresentò un'ulteriore attrazione nelle dimostrazioni pubbliche dei fenomeni elettrici che si tenevano presso i salotti dell'aristocrazia europea del XVIII secolo. Ad esempio nel 1746 l'abate Jean-Antoine Nollet, un fisico che rese popolare la scienza elettrica in Francia, scaricò una bottiglia di Leida davanti al re Luigi XV inviando corrente attraverso una catena di 180 guardie reali. In un'altra dimostrazione, Nollet utilizzò un filo di ferro per collegare una fila di monaci certosini lunga più di un chilometro; quando una bottiglia di Leida fu scaricata sul filo, i monaci saltarono simultaneamente in aria. Attualmente il dispositivo è denominato condensatore.

particella a quella contigua del mezzo isolante. Per contigua Faraday intendeva vicina, siccome era consapevole che un contatto diretto tra le particelle poteva configurare uno stato di conduzione; pertanto, consapevole che l'interazione di contatto ipotizzata, fosse difficilmente inquadrabile in un piano razionale, ritenne opportuno precisare (Vol I, par. 1616 di [1]):

“Supponiamo che sia possibile per una particella elettrizzata [...] trovarsi al centro di un vuoto avente il diametro di un pollice, niente a mio avviso, impedisce che essa agisca alla distanza di mezzo pollice su tutte le particelle che delimitano la superficie interna della sfera, e con una forza data dalla ben nota legge del quadrato della distanza.

L'approccio ambiguo di Faraday, che non ripu-

diava l'azione a piccola distanza e non negava l'azione di contatto, determinò notevoli diffidenze tra i ricercatori. Nel gennaio 1839 il chimico americano Robert Hare ([6], [7] e Vol. II, p. 251 di [1]) chiese esplicitamente a Faraday di precisare il significato di tali affermazioni che riconoscevano un'azione a piccole distanze, sebbene le precedenti riflessioni sembrassero legate ad una azione di contatto. Benché consapevole della difficoltà interpretativa del passaggio precedente, nella risposta ad Hare del 18 gennaio 1840 Faraday confermò sostanzialmente la sua ipotesi (Vol. II, p. 262 di [1])

“Io penso che l'ordinaria induzione in tutte le sue manifestazioni sia un'azione di particelle contigue e, [...] considerando in caso molto ipotetico, quello di un vuoto, non ho

detto nulla nella mia teoria che vieti ad una particella carica nel centro di un vuoto di agire sulle particelle vicine ad essa, sebbene lontana mezzo pollice. Col significato che ho accuratamente attribuito alla parola "contigue", non vedo contraddizione nei termini usati, né naturale impossibilità, o improbabilità di tale azione. Nondimeno ogni ordinaria induzione è per me un'azione di particelle contigue, cioè di particelle a piccolissima distanza, e tuttavia non vedo come ciò non possa rientrare nel medesimo principio "

Tale risposta costituisce un compromesso tra la tesi dell'azione di contatto e quella dell'azione a distanza, esprimendo un effettivo orientamento verso l'azione a distanza senza però negare la partecipazione attiva del mezzo nei fenomeni di elettrizzazione. Una parte del mondo scientifico guardò con interesse queste valutazioni: Gauss, ad esempio, sostenne lo stesso approccio interpretativo, liberandosi di fatto sia dell'azione a distanza che di quella di contatto, ammettendo che le forze elettriche non si propagano istantaneamente ma con velocità finita. Faraday tuttavia sapeva che la questione non poteva ritenersi risolta poichè era consapevole che l'interpretazione dell'induzione elettrostatica negli spazi vuoti fra le particelle era inadeguata. Per sedare definitivamente la polemica con Hare, nel 1844 Faraday prese in analisi le idee allora all'avanguardia circa la costituzione della materia. In particolare fu attratto dalla teoria proposta nel 1758 dal fisico dalmata Ruđer Josip Bošković [8] il quale ipotizzava che gli atomi agissero come puri centri di forza sparsi con continuità nel vuoto, ritenendo che tale concezione potesse dare sostegno alla sua concezione dell'azione induttiva a contatto. Il 26 gennaio 1844 in una lettera indirizzata a Richard Taylor scrive [9]:

"Non ignoro che la mente è più capace di capire i fenomeni di cristallizzazione, la chimica e la fisica, piuttosto di comprendere i centri di forza. Mi sento costretto ad ammettere al presente che non posso farne a meno. [...] Ciò che realmente conta nell'ipotesi di Boscovich è che la materia [...] sarà continua. [...] Le forze che hanno

origine nei centri danno a questi centri la proprietà degli atomi di materia"

Cioè in Faraday si faceva strada l'idea di una materia continua che ammetteva l'esistenza di atomi estesi senza interruzione e non corpuscoli di materia isolati in uno spazio continuo. Inoltre aggiunge:

"Il punto di vista ora espresso sulla costituzione della materia sembrerebbe implicare necessariamente la conclusione che la materia riempie tutto lo spazio, o, almeno, tutto lo spazio a cui si estende la gravitazione (incluso il Sole e il suo sistema); poiché la gravitazione è una proprietà della materia dipendente da una certa forza, ed è questa forza che costituisce la materia. Da questo punto di vista la materia non è semplicemente reciprocamente penetrabile, ma ogni atomo si estende, per così dire, attraverso l'intero sistema solare, pur conservando sempre il proprio centro di forza.

In pratica Faraday, portando all'estremo l'ipotesi di Bošković, introdusse il concetto di campo: mentre lo spazio inteso da Newton era un contenitore inattivo per i corpi e le cariche elettriche, secondo questa concezione diviene parte attiva nei fenomeni, essendone addirittura la sede. Questa proposta trova la sua applicazione più ardita in una lettera inviata a Richard Phillips nel 1846 [10] nella quale Faraday ipotizzò che le vibrazioni della luce fossero riconducibili ad oscillazioni delle linee di forza:

"una nozione che, per quanto è ammesso, eliminerà l'etere, che in un altro punto di vista dovrebbe essere il mezzo in cui hanno luogo queste vibrazioni"

Nel giugno 1852 Faraday presentò la memoria *On the physical character of the lines of force* ([11] p. 3243), in cui, senza chiarirne esattamente la natura, veniva attribuito un carattere fisico reale alle linee di forza elettriche e magnetiche. L'ipotesi presentata nella memoria era che le linee di forza non rappresentano linee di particelle polarizzate, sia nel caso elettrico che magnetico, ma uno stato fisico, sebbene la natura di tale stato rimanesse poco chiaro. Nella memoria, alle linee di forza così concretizzate viene attribuito una valenza dinamica e si ipotizza di fatto l'esistenza di

una entità mediatrice del fenomeno induttivo che possiamo ora ricondurre al concetto moderno di campo:

“[...] quando il filo si muove, in esso verrà generata una corrente di elettricità. Il semplice fatto del moto non può aver prodotto questa corrente: ci deve essere uno stato o condizione intorno al magnete, sostenuto dallo stesso magnete, entro l'intervallo di cui era posto il filo; e questo stato mostra la costituzione fisica delle linee di forza magnetica. Che cosa sia questo stato o da cosa dipenda non può essere ancora chiarito. Potrebbe dipendere dall'etere, come avviene per un raggio di luce, ed è già stata mostrata una connessione tra la luce ed il magnetismo¹. Potrebbe dipendere da uno stato di tensione, o da uno stato di vibrazione, o forse da qualche altro stato analogo alla corrente elettrica, a cui le forze magnetiche appaiono così intimamente correlate. Stabilire se sia necessario o meno ammettere che la materia sostenga questa condizione fisica dello spazio dipenderà da ciò che si intende con il termine materia. Se per materia si intendono le sostanze ponderabili o soggette alla gravità, allora la materia non è essenziale alle linee fisiche della forza magnetica non più di quanto non lo sia per un raggio di luce o per il calore; ma se, ammettendo l'esistenza dell'etere, ammettiamo implicitamente che esso sia un particolare tipo di materia, allora le linee di forza possono essere una qualche manifestazione o espressione di esso. Sperimentalmente si osserva che il mero spazio è magnetico; ma l'idea di spazio può includere l'idea di etere, quando si accetta la sua esistenza; se in futuro emergerà un'altra concezione della condizione dello spazio, si dovrà attribuire ad esso quello che ora, almeno per quanto ci risulta sperimentalmente, è attribuibile alle proprietà dello spazio stesso. D'altra parte ritengo un fatto accertato che la materia ponderabile non è

¹Faraday si riferisce all'osservazione fatta nel 1845 secondo cui, quando un raggio di luce polarizzata attraversa un opportuno vetro da lui realizzato, contenente proporzioni uguali di silice, acido borico e ossido di piombo, nella direzione di un campo magnetico, la polarizzazione della luce ruota di un angolo proporzionale all'intensità del campo.

essenziale per l'esistenza di linee fisiche di forza magnetica ”

La formalizzazione del fenomeno induttivo

La formalizzazione matematica del fenomeno dell'induzione si sviluppò contemporaneamente alle ricerche di Faraday. Nella seduta del 29 novembre del 1833 dell'Accademia delle Scienze di S. Pietroburgo il fisico russo Emil Khristianovich Lenz presentò una memoria [12] in cui veniva spiegato che il verso della corrente indotta è nella direzione da opporsi alla causa che la determina. Lenz arrivò a questa conclusione attraverso una accurata analisi delle esperienze di Faraday e degli studi di Ampère. Solo nel 1847, quando Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz [13] enunciò il principio di conservazione dell'energia, si comprese come la regola stabilita da Lenz fosse una conseguenza diretta di tale principio.

Faraday aveva esaminato il fenomeno induttivo limitatamente alla produzione di correnti, non mettendo in luce la formazione della forza elettromotrice indotta e mantenendo tale punto di vista anche quando era stato ampiamente compreso il concetto di tensione elettrica. Seguendo la logica dell'azione a distanza, nel 1845 il fisico tedesco Franz Ernst Neumann presentò all'Accademia delle Scienze di Berlino una memoria [14] in cui, combinando i risultati di Faraday con la legge per la forza elettromagnetica di Ampère e il principio di Lenz, formulava la legge generale per la determinazione della forza elettromotrice indotta, dimostrando inoltre la validità della legge di Ohm anche per le correnti variabili.

Mentre Neumann si sforzava di comprendere le leggi delle correnti indotte attraverso la teoria di Ampère, Wilhelm Eduard Weber stava tentando un progetto ancora più ambizioso: unire l'elettrodinamica in un insieme coerente con l'elettrostatica. Nel 1845 Gustav Theodor Fechner [15] aveva fatto l'ipotesi che ogni corrente elettrica consistesse in un flusso di cariche, positive e negative uguali tra loro in grandezza e numero, che si spostano in direzioni opposte con la medesima velocità. Supponendo che cariche simili si attraggano quando si muovono parallelamente

nella stessa direzione, mentre cariche diverse si attraggono quando si muovono in direzioni opposte, Fechner era riuscito a collegare gli effetti di induzione osservati da Faraday alle leggi dell'elettrodinamica formulate da Ampère. L'anno successivo Weber, basandosi su questa ipotesi e su un precedente lavoro di Gauss, fornì una relazione che generalizzava la legge di Coulomb nel caso in cui le cariche elettriche fossero in movimento, proponendo la prima teoria dei fenomeni elettrici e magnetici basata sulla nozione di carica elettrica discreta e di corrente elettrica quale moto di cariche. In questa formula la forza di interazione tra due particelle di cariche e separate dalla distanza r , in generale dipendente dal tempo per effetto del moto delle cariche, si esplica a distanza lungo la congiungente le due particelle cariche ed ha intensità:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right]$$

Il primo termine della somma rappresenta la forza di Coulomb mentre gli altri due, che dipendono dalla velocità e dall'accelerazione relativa delle due particelle, sono in grado di descrivere gli effetti elettrodinamici e l'induzione elettromagnetica; c è una costante che ha le dimensioni di una velocità e serve a garantire la coerenza del risultato dal punto di vista dimensionale. Ci sono due aspetti che rendono singolare tale relazione: contenendo i termini di velocità e accelerazione si consegue un moto differente da quello determinato dalle forze newtoniane, caratteristica questa che la fece accogliere con diffidenza tra i ricercatori dell'epoca, fino al 1847 quando von Helmholtz non ne confermò definitivamente la validità [18]; inoltre attraverso misure svolte sia da Weber che da Rudolph Kohlraush (p. 221 di [19], p. 609 di [20]) nel 1856 si era constatato che il valore della costante c era dello stesso ordine di grandezza della velocità della luce nel vuoto. Quest'ultimo aspetto accentuava il sospetto di una connessione tra la costante c e la velocità massima di propagazione dell'interazione, portando ad ipotizzare che le azioni elettromagnetiche non si propagassero istantaneamente ma in un tempo finito. Tale congettura era stata proposta da Gauss a Weber nel 1845 e successive ricerche sia di Bernhard Riemann [21] che

di Neumann [22] l'avevano definitivamente confermata. Weber non fu in grado di identificare questa costante con la velocità della luce e quindi di anticipare l'unificazione fra ottica, elettricità e magnetismo che verrà realizzata qualche anno dopo da Maxwell.

Le analogie

Con l'obiettivo di rendere fisicamente comprensibile il concetto di campo introdotto da Faraday, nella metà del XIX secolo si svilupparono delle teorie interpretative meccanicistiche basate sulle analogie. In particolare, nel 1842, riflettendo sul problema di Faraday delle linee di forza curve, William Thomson [23], aveva pubblicato, in forma anonima, una memoria in cui si proponeva di sviluppare un'analisi matematica della propagazione della forza elettrica generata da una sorgente, basata sulla teoria del calore formulata da Jean Baptiste Joseph Fourier nel 1822 [24], nella quale Thomson si era imbattuto quando aveva solo quindici anni. Secondo Thomson, l'identificazione di specifiche analogie tra i fenomeni termici ed elettrici avrebbe consentito di comprendere i processi elettrici. Il modello fisico della diffusione del calore da una particella all'altra suggeriva una analogia con la propagazione della forza elettrica "attraverso l'azione di particelle contigue di qualche mezzo interposto" (p. 37 di [23]), come nella teoria di Faraday della propagazione delle forze elettrostatiche attraverso le particelle contigue di un dielettrico. L'obiettivo di Thomson era quello di identificare delle relazioni tra le equazioni che potessero descrivere entrambi i fenomeni. Secondo Thomson, tali analogie matematiche costituivano punti di partenza verso analogie meccaniche più realistiche che avrebbero condotto ad una teoria fisica per la propagazione dei campi elettrici e magnetici. Seguendo tale programma, Thomson confrontò fenomeni fisici completamente diversi, come i problemi di diffusione di calore, di attrazione elettrostatica e di attrazione gravitazionale, rendendosi conto che tali fenomeni potevano essere descritti attraverso equazioni dello stesso tipo, semplicemente attribuendo i giusti significati a ciascun simbolo in ogni equazione. Ad esempio, posizionando delle sorgenti di calore puntuali con densità σ su una superficie ds , Thomson aveva trovato per la

temperatura T ad una distanza r tra le sorgenti la relazione

$$T = \int_S \frac{\sigma}{r} ds$$

che risulta analoga a quella che permette di stabilire il potenziale elettrostatico alla distanza r da una distribuzione superficiale di carica σ . Thomson auspicava di poter sviluppare nuovi concetti per l'elettrostatica studiando equazioni che descrivono la conduzione del calore, e viceversa: gli insiemi di equazioni descrittive di entrambe le discipline sono infatti identici.

Nel suo pensiero, il punto di partenza di una teoria (la legge di Coulomb) divenne il risultato dell'altra (distribuzione puntuale della temperatura della sorgente). Un'ovvia conseguenza di una teoria (il trasferimento di calore locale nella teoria di Fourier) diventava un principio essenziale dell'altra (flusso del campo attraverso una superficie). Il programma fu ripreso nel 1845 e descritto nella memoria pubblicata l'anno successivo (p. 15 di [23]), il cui tema principale è la dimostrazione della validità della legge di Coulomb anche nell'ambito della teoria di Faraday, secondo cui la forza si trasmette attraverso il mezzo materiale e varia con la natura di tale mezzo. Dalla sua analisi Thomson dedusse che per tenere conto del mezzo occorre dividere la forza per la costante dielettrica del materiale interposto tra i mezzi elettrizzati. Pertanto, se nel vuoto la forza vale F_0 , in un mezzo di costante dielettrica relativa ϵ_r la forza diventa F_0/ϵ_r .

Per costruire un'immagine mentale dei fenomeni elettrici e magnetici, Thomson ipotizzò che i corrispondenti campi si propagassero quasi allo stesso modo degli spostamenti in un mezzo elastico. Per coincidenza, nel 1845 George Gabriel Stokes aveva pubblicato una memoria (Vol. III, p. 287 di [25]) sull'elasticità dei solidi e dei mezzi continui, presentando un nuovo approccio allo studio della dinamica dei mezzi continui. Stokes studiò matematicamente il moto più generale di un elemento fluido, interpretandolo come la sovrapposizione di una rotazione e tre dilatazioni o contrazioni attorno ai tre assi ortogonali x , y e z . Dal confronto tra le equazioni che descrivevano alcuni fenomeni elettromagnetici con le equazioni per il moto generale di un elemento di un solido elastico (dilatazioni, contrazioni e rotazioni), Thomson nel 1847 interpretò le solu-

zioni delle equazioni di Stokes per le proiezioni α, β, γ lungo gli assi cartesiani di un piccolo spostamento del mezzo incompressibile in un punto di coordinate x, y, z :

$$\alpha = \frac{x}{r^3}, \quad \beta = \frac{y}{r^3}, \quad \gamma = \frac{z}{r^3}$$

come formalmente analoghe alle componenti del campo elettrico prodotto da una carica elettrica unitaria. Inoltre, applicando le idee di Stokes, Thomson interpretò le soluzioni delle equazioni per un solido incompressibile in analogia ai campi prodotti da un dipolo magnetico e da un elemento di corrente. Confrontando le equazioni che descrivono questi fenomeni con quelle che descrivono il movimento generale di traslazione e rotazione di un elemento solido elastico, Thomson giunse alla conclusione che tali fenomeni non erano solo formalmente ma anche materialmente analoghi. L'analogia con le proprietà dei solidi elastici descritte da Stokes era tra il campo elettrico e lo spostamento elastico e tra il campo magnetico le rotazioni nell'etere. Queste analogie suggeriscono in maniera esplicita la propagazione delle forze elettriche e magnetiche attraverso processi meccanici nell'etere (spostamenti, rotazioni, forze e altre grandezze meccaniche). Tale approccio influenzò notevolmente Maxwell.

Successivamente Thomson intraprese il tentativo di dare una forma matematica alla teoria di Faraday delle linee di forza. In una lettera a Faraday del 19 giugno 1849 (Vol 1, p. 214 di [27]) schematizzò la disposizione delle linee di forza di un campo magnetico, che definì **campo di forze**, allo scopo di illustrare la permeabilità delle sostanze nei confronti delle linee di forza. Due anni dopo [28], senza proporre alcun modello fisico per la trasmissione della forza magnetica tra le particelle costituenti una sostanza magnetica, Thomson rappresentò il campo magnetico come una distribuzione spaziale continua di una "materia magnetica immaginaria"; questa materia non era concepita come una vera sostanza materiale, quanto come una sorta di incarnazione delle linee di forza della teoria di Faraday, ovvero un approccio alla rappresentazione della distribuzione spaziale del campo di forza, tale da consentire l'espressione matematica della distribuzione delle linee di forza nello spazio. Successivamente, Thomson sottolineò il divario tra

rappresentazione matematica e rappresentazione fisica comprendendo come la sua teoria della deformazione di un solido elastico e la sua rappresentazione di linee di forza magnetica non erano da interpretare come modelli della costituzione fisica del campo, ma avevano semplicemente lo scopo di fornire illustrazioni o analogie fisiche per le teorie matematiche del campo.

Malgrado le buone intenzioni, Thomson non riuscì nel compimento del suo programma volto a fornire una descrizione matematica completa delle linee di forza proposte da Faraday. Infatti, negli anni seguenti, Thomson venne sempre più assorbito dagli interessi che lo portarono alla formalizzazione della termodinamica. Questo costituiva uno dei tratti distintivi del modo di operare di Thomson il quale, pur fornendo contributi di alto livello all'oggetto di studio attraverso l'introduzione di approcci spesso estremamente innovativi, una volta conseguito un risultato a suo giudizio soddisfacente, perdeva l'interesse per l'argomento passando ad altro, impedendogli così di sviluppare completamente le potenzialità delle sue scoperte. Quando nel 1890, dopo più di quattro decenni dall'inizio dei tentativi di matematizzazione del concetto di linea di forza, pensò di aver raggiunto questo obiettivo, lo fece con una memoria [29] basata su un'esposizione poco comprensibile di liquidi viscosi, solidi elastici, etere e forze magnetiche. Questo metteva fine alla prospettiva di formulare un'interpretazione ibrida tra magnetismo e meccanicismo delle linee di forza, per altro quando già da diversi anni l'applicazione dei modelli meccanici all'ambito elettromagnetico era ormai divenuta largamente desueta tra i ricercatori europei.

Formalizzazione delle linee di forza

Il 13 novembre 1854 Maxwell, appena laureato, inviò a Thomson una lettera (p. 254 di [30]) in cui delineava le proprie idee sul concetto di linee di forza e, in particolare, sul loro possibile impiego nell'analisi delle connessioni esistenti tra la forza magnetica e la corrente elettrica. Thomson non aveva trattato pubblicamente quest'ultimo argomento, del quale Maxwell decise di elaborare una serie di idee geometriche. Nei mesi seguenti egli

modificò e sviluppò le nozioni di base abbozzate nella lettera a Thomson, rendendole note nella sua prima grande opera ([31], p. 155), *On Faraday's lines of force*, divisa in due parti e pubblicata nel 1856. In essa Maxwell, ispirato dai lavori di Thomson, adoperando il metodo dell'analogia riconduceva le proprietà geometriche di un fluido viscoso e incompressibile a quelle dei campi elettrici, magnetici e delle correnti ([31], p.155):

“Per ottenere idee fisiche senza adottare una teoria fisica, dobbiamo familiarizzare con l'esistenza delle analogie fisiche. Per analogia fisica intendo quella parziale somiglianza tra le leggi di una scienza e quelle di un'altra che fa sì che ciascuna di esse illustri l'altra. Così tutte le scienze matematiche sono fondate sulle relazioni tra leggi fisiche e leggi numeriche, cosicché lo scopo della scienza esatta è di ridurre i problemi della natura alla determinazione di quantità mediante operazioni numeriche.”

Maxwell si spinse oltre Thomson non soltanto nell'uso dell'analogia ma anche nell'approfondire la fondamentale distinzione, introdotta da Faraday, tra quantità e intensità di un campo (in seguito denominati **flusso** e **forza**), cercando di sviluppare una serie di connessioni geometriche tra questi due aspetti del campo. Nel caso dell'elettricità, la struttura elaborata era identica a quella ideata da Faraday per i corpi dielettrici, dal momento che la quantità del campo elettrico, era proporzionale alla sua intensità o, più esattamente, all'intensità del campo, proprio come la portata di un liquido è proporzionale al gradiente di pressione che gli consente di vincere la resistenza. Allo stesso modo, nella magnetostatica vi era un rapporto di proporzionalità diretta tra una quantità magnetica (l'induzione) e l'intensità del campo magnetico. La quantità di corrente elettrica, infine, è a sua volta proporzionale alla sua intensità, ossia alla forza elettrica (il che equivaleva alla legge di Ohm). Maxwell illustra così i suoi obiettivi ([31], p.157):

“il mio intento è limitato a mostrare come, attraverso una stretta applicazione delle idee e dei metodi di Faraday, sia presentabile chiaramente, ad una mente matematica, il collegamento tra gli ordini fenomenici tra loro differenti che Faraday ha scoperto”

Nella prima parte della memoria, Maxwell, attraverso la tecnica dell'analogia, mise in luce la connessione tra il flusso di un fluido incomprimibile e le linee di forza magnetiche. Con riferimento ad un volume V circoscritto da una superficie S , il flusso di materia per unità di tempo attraverso un elemento di superficie ds è $\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$, in cui \mathbf{v} rappresenta la velocità del fluido e $\rho(\mathbf{r}, t)$ la densità nel punto caratterizzato dal vettore posizione \mathbf{r} rispetto al sistema di riferimento scelto al tempo t . Pertanto la massa totale che attraversa la superficie chiusa S è pari all'integrale attraverso S di $\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$. Tale quantità è uguale al tasso di diminuzione della massa contenuta nel volume V , cioè

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) d^3r ,$$

pertanto:

$$\int_S \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) d^3r ,$$

dove $d\mathbf{s}$ è un vettore ortogonale alla superficie infinitesima ds . Applicando il teorema della divergenza all'integrale del primo membro troviamo:

$$\nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}] = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) .$$

Se il fluido è incomprimibile, non dipende né dal tempo né dalle coordinate spaziali, pertanto:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 .$$

A partire da tale considerazione Maxwell, stimolato dai concetti di linee e tubi di forza introdotti da Faraday, tracciò un'analogia tra il comportamento delle linee del campo magnetico e le linee di flusso di un fluido incomprimibile. Osservando che, ad esempio, se i tubi o le linee di flusso, divergono, l'intensità del campo diminuisce, così come la velocità del fluido, Maxwell fece corrispondere alla velocità la densità di flusso magnetico \mathbf{B} . Ciò suggerisce che il campo magnetico può essere caratterizzato dalla relazione analoga a quella soddisfatta dalla velocità del fluido incomprimibile:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 .$$

Con un approccio analogo Maxwell dedusse che nello spazio libero, in assenza di cariche elettriche, per il campo elettrico \mathbf{E} deve risultare

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 .$$

D'altra parte, poiché gli era nota l'equazione di Poisson [32] per il potenziale elettrostatico

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} ,$$

ed il legame tra il potenziale elettrostatico ed il campo elettrico, Maxwell ricavò la legge di Gauss² [16, 33]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

Nella memoria *On Faraday's lines of force* Maxwell riconobbe la distinzione tra i vettori \mathbf{B} ed \mathbf{H} già introdotti da Thomson, associando \mathbf{B} al flusso magnetico e riferendosi ad esso come **l'induzione magnetica**, e \mathbf{H} alle forze, chiamandolo **intensità magnetica** ([31], p. 192). Sebbene esprimessero grandezze fisiche ancora non aderenti al concetto di campo elettromagnetico, in questa memoria Maxwell utilizzò questi vettori magnetici e il vettore elettrico per ottenere due risultati notevoli: la legge di Ampère basata sui risultati sperimentali ottenuti da Ampère e da Faraday e la formalizzazione del fenomeno dell'induzione attraverso il concetto di stato elettrotonico introdotto da Faraday, che Maxwell inizialmente denominò **intensità elettrotonica**.

Nelle memorie presentate a settembre 1820 all'Académie des sciences di Parigi [34] volte a fornire una teoria quantitativa delle osservazioni di Ørsted, Ampère aveva descritto i poli di un magnete come costituiti da correnti elettriche chiuse concentriche all'asse del magnete, aggiungendo:

“Questa disposizione l'ho imitata piegando a spirale un filo conduttore di ottone le cui estremità rettilinee vengono collegate ad una pila voltaica”

Inoltre la bobina così formata era

²In particolare Gauss fa riferimento per la sua determinazione alla proposizione 91 dei *Principia* di Isaac Newton, riguardante la valutazione della forza esercitata da una sfera su un punto ovunque lungo un asse passante per la sfera.

“fortemente attratta o respinta dal polo di un magnete secondo il senso in cui la percorreva la corrente. La forza risulta attrattiva se le correnti dell’elica hanno lo stesso senso delle correnti del polo, e repulsiva quando le correnti sono di senso contrario. Sostituendo il magnete con un altro avvolgimento si hanno le stesse attrazioni e repulsioni”

La scoperta di Ampère si può quindi sintetizzare affermando che alle estremità di due bobine si riscontrano gli stessi fenomeni di attrazione e repulsione che hanno luogo tra le estremità di due magneti permanenti; quindi la bobina agisce come un magnete temporaneo. Queste valutazioni portarono al principio di equivalenza tra un circuito piano percorso da correnti e uno strato di materiale magnetico, oggetto di una comunicazione all’Académie del 28 novembre 1825. Consideriamo un sottile strato di materiale magnetico di superficie S , sul quale siano distribuiti fluidi magnetici, australe su una faccia e boreale sull’altra. Se ad ogni molecola magnetica si immagina di sostituire un piccolissimo circuito che occupi un’area infinitesima, si costituiranno altrettanti *“piccoli circuiti in piani paralleli equidistanti”*. Con riferimento alla Figura 2, Ampère nella corrispondente memoria scrive:

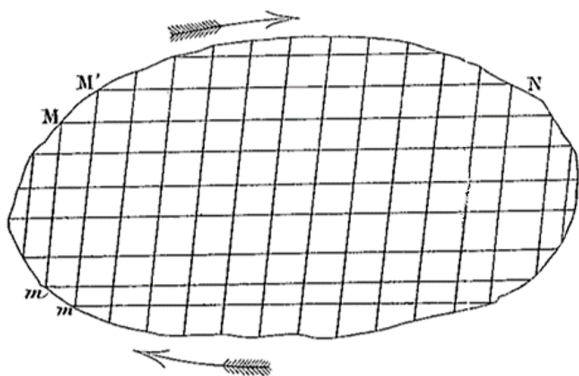


Figura 2: Schematizzazione dell’equivalenza dell’azione prodotta da un magnete permanente e l’azione prodotta da uno strato di correnti elettriche chiuse equiverse [35].

“Suddividiamo la superficie S di un circuito piano qualsiasi MNm in elementi infinitamente piccoli con rette tagliare da un secondo sistema di parallele ad angoli retti con le prime ed immaginiamo che intorno a

ciascuna di queste aree infinitamente piccole circolino delle correnti dirette nello stesso verso della corrente MNm . Tutte le parti di queste correnti che si troveranno lungo le linee rette si elideranno; perché ve ne saranno due di segno contrario che percorreranno la stessa retta; resteranno in definitiva, solo le parti curvilinee di queste correnti, es. MM' , mm' , le quali formeranno il circuito totale MNm .”

Pertanto, concluse Ampère, la superficie S una volta rivestita di molecole del cosiddetto fluido magnetico è del tutto equivalente ad un’altra ricoperta da correnti elettriche. Questa proprietà conduce a riconoscere che l’azione di un magnete può essere sostituita da quella di un circuito che abbia lo stesso contorno del magnete permanente e sia percorso dalla corrente in senso orario, rispetto all’osservatore che guarda lo strato magnetico dal lato sud. Faraday, nella memoria *On the physical character of the lines of force* ([11] p. 3266), identificò la relazione tra linee di forza del campo elettrico e del campo magnetico intese quali curve mutuamente intersecante specificando inoltre la corrispondenza tra la direzione della corrente e la relativa orientazione del campo magnetico. Maxwell interpretò il principio di equivalenza espresso da Ampère affermando che ([31], p. 193)

“... l’effetto magnetico di uno strato uniformemente magnetizzato è equivalente a quello di una corrente elettrica attorno al bordo dello strato.”

Concludendo che

“L’intensità totale della forza magnetizzante che circola in una curva chiusa attorno ad una corrente chiusa è costante, e può quindi fornire una misura della corrente. Questa intensità è indipendente dalla forma della curva chiusa e dipende solo dalla corrente che la attraversa...”

specificando inoltre che la legge è limitata alle *“correnti chiuse”*, aggiungendo che quelle che si sviluppano tra le armature dei condensatori, che definì *“correnti aperte”*, le avrebbe trattate successivamente. Maxwell esprime la legge di Ampère

in forma differenziale come

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy} , \\ b_2 &= \frac{d\gamma_1}{dx} - \frac{d\alpha_1}{dz} , \\ c_2 &= \frac{d\alpha_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dx} , \end{aligned}$$

dove a_2 , b_2 , e c_2 rappresentano le componenti del vettore densità di corrente \mathbf{J} e α_1 , β_1 e γ_1 sono le componenti del vettore \mathbf{H} . In termini moderni tale legge si esprime come $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$. Inoltre, Maxwell osservò che se si derivano ambo i membri di ciascuna delle espressioni precedenti, e si sommano, si trova l'equazione di continuità nel caso stazionario, espressa ora come $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$:

$$\frac{da_2}{dx} + \frac{db_2}{dy} + \frac{dc_2}{dz} = 0 ,$$

confermando così che lo studio è "limitato alle [sole] correnti chiuse [e che ancora] si conosce poco degli effetti magnetici relativi alle correnti aperte."

Relativamente al fenomeno dell'induzione, senza proporre alcuna analogia fisica dell'idea di Faraday dello stato elettrotonico, Maxwell si persuase che *al cambiamento delle linee di forza attraverso un circuito corrispondeva un cambiamento di qualcosa come lo stato elettrotonico*. Maxwell scrive ([31], p. 185):

"Faraday ha mostrato [...] come le forze elettromotrici dipendono dal numero di linee che vengono tagliate dal conduttore durante il moto. [...] L'effetto è lo stesso in qualsiasi maniera il numero di linee di induzione magnetica passanti attraverso il circuito aumenti. Esso non cambia se l'aumento ha luogo col moto del conduttore stesso, o di altri conduttori, o di magneti, o col cambiamento di intensità di altre correnti, o con la magnetizzazione o smagnetizzazione di magneti vicini, o infine, con la variazione di intensità della corrente stessa. In tutti questi casi la forza elettromotrice [il campo elettrico] dipende dalla variazione del numero di linee di azione magnetica induttiva che attraversano il circuito. È naturale supporre che una forza di questo tipo, che dipende da un cambiamento del numero di linee, sia dovuta a un cambiamento di stato che si misura dal numero di queste linee. Si

può supporre che un conduttore chiuso in un campo magnetico si trovi in un certo stato derivante dall'azione magnetica. Finché questo stato rimane invariato non si verifica alcun effetto, ma, quando lo stato cambia, sorgono forze elettromotrici dipendenti in intensità e direzione da questo cambiamento di stato. "

Con l'obiettivo di attribuire un significato fisico al concetto di stato elettrotonico, Maxwell ritenne opportuno precisare ([31], p. 203):

"Abbiamo ora ottenuto nelle funzioni [che descrivono lo stato elettrotonico] il mezzo per evitare di considerare la quantità di induzione magnetica che attraversa il circuito. Al posto di questo metodo artificiale abbiamo quello naturale di considerare la corrente con riferimento a grandezze [...] alle quali do il nome di funzioni Elettrotoniche, o componenti dell'intensità Elettrotonica"

Quindi Maxwell, pur facendo riferimento al concetto di stato elettrotonico, si rimetteva al concetto di variazione delle linee di forza magnetiche. Operando in tale direzione ottenne l'espressione che collega il campo elettrico allo stato elettrotonico, nella forma ([31], p. 204)

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{1}{4\pi} \frac{d\alpha_0}{dt} \\ \beta_2 &= -\frac{1}{4\pi} \frac{d\beta_0}{dt} \\ \gamma_2 &= -\frac{1}{4\pi} \frac{d\gamma_0}{dt} \end{aligned}$$

aggiungendo:

"Dall'esperienza risulta che [ciascuna di queste espressioni] si riferisce al cambiamento di stato elettrotonico di una data particella del conduttore, dovuto al cambiamento delle funzioni elettrotoniche stesse o al moto della particella"

In termini moderni possiamo identificare lo stato elettrotonico col potenziale vettore e scrivere $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$.

Nella seconda parte della memoria Maxwell, sfruttando i risultati dell'analisi vettoriale, enuncia, in parole secondo lo stile di Faraday, le leggi dell'elettromagnetismo e dell'induzione

elettromagnetica per le correnti chiuse ([31], p. 206):

“ I. L'intensità elettrotonica attorno al confine di un elemento di superficie misura la quantità di induzione magnetica che attraversa quella superficie, o, in altre parole, il numero di linee di forza magnetica che attraversano quella superficie.

II. L'intensità magnetica in ogni punto è connessa con la quantità di induzione magnetica da un insieme di equazioni lineari, dette equazioni di conduzione.

III. L'intensità magnetica attraverso il confine di qualsiasi superficie misura la quantità di corrente elettrica che passa attraverso quella superficie.

IV. La quantità e l'intensità delle correnti elettriche sono collegate da un sistema di equazioni di conduzione. ”

Queste leggi permettono di dedurre la quantità e l'intensità magnetica ed elettrica dalla funzione elettrotonica. Le unità di misura non sono prese in considerazione. Per quanto riguarda le forze e l'induzione nei conduttori:

“ V. Il potenziale elettromagnetico totale di una corrente chiusa si misura dal prodotto della quantità della corrente moltiplicata per l'intera intensità elettrotonica stimata nella stessa direzione attorno al circuito. Qualsiasi spostamento dei conduttori che provocherebbe un aumento del potenziale sarà [...] misurato dall'aumento del potenziale.

VI. La forza elettromotrice su qualsiasi elemento di un conduttore è misurata dalla velocità di variazione istantanea dell'intensità elettrotonica su quell'elemento, sia in grandezza che in direzione. ”

A commento di queste leggi Maxwell scrive ([31], p. 208)

“In queste sei leggi ho cercato di esprimere l'idea che credo sia il fondamento matematico dei modi di pensare dedotti dalle

In termini moderni, le enunciazioni di Maxwell si esprimono come:

$$I : \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} , \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$II : \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

$$III : \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$IV : \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$V : U = -i \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -i \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$VI : \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

I simboli sono quelli utilizzati in Ref. [36].

Ricerche Sperimentali. Non credo che [questa formulazione] contenga neppure l'ombra di una vera teoria fisica; infatti, il suo pregio principale come strumento temporaneo di ricerca è quello di non rendere conto, nemmeno in apparenza, di alcunché”

Quindi richiama la teoria elettrodinamica proposta da Weber osservando:

“Esiste [...] una teoria dichiaratamente fisica dell'elettrodinamica, che è così elegante, così matematica [...] contenuta in Electrodynamic Measurements di M. W. Weber. [...] Da [i suoi] assiomi sono deducibili le leggi di Ampère dell'attrazione tra i conduttori, e quella di Neumann e altri, per l'induzione di correnti. Ecco allora una teoria realmente fisica, che soddisfa le condizioni richieste forse meglio di qualsiasi altra ancora inventata, ed è stata proposta da un ricercatore le cui ricerche sperimentali costituiscono un'ampia base per le sue indagini matematiche. A che serve allora immaginare uno stato elettrotonico di cui non abbiamo una concezione distintamente fisica, invece di una formula di attrazione che possiamo facilmente comprendere? Risponderei che è una buona cosa avere due modi di guardare un argomento e ammettere che ci sono due modi di guardarlo.”

Concludendo

“... non credo che al momento abbiamo alcun diritto di comprendere l'azione dell'elettricità, e ritengo che il merito principale di una teoria temporanea sia quello di guidare l'esperimento, senza impedire il progresso della vera teoria quando sarà sviluppata”

La teoria dei vortici molecolari

Durante gli anni che seguirono la scrittura della memoria *On Faraday's lines of force* Maxwell sviluppò la teoria cinetica dei gas e si occupò di vari problemi di ottica e di meccanica. Contemporaneamente meditava su come approfondire il tema dell'elettromagnetismo, consapevole che malgrado avesse stabilito una teoria formalmente coerente, mancava ancora un modello fisico per la descrizione dei fenomeni. Con tale obiettivo, assumendo una azione mediata da un mezzo, nella memoria *On physical lines of force*, pubblicata tra il 1861 e il 1862 ([31], p. 451), Maxwell rivolse l'attenzione a “*certi stati di tensione e di moto presenti in un mezzo, confrontandoli con i fenomeni elettrici e magnetici*”.

Nella prima parte della memoria ([31], p. 451), *The Theory of Molecular Vortices applied to Magnetic Phenomena*, nell'ottica dell'impiego delle analogie fisiche, Maxwell si propose di sviluppare delle “*illustrazioni meccaniche per aiutare l'immaginazione [nell'analizzare le condizioni] meccaniche di un mezzo sottoposto all'influenza magnetica*”. Nel 1857 Thomson aveva ipotizzato che la rotazione del piano di polarizzazione della luce indotta dall'azione di una elettrocalamita, osservata da Faraday nel 1845 fosse causata dall'accoppiamento tra le vibrazioni dell'etere luminoso e le rotazioni di vortici molecolari in un mezzo materiale, nel quale gli assi di rotazione dei vortici si allineano alla direzione delle linee di forza del campo magnetico [37]. Maxwell, che conosceva tale ipotesi, come risulta da una lettera inviata a Faraday nel 1857 ([30], p.548), fu indotto a descrivere il magnetismo attraverso un sistema di vortici molecolari. Maxwell postulò l'esistenza di un mezzo, nel quale, in presenza di un campo magnetico si creino ([31], p. 489)

“... innumerevoli vortici di materia in rotazione, i cui assi coincidono con la direzione

ne della forza magnetica in ogni punto del campo (Figura 3).”

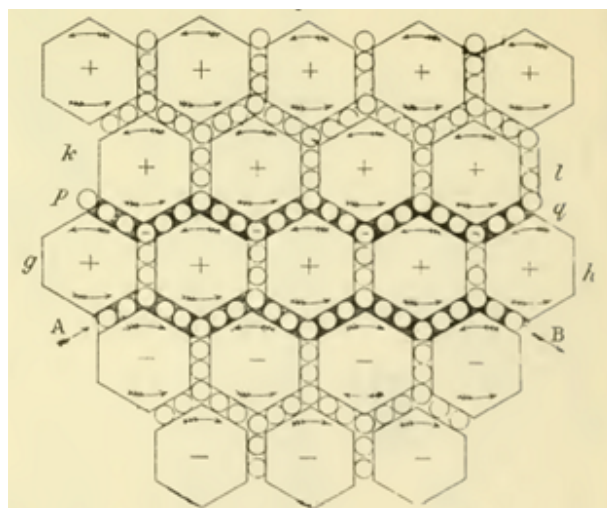


Figura 3: Modello meccanico di Maxwell per il campo elettromagnetico. La rotazione dei vortici esagonali rappresenta il campo magnetico, il cui corrispondente vettore risulta disposto perpendicolarmente al vortice ed orientato rispetto a questo secondo la regola della mano destra; le particelle sferiche comprese tra i vortici consentono a due vortici adiacenti di ruotare nella medesima direzione. ([31], p. 489).

La forza centrifuga determinata dalla rotazione provoca una pressione equatoriale dipendente dalla velocità di rotazione ed una tensione lungo le linee di forza, che indicheranno quindi la direzione di minima pressione nel mezzo. Faraday, già nel 1852, aveva proposto una descrizione qualitativa dei fenomeni magnetici ed elettromagnetici, ipotizzando un accorciamento longitudinale delle linee di forza e una repulsione reciproca laterale ([11], p. 402). Il modello presentava tuttavia due problemi: l'origine del moto dei vortici e la compatibilità del moto dei vortici disposti lungo una linea di forza col moto dei vortici situati lungo le linee di forza adiacenti. Maxwell identificò un'unica soluzione per entrambi i problemi. Per consentire che due vortici contigui ruotassero nello stesso senso e non in senso opposto come succede per due ruote che ingranano, inserì tra i vortici uno strato di particelle sferiche più piccole dei vortici. Tali particelle agirebbero come i cuscinetti a sfera o le “*ruote folli*” poste tra due ruote dentate che devono ruotare nella stessa direzione. Inoltre Maxwell assunse che la stessa materia dell'elettricità fosse costituita proprio da

tali particelle, per cui, in presenza di un campo elettrico tenderebbero a muoversi lungo i canali tra i vortici, costituendo in un conduttore una corrente elettrica, e sarebbe questo movimento ad originare il moto dei vortici. Naturalmente le correnti possono prodursi nei soli conduttori, perciò Maxwell propose un modo attraverso il quale il comportamento dei vortici sarebbe stato modificato in relazione al tipo di sostanza in cui si originano. In un isolante i vortici, o gruppi di vortici, manterrebbero adese le particelle in modo che queste possano ruotare senza traslare; in un conduttore le particelle potrebbero traslare con poco attrito, dando luogo ad una corrente. In generale, minore è la resistenza elettrica della sostanza, più liberamente le particelle possono muoversi. Una caratteristica essenziale delle particelle è che si mantengono in contatto coi vortici. Dove il campo magnetico è uniforme le particelle ruotano semplicemente, insieme ai vortici. Ma se le particelle in un conduttore traslassero senza ruotare, determinerebbero la rotazione dei vortici su entrambi i lati della corrente in direzioni opposte, cioè esattamente la condizione per creare un campo magnetico circolare attorno a un filo percorso da corrente. Maxwell formulò quest'ipotesi sul ruolo delle particelle poiché, studiando la cinematica dei vortici aveva ricavato la relazione (espressa in termini moderni) $\iota = \nabla \times \omega$ tra la densità di flusso delle particelle ι e la velocità angolare dei vortici ω , cogliendo la similitudine con "l'equazione [...] che fornisce la relazione tra la quantità di una corrente elettrica e l'intensità delle linee di forza che la circondano" ([31], p. 471), cioè la legge di Ampère $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$. Concludendo, come anticipato:

"Sembra quindi che, secondo la nostra ipotesi, una corrente elettrica sia rappresentata dal trasferimento delle particelle mobili interposte tra i vortici vicini. Possiamo immaginare che queste particelle siano molto piccole rispetto alla dimensione di un vortice, e che la massa di tutte le particelle insieme sia inapprezzabile rispetto a quella dei vortici, e che in una singola molecola del mezzo siano contenuti un gran numero di vortici, con le particelle che li circondano. Le particelle devono essere concepite per rotolare senza scivolare tra i vortici che separano, e per non toccarsi, in modo che, finché ri-

mangono all'interno della stessa molecola, non vi sia perdita di energia per resistenza. Quando, invece, c'è un trasferimento generale di particelle in una direzione, esse devono passare da una molecola all'altra, e così facendo possono incontrare resistenza, così da dissipare energia elettrica e generare calore."

Dopo questa analisi puramente cinematica dei moti nel mezzo ipotizzato, Maxwell ne esaminò la dinamica, considerando la circostanza in cui la velocità angolare dei vortici è soggetta ad una variazione. Tali cambiamenti sarebbero generati da forze tangenziali esercitate dalle particelle sulle superfici dei vortici, e queste sarebbero naturalmente accompagnate da forze di reazione inerziale esercitate dai vortici sulle stesse particelle. Da tale considerazione Maxwell dedusse la relazione tra la forza di reazione \mathbf{F} e la velocità angolare ω attraverso la densità del mezzo ρ_m :

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\pi \rho_m \frac{\partial \omega}{\partial t} ,$$

cogliendo l'analogia con "[...] la relazione tra le variazioni di stato del campo magnetico e le forze elettromotrici così messe in gioco", cioè la legge di Faraday dell'induzione:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ,$$

dove \mathbf{E} rappresenta la "forza elettromotrice [il campo elettrico] messa in gioco dalle variazioni [...] del campo magnetico [$\mu\mathbf{H}$]" ([31], p. 475); nella precedente memoria Maxwell aveva espresso tale campo attraverso la variazione dell'intensità elettrotonica, cioè il potenziale vettore. La corrispondenza tra la densità del mezzo e la permeabilità magnetica del materiale permetteva quindi attraverso questo modello di descrivere materiali con differenti caratteristiche magnetiche. Il modello proposto era anche in grado di giustificare il fenomeno della mutua induzione tra due circuiti, cioè il fenomeno secondo cui il passaggio di una corrente variabile attraverso un circuito induce un impulso di corrente in un circuito vicino ma separato. Allo scopo Maxwell disegnò uno schema del mezzo ipotizzato, rappresentando la sezione trasversale dei vortici utilizzando una forma esagonale (vedi la Figura 3 per il disegno

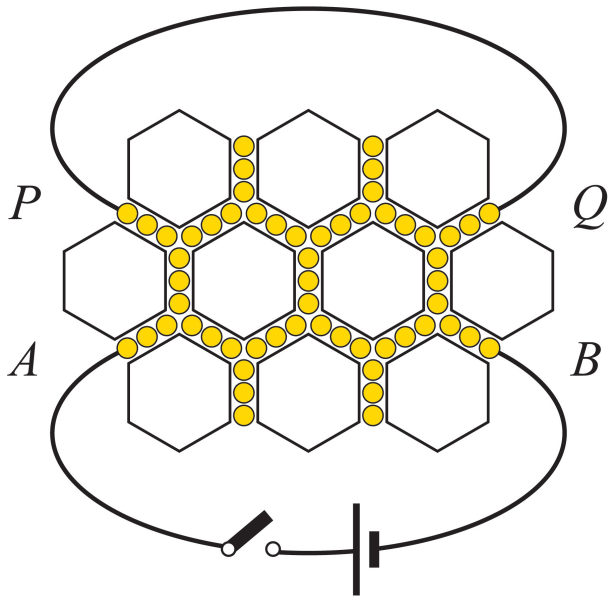


Figura 4: Il modello meccanico di Maxwell impiegato per la descrizione della mutua induzione tra due circuiti. Le particelle sferiche situate nei segmenti di conduttore compresi tra i punti A e B e tra i punti P e Q possono sia ruotare che traslare, tutte le altre possono solo ruotare. La traslazione rappresenta il flusso della corrente lungo i segmenti di conduttore considerati.

originale).

Il diagramma della Fig. 4 mostra una sezione trasversale di una piccola regione di spazio. Le particelle lungo il tratto AB sono in un filo conduttore che fa parte di un circuito che comprende una batteria e un interruttore, inizialmente aperto; quelle lungo PQ sono in un altro filo che fa parte di un circuito separato senza alcuna sorgente di forza elettromotrice. Le particelle lungo AB e PQ sono libere di muoversi perché situate all'interno di conduttori, ma le altre poste nelle vicinanze, essendo in un materiale non conduttore, possono solo ruotare nelle loro posizioni fisse. Nello schema, i percorsi AB e PQ sono evidentemente conduttori molto sottili e vicini tra loro, ma questo serve solo a mantenere compatto il diagramma; il ragionamento proposto da Maxwell si applicherebbe altrettanto bene a conduttori di dimensioni normali e normalmente distanziati contenenti molte file di vortici e di particelle. Supponiamo che il campo magnetico sia inizialmente zero e l'interruttore aperto, in modo che sia i vortici che le particelle risultino a riposo.

Alla chiusura dell'interruttore, le particelle

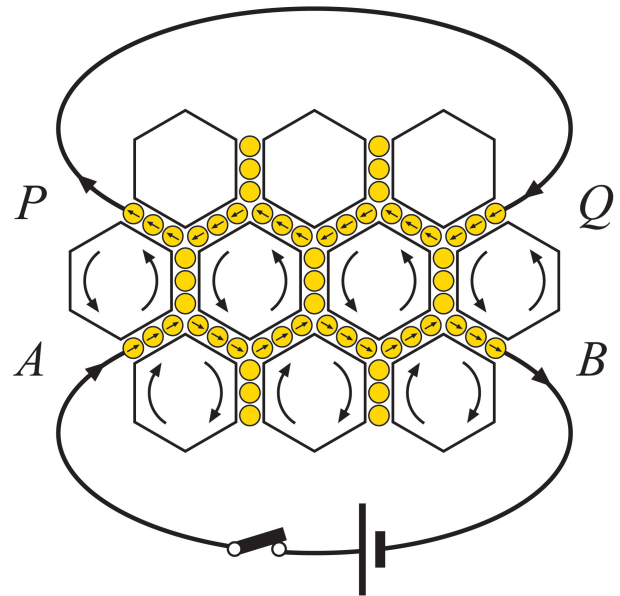


Figura 5: Alla chiusura dell'interruttore, le particelle del segmento AB del circuito inducente ruotano e traslano, determinando la rotazione in senso opposto dei vortici situati al di sotto e al di sopra di tale tratto, rappresentando la formazione di un campo magnetico intorno al filo le cui linee di forza sono degli anelli circolari. In particolare, il moto dei vortici al di sopra del tratto AB determina la rotazione e la traslazione delle particelle del segmento PQ , ovvero il passaggio di corrente nel circuito indotto.

lungo il percorso AB si spostano da sinistra a destra senza ruotare. Ciò fa sì che le file di vortici disposti su entrambi i lati del tratto AB ruotino in direzioni opposte, creando così un campo magnetico circolare attorno al filo. Le particelle situate lungo il tratto PQ sono ora comprese tra i vortici rotanti del lato AB e quelli fissi sull'altro, quindi iniziano a ruotare (in senso orario) e anche a muoversi da destra a sinistra, nella direzione opposta rispetto a quelle in AB (vedi Figure 5 e 6).

Il circuito contenente il conduttore nel percorso PQ presenta, in generale, una certa resistenza, quindi le particelle disposte lungo tale tratto, rallenteranno dopo il loro picco iniziale di velocità, facendo sì che i vortici situati sopra PQ inizino a ruotare in senso antiorario. Quindi il movimento delle particelle progressivamente si arresterà, sebbene continueranno a ruotare. A questo punto i vortici posti sopra il tratto PQ ruoteranno alla stessa velocità di quelli situati al di sotto di tale tratto.

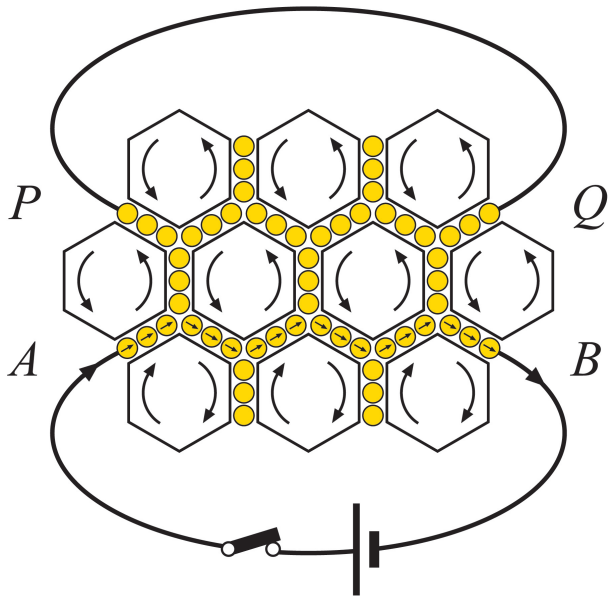


Figura 6: La resistenza propria del circuito indotto rallenta la traslazione delle particelle del tratto di conduttore PQ che progressivamente si arresteranno, continuando tuttavia a ruotare ed estendendo il campo magnetico anche alle regioni del circuito indotto.

Quando l'interruttore viene riaperto, (Figura 7), scollegando la batteria, le particelle lungo il tratto AB smettono di muoversi ed i vortici posti su entrambi i lati di AB smetteranno di ruotare. Le particelle lungo il tratto PQ sono ora comprese tra le i vortici fissi sul lato AB e quelli rotanti sull'altro, quindi inizieranno a muoversi da sinistra a destra, nella stessa direzione della corrente AB originale. Tuttavia, la resistenza del circuito contenente PQ fa rallentare le particelle fino a determinarne il completo arresto ed il ritorno alla condizione iniziale di quiete.

La corrente di spostamento

A dispetto da come viene generalmente insegnato, la corrente di spostamento non fu introdotta da Maxwell perché aveva percepito un'incoerenza matematica nelle equazioni del campo, delle quali effettivamente disponeva una formulazione già all'inizio degli anni Sessanta del XIX secolo. In particolare, la relazione differenziale parziale che lega la corrente di conduzione alla forza magnetica, cioè la legge di Ampère, implica che tutte le correnti di quel tipo siano chiuse, cosa che ovviamente non si verifica in generale. Si sarebbe

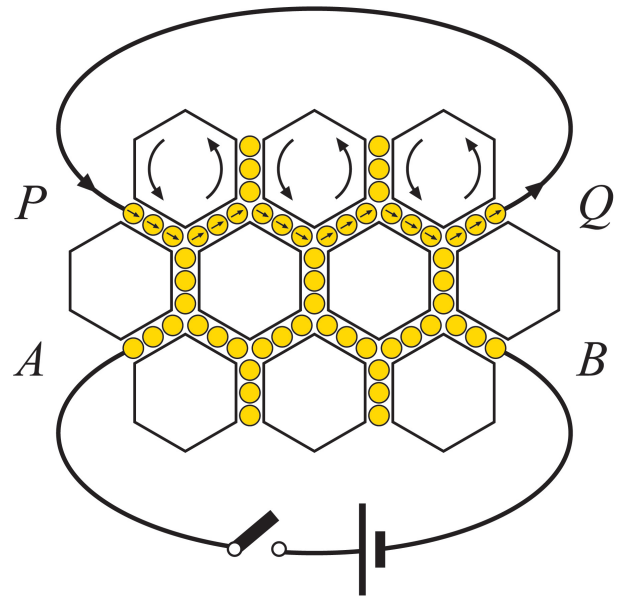


Figura 7: Alla riapertura dell'interruttore si arresta istantaneamente la traslazione delle particelle del segmento di conduttore AB e di conseguenza si interrompe la rotazione dei vortici posti al di sopra e al di sotto di tale tratto. Le particelle del segmento PQ comprese tra i vortici inferiori in quiete e quelli superiori in rotazione sono indotte a traslare oltre che a ruotare, determinando la formazione di una corrente nel corrispondente circuito. Per effetto della resistenza di tale circuito, la corrente tenderà progressivamente ad annullarsi.

potuto risolvere tale problema inserendo nella legge di Ampère un termine aggiuntivo rispetto alla corrente di conduzione che consistesse nel tasso di variazione in funzione del tempo della quantità elettrica: ciò equivale ad aggiungere la corrente di spostamento a quella di conduzione. Maxwell, tuttavia, pervenne alla nozione di corrente di spostamento non tanto attraverso la matematica o a più ampie concezioni della teoria di campo, quanto grazie ad una generalizzazione del suo modello dei vortici.

Alcuni mesi dopo la pubblicazione delle prime due parti della memoria *On physical lines of force* che comprendevano la teoria dei vortici molecolari, Maxwell capì che assumendo che i vortici fossero elastici poteva stabilire una connessione tra l'elettrodinamica e l'elettrostatica. Il punto di partenza fu costituito dal modello della polarizzazione dielettrica. Rifacendosi allo schema proposto da Mossotti e da Faraday [38], Maxwell assunse che ([31], p. 491)

“La forza elettromotrice che agisce su un dielettrico produce uno stato di polarizzazione delle sue parti simile per distribuzione alla polarità delle particelle di ferro sotto l’influenza di un magnete e, come la polarizzazione magnetica, descrivibile come uno stato in cui ogni particella ha i suoi poli in condizioni opposte. In un dielettrico sotto induzione, possiamo concepire che l’elettricità in ciascuna molecola sia spostata in modo tale che un lato sia reso elettricamente positivo e l’altro negativo, ma che l’elettricità rimanga interamente connessa con la molecola e non passi da una molecola all’altra. L’effetto di questa azione sull’intera massa dielettrica è quello di produrre uno spostamento generale dell’elettricità in una certa direzione. Questo spostamento non equivale a una corrente, perché quando ha raggiunto un certo valore rimane costante, ma è l’inizio di una corrente, e le sue variazioni costituiscono correnti in direzione positiva o negativa, a seconda che lo spostamento sia crescente o decrescente.”

Maxwell inoltre, rispetto a questa interpretazione, aggiunse

“Un corpo conduttore può essere paragonato ad una membrana porosa che oppone più o meno resistenza al passaggio di un fluido, mentre un dielettrico è come una membrana elastica che può essere impermeabile al fluido, ma in grado di trasmettere la pressione del fluido da una parte all’altra.”

Nell’ottica della rappresentazione del fenomeno come quello *“di un corpo elastico sottoposto ad una pressione che recupera la sua forma quando la pressione viene rimossa”* ([31], p. 492), Maxwell formalizzò la relazione di proporzionalità tra lo spostamento h in una direzione e la forza elettromotrice R lungo tale direzione attraverso la relazione

$$R = -4\pi E^2 h ,$$

in cui E è un coefficiente dipendente dalla natura del dielettrico e indicò la corrente r dovuta a tale spostamento come:

$$r = \frac{dh}{dt} .$$

In termini moderni scriveremmo lo spostamento come $D = -\epsilon R$. Il segno meno era ispirato dal carattere elastico attribuito alla polarizzazione elettrica, dal momento che nei corpi materiali sollecitati da una causa si sviluppa una forza elastica uguale e contraria alla forza deformante. Successivamente Maxwell comprese che il modello delle forze elastiche era errato e rimosse tale segno. Riconoscendo che tale quantità fosse una corrente a tutti gli effetti ritenne di dover *“correggere [la legge di Ampère] per l’effetto dovuto all’elasticità del mezzo”* ([31], p. 496). Differenziando, rispetto al tempo, la precedente relazione si trova

$$\frac{dR}{dt} = -4\pi E^2 \frac{dh}{dt} ,$$

“dimostrando che al variare della forza elettromotrice varia anche lo spostamento elettrico. Ma una variazione di spostamento equivale a una corrente, e questa corrente deve essere presa in considerazione [nella legge di Ampère] e aggiunta:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} - \frac{1}{E^2} \frac{dP}{dt} \right) \\ q &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} - \frac{1}{E^2} \frac{dQ}{dt} \right) \\ r &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} - \frac{1}{E^2} \frac{dR}{dt} \right) \end{aligned}$$

dove p, q, r sono le correnti elettriche nelle direzioni x, y e z ; α, β, γ sono le componenti dell’intensità magnetica, e P, Q, R sono le forze elettromotrici”. In termini moderni $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$.

Utilizzando il concetto di spostamento e quello dell’energia associata al campo, Maxwell fu in grado di dedurre ([31], p. 497) l’espressione della forza esercitata tra due cariche puntiformi. In pratica dopo aver espresso l’energia elettrostatica come

$$U = -\frac{1}{2} \sum (Pf + Qg + Rh) \delta V ,$$

“dove P, Q, R sono le forze e f, g, h gli spostamenti”, equivalente all’espressione

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d^3r ,$$

adoperando il procedimento inverso a quello che viene generalmente seguito nei testi moderni per determinare l’energia elettrostatica in un mez-

zo materiale, giunse a ricavare la legge di Coulomb per due cariche elettriche e_1 e e_2 poste alla distanza relativa r :

$$\mathbf{F} = E^2 \frac{e_1 e_2}{r^2} .$$

Prodromi della teoria elettromagnetica della luce

L'idea dell'elasticità del mezzo, oltre ad aver aperto la strada al concetto di corrente di spostamento, costituì la premessa per la teoria elettromagnetica della luce. Ai tempi di Maxwell la propagazione delle onde luminose era ricondotta alla propagazione di vibrazioni meccaniche attraverso un mezzo di tipo elastico. Nel 1826 Fresnel aveva introdotto [39] il modello di un etere elastico e particellare tale da consentire il trasporto delle onde luminose nello spazio attraverso delle onde trasversali. In questo modello la velocità della luce V è calcolata in funzione del modulo di elasticità m e della densità ρ del mezzo che le trasmette, cioè dell'etere, mediante la relazione

$$V = \sqrt{\frac{m}{\rho}} .$$

Maxwell aveva stabilito nel suo modello la corrispondenza tra la densità ρ del mezzo costituente i vortici ed il coefficiente di induzione magnetica μ attraverso la relazione:

$$\mu = \pi \rho ,$$

e la corrispondenza tra la costante E che compare nell'espressione della legge di Coulomb ed il modulo di elasticità del mezzo m con la relazione

$$E^2 = \pi m .$$

Così, sostituendo nella relazione precedente, si ottiene:

$$V = \sqrt{\frac{E^2}{\mu}} ,$$

da cui Maxwell dedusse³

$$V = 310,740,000,000 \frac{\text{mm}}{\text{s}} = 3.1074 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Nel 1851 Hippolyte Fizeau aveva misurato la velocità della luce nell'aria [40] trovando per tale grandezza

$$V = 310,858,000,000 \frac{\text{mm}}{\text{s}} ,$$

cioè un valore superiore di poco più dell'1% rispetto a quello stabilito da Maxwell. Da tale coincidenza, Maxwell concluse

“La velocità delle oscillazioni trasversali nel nostro ipotetico mezzo, calcolata dagli esperimenti elettromagnetici di MM. Kohlrausch e Weber, concorda così esattamente con la velocità della luce calcolata dagli esperimenti ottici di M. Fizeau, che difficilmente possiamo esimerci dall'inferire che la luce consiste nelle ondulazioni trasversali dello stesso mezzo che è la causa dei fenomeni elettrici e magnetici”.

Maxwell cita la determinazione fatta da R.H. Kohlrausch e Weber [41] mediante il rapporto tra la carica elettrica in unità di misura elettrostatiche q_{es} e di una stessa quantità di elettricità misurata in unità elettromagnetiche q_{em} . In una memoria del 1868 [42] Maxwell spiega questo approccio non ottico alla misura della velocità della luce:

“Esistono due metodi distinti e indipendenti per misurare le grandezze elettriche con riferimento agli standard di lunghezza, tempo e massa. Il metodo elettrostatico si fonda sulle attrazioni e repulsioni tra corpi elettrizzati separati da un mezzo dielettrico fluido, come l'aria; e le unità elettriche sono determinate in modo che la repulsione tra due piccoli corpi elettrizzati a considerevole distanza possa essere rappresentata numericamente dal prodotto delle quantità

³Poiché nel Sistema Internazionale il coefficiente di induzione magnetica corrisponde a $\mu'/4\pi$ e E^2 corrisponde a $1/(4\pi\epsilon)$, dove μ' ed ϵ rappresentano rispettivamente la permeabilità magnetica e la costante dielettrica del mezzo considerato, sostituendo nell'espressione della velocità di propagazione V del mezzo elastico si ottiene $1/\sqrt{\mu'\epsilon}$.

di elettricità, diviso per il quadrato della distanza. Il metodo elettromagnetico si fonda sulle attrazioni e sulle repulsioni osservate tra conduttori percorsi da correnti elettriche e separati dall'aria; e le unità elettriche sono determinate in modo che se due conduttori rettilinei tra loro uguali sono posti parallelamente uno all'altro, e ad una distanza molto piccola rispetto alla loro lunghezza, l'attrazione che si esercita tra loro può essere rappresentata numericamente dal prodotto delle correnti e della somma delle lunghezze dei conduttori e diviso per la distanza tra i conduttori stessi. Questi due metodi portano a due diverse unità di misura della quantità di elettricità. Il rapporto tra le due unità è una grandezza fisica importante, che ci proponiamo di misurare. Consideriamo la relazione di queste unità con quelle di spazio, tempo e forza (quella della forza è una funzione di spazio, tempo e massa)."

In unità elettrostatiche l'intensità della forza che si esplica tra due uguali cariche puntiformi q_{es} poste alla distanza r vale

$$|\mathbf{F}| = \frac{q_{es}^2}{r^2},$$

da tale relazione è possibile dedurre l'unità di misura della carica q_{es} :

$$[q_{es}] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}.$$

Come legge fondamentale che definisce le cariche elettromagnetiche è possibile adoperare l'espressione della forza che si esplica tra due conduttori rettilinei paralleli situati a distanza r e percorsi dalla stessa corrente i , il cui modulo è:

$$|\mathbf{F}| = \frac{i^2}{2r} = \frac{1}{2r} \left(\frac{d q_{em}}{dt} \right)^2,$$

da cui si deduce per la carica q_{em} le dimensioni:

$$[q_{em}] = L^{1/2} M^{1/2}.$$

La dimensione del rapporto tra le cariche dedotte da queste due relazioni è $L T^{-1}$, cioè

"Il rapporto tra l'unità elettromagnetica e l'unità elettrostatica è quindi quello tra una certa distanza e un certo tempo, o, in al-

tre parole, questo rapporto è una velocità; e questa velocità sarà della stessa grandezza assoluta, qualunque standard di lunghezza, tempo e massa adottiamo."

Maxwell aggiunge:

"È evidente l'importanza della determinazione di questo rapporto in tutti i casi in cui si combinano azioni elettrostatiche ed elettromagnetiche.

Tali casi si verificano nel funzionamento ordinario di tutti i cavi telegrafici sottomarini, nelle bobine di induzione e in molti altri dispositivi artificiali.

Ma la conoscenza di questo rapporto è, credo, di importanza scientifica ancora maggiore se consideriamo che la velocità di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche attraverso un mezzo dielettrico dipende da questo rapporto e, secondo i miei calcoli, è espressa dallo stesso numero."

Le equazioni del campo elettromagnetico

Maxwell era ben consapevole del fatto che la teoria proposta nel suo articolo *On physical lines of force* conteneva aspetti problematici e la considerava solo un'ipotesi provvisoria e temporanea. La base meccanica delle sue intuizioni poteva essere fraintesa, o addirittura ridicolizzata, sebbene lo avesse avviato verso la teoria definitiva del campo elettromagnetico. Si accinse quindi a riformulare la teoria su una base molto più astratta, senza particolari assunzioni circa la natura del mezzo attraverso il quale si propagano i fenomeni elettromagnetici. Così nel 1865 ([31], p. 526) pubblicò una estesa memoria intitolata *A dynamical theory of the electromagnetic field*. Nell'introduzione Maxwell spiega gli obiettivi della memoria ([31], p. 527):

"La teoria che propongo può essere chiamata teoria del Campo Elettromagnetico, perché ha a che fare con lo spazio in prossimità dei corpi elettrici o magnetici, e può essere chiamata Teoria Dinamica, perché presuppone che in quello spazio ci sia materia in movimento, dalla quale si producono i fenomeni elettromagnetici osservati. Il campo

elettromagnetico è quella parte dello spazio che contiene e circonda corpi in condizioni elettriche o magnetiche.”

Nella trattazione non si fanno ipotesi sui moti e non si specificano le tensioni del mezzo, cioè non si propone alcun modello meccanico. Infatti, riferendosi alla memoria *On physical lines of force*, Maxwell scrive:

“In una precedente occasione ho tentato di descrivere un particolare tipo di movimento e un particolare tipo di tensione, disposti in modo tale da spiegare i fenomeni. Nel presente scritto evito qualsiasi ipotesi di questo genere; e nell’usare parole come momento elettrico ed elasticità elettrica in riferimento ai fenomeni noti dell’induzione di correnti e della polarizzazione dei dielettrici, desidero semplicemente dirigere la mente del lettore verso fenomeni meccanici che lo aiuteranno a comprendere quelli elettrici. Tutte queste frasi nel presente documento devono essere considerate illustrative, non esplicative.”

Nella parte introduttoria della memoria Maxwell elenca le equazioni del campo elettromagnetico che si appresta ad introdurre ([31], p. 534):

“Per portare questi risultati nel potere del calcolo simbolico, li esprimo nella forma di Equazioni Generali del Campo Elettromagnetico. Queste equazioni sono:

A. La relazione tra lo spostamento elettrico, la vera [corrente di] conduzione e la corrente totale, composta da entrambe.

B. La relazione tra le linee di forza magnetica e i coefficienti induttivi di un circuito, come già dedotto dalle leggi dell’induzione.

C. La relazione tra l’intensità di una corrente e i suoi effetti magnetici, secondo il sistema di misura elettromagnetico.

D. Il valore della forza elettromotrice in un corpo, come derivante dal moto del corpo nel campo, dalla variazione del campo stesso e dalla variazione del potenziale elettrico da una parte all’altra del campo.

E. La relazione tra lo spostamento elettrico e la forza elettromotrice che lo produce.

F. La relazione tra una corrente elettrica e la forza elettromotrice che la produce.

G. La relazione tra la quantità di elettricità libera in ogni punto e gli spostamenti elettrici nell’intorno.

H. La relazione tra l’aumento o la diminuzione dell’elettricità libera e le correnti elettriche nell’intorno.

Ci sono venti di queste equazioni in tutto, che coinvolgono venti quantità variabili.”

(Maxwell intende per forza elettrica il campo elettrico).

Nella terza parte della memoria ([31], p. 561) Maxwell scrive le equazioni del campo elettromagnetico specificando il significato delle variabili adoperate. I simboli usati da Maxwell sono confrontati con la notazione moderna nel riquadro.

Maxwell premette ([31], p. 554)

“Assumiamo tre direzioni rettangolari nello spazio come assi di x , y e z , ed assumiamo che tutte le quantità aventi direzione siano espresse attraverso le loro componenti in queste tre direzioni.”

Quindi elenca le equazioni del campo elettromagnetico.

La corrente elettrica

Per corrente elettrica Maxwell intende il vettore densità di corrente \mathbf{J} :

“Una corrente elettrica consiste nella trasmissione di elettricità da una parte all’altra di un corpo. Sia p la quantità di elettricità trasmessa nell’unità di tempo attraverso l’unità di area perpendicolare all’asse di x , quindi p è la componente della corrente in quel punto nella direzione di x .

Useremo le lettere p , q , r per indicare le componenti della corrente per unità di area nelle direzioni di x , y , z .”

Lo spostamento elettrico

Simboli usati nelle equazioni di Maxwell

Nome e simbolo secondo Maxwell	F G H	Nome e simbolo attuali	
Momento Elettromagnetico	F G H	Potenziale vettore	\mathbf{A}
Intensità Magnetica	α β γ	Campo magnetico	\mathbf{H}
Forza Elettromotrice	P Q R	Campo elettrico	\mathbf{E}
Corrente dovuta alla conduzione	p q r	Densità di corrente	\mathbf{J}
Spostamento Elettrico	f g h	Vettore spostamento	\mathbf{D}
Corrente totale (inclusa quella dovuta alla variazione dello spostamento)	p' q' r'	Densità di corrente totale	\mathbf{J}_{tot}
Quantità di elettricità libera	e	Densità di carica	ρ
Potenziale Elettrico	Ψ	Potenziale scalare	V

Maxwell ripropone il concetto di vettore spostamento come introdotto nella memoria *On physical lines of force*:

“Lo spostamento elettrico consiste nell’elettrificazione opposta dei lati di una molecola o particella di un corpo che può o meno essere accompagnata dalla trasmissione attraverso il corpo. Sia $f \cdot dy \cdot dz$ la quantità di elettricità che apparirebbe sulle facce di un elemento dx , dy , dz , tagliato dal corpo, allora f è la componente dello spostamento elettrico parallelo a x . Indicheremo con f , g , h gli spostamenti elettrici paralleli rispettivamente a x , y , z .”

L’espressione $f \cdot dy \cdot dz$ corrisponde alla relazione $\mathbf{D} = \sigma \hat{\mathbf{n}}$ che correla il vettore spostamento con la densità superficiale della carica libera σ . Quindi Maxwell specifica il ruolo da attribuire alle variazioni dello spostamento elettrico:

“Le variazioni dello spostamento elettrico devono essere aggiunte alle correnti per ottenere il moto totale dell’elettricità, che possiamo chiamare p' , q' , r' , così che [la densità totale di corrente si esprime come]”

$$\begin{aligned} p' &= p + \frac{df}{dt} \\ q' &= q + \frac{dg}{dt} \\ r' &= r + \frac{dh}{dt} \end{aligned} ,$$

che comprende sia la corrente di conduzione (p, q, r) che la corrente di spostamen-

to ($df/dt, dg/dt, dh/dt$). Usando la moderna simbologia, questa equazione si scrive:

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} .$$

La forza elettromotrice

Per forza elettromotrice Maxwell intende il campo elettrico \mathbf{E} definito come segue:

“Siano P , Q , R le componenti della forza elettromotrice in ogni punto. Allora P rappresenta la differenza di potenziale per unità di lunghezza in un conduttore posto nella direzione di x nel punto dato. Possiamo supporre un filo indefinitamente corto posto parallelamente a x in un dato punto e toccato, durante l’azione della forza P , da due piccoli conduttori, che vengono poi isolati e sottratti all’influenza della forza elettromotrice. Il valore di P potrebbe quindi essere accertato misurando la carica dei conduttori.”

Il momento elettromagnetico

In questa memoria Maxwell chiama “momento elettromagnetico” il potenziale vettore

“Siano F , G , H le componenti del momento elettromagnetico in un punto generico, dovuto ad un qualsiasi sistema di magneti o correnti.

Allora F è l’impulso totale della forza elettromotrice nella direzione x che verrebbe generato dalla rimozione di questi magneti o correnti dal campo, cioè se P è la forza

elettromotrice in qualsiasi istante durante la rimozione del sistema risulta

$$F = \int P dt$$

Quindi la parte della forza elettromotrice che dipende dal moto dei magneti o delle correnti nel campo, o dalla loro variazione di intensità, è

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt} \quad .''$$

In termini moderni il campo elettrodinamico si esprime attraverso il potenziale vettore come:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} .$$

Nella definizione generale del campo elettrico Maxwell integrerà questa espressione col termine elettrostatico. Riprendendo la prima delle leggi enunciate nella memoria *On physical lines of force*, Maxwell aggiunge

“Sia s la lunghezza del circuito, se integriamo attorno al circuito:

$$\int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds ,$$

si otterrà il momento elettromagnetico totale del circuito, ovvero il numero di linee di forza magnetiche che lo attraversano, le cui variazioni misurano la forza elettromotrice totale nel circuito [cioè il flusso di \mathbf{B}]. Questo momento elettromagnetico è la stessa cosa a cui il professor Faraday ha attribuito il nome di Stato Elettronico.

Se il circuito è il contorno dell'area elementare $dy dz$, il suo momento elettromagnetico è

$$\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) dy dz$$

e questo è il numero di linee di forza magnetica che attraversano l'area elementare $dy dz$.”

Infatti, in termini moderni

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \phi(\mathbf{B})$$

La forza magnetica, il coefficiente di induzione magnetica

“Siano α, β, γ [le componenti de] la forza che agisce su un polo magnetico unitario posto nel punto x, y, z .

Sia μ il rapporto tra l'induzione magnetica in un dato mezzo e quella nell'aria sotto una forza magnetizzante uguale, allora il numero di linee di forza nell'unità di area perpendicolare a x sarà $\mu\alpha$ (μ è una quantità che dipende dalla natura del mezzo, dalla sua temperatura, dalla quantità di magnetizzazione già prodotta, e nei corpi cristallini varia con la direzione).

Esprimendo in questa notazione il momento elettrico di piccoli circuiti perpendicolari ai tre assi, si ottiene la seguente:

$$\begin{aligned} \mu\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \quad .'' \end{aligned}$$

Ovvero, in termini moderni $\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ e definendo $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} .$$

Equazioni delle correnti

La legge di Ampère è formalmente espressa come nella memoria *On Faraday's lines of force*, con la fondamentale differenza che la densità di corrente è quella totale che include anche la corrente di spostamento:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= 4\pi p' \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi q' \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi r' , \end{aligned}$$

ovvero,

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{J}_{\text{tot}}$$

Forza elettromotrice in un circuito

Maxwell distingue due casi, quello in cui il circuito soggetto all'induzione è in quiete e quello in cui è posto in movimento.

Nel primo caso scrive

$$\begin{aligned} P &= -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q &= -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R &= -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} . \end{aligned}$$

Aggiungendo

“dove ψ è una funzione di x, y, z e t , che è indeterminata per quanto riguarda la soluzione delle equazioni di cui sopra, perché i termini dipendenti da essa scompariranno integrando attorno al circuito. La quantità ψ può sempre, comunque, essere determinata in ogni caso particolare quando conosciamo le effettive condizioni del problema. L'interpretazione fisica di ψ è che rappresenta il potenziale elettrico in ogni punto dello spazio.”

Ciò in quanto la circuitazione di \mathbf{E} può esprimersi attraverso $\nabla \times \mathbf{E}$ che non dipende dalla funzione ψ . In termini moderni:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \psi$$

Nel secondo caso, quello in cui il circuito soggetto all'induzione è in movimento, Maxwell scrive l'espressione del campo elettrico come

$$\begin{aligned} P &= \mu \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q &= \mu \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R &= \mu \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} , \end{aligned}$$

e descrive tali equazioni come:

“Il primo termine a destra di ciascuna equazione rappresenta la forza elettromotrice derivante dal moto del conduttore stesso. Questa forza elettromotrice è perpendicolare alla direzione del moto e alle linee di forza magnetica; e se si disegna un parallelogramma i cui lati rappresentano in direzione e grandezza la velocità del conduttore e l'induzione magnetica in quel punto del campo, allora l'area del parallelogramma rappresenterà la forza elettromotrice dovuta al moto

del conduttore, e la direzione della forza è perpendicolare al piano del parallelogramma.

Il secondo termine in ciascuna equazione indica l'effetto dei cambiamenti nella posizione o nella forza dei magneti o delle correnti nel campo.

Il terzo termine mostra l'effetto del potenziale elettrico. Non ha alcun effetto nel provocare una corrente circolante in un circuito chiuso. Indica l'esistenza di una forza che spinge l'elettricità verso o da certi punti definiti nel campo.”

In termini moderni questa equazione diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{v} \times (\mu \mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \psi \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \psi \end{aligned}$$

Elasticità elettrica

Sono le equazioni che esprimono il legame tra il campo elettrico ed il vettore spostamento, Maxwell scrive:

“Quando una forza elettromotrice agisce su un dielettrico, pone ogni parte del dielettrico in una condizione polarizzata, in cui i suoi lati opposti sono elettrizzati in modo opposto. L'entità di questa elettrificazione dipende dalla forza elettromotrice e dalla natura della sostanza e, nei solidi aventi una struttura definita da assi, dalla direzione della forza elettromotrice rispetto a questi assi. Nelle sostanze isotrope, se k è il rapporto tra la forza elettromotrice e lo spostamento elettrico, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P &= k f \\ Q &= k g \\ R &= k h , \end{aligned}$$

e in termini moderni:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} ,$$

il segno meno inserito nella precedente memoria ora è stato ommesso.

Equazione dell'elettricità libera

Rappresenta la legge di Gauss per il vettore spostamento, Maxwell premette:

“Sia e la quantità di elettricità positiva libera contenuta in unità di volume in una qualsiasi parte del campo, allora, poiché questa nasce dall’elettrificazione delle diverse parti del campo che non si neutralizzano a vicenda, possiamo scrivere:

$$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0 \text{ , ”}$$

ovvero, se espressa in termini moderni:

$$\rho + \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \text{ .}$$

Successivamente Maxwell scriverà tale legge nella forma a noi consueta

Equazioni della resistenza elettrica

Rappresentano la legge di Ohm in forma puntuale. Maxwell scrive:

“Quando una forza elettromotrice agisce su un conduttore, produce attraverso di esso una corrente elettrica. Questo effetto si aggiunge allo spostamento elettrico già considerato. Nei solidi di struttura complessa, la relazione tra la forza elettromotrice e la corrente dipende dalla loro direzione attraverso il solido. Nelle sostanze isotrope, le sole che qui considereremo, se ρ è la resistenza specifica riferita all’unità di volume, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P &= -\rho p \\ Q &= -\rho q \\ R &= -\rho r \text{ .”} \end{aligned}$$

In termini moderni si esprime come

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \text{ .}$$

Maxwell si vede costretto a introdurre questo segno nella legge di Ohm perché altrimenti, avendo assunto $\nabla \cdot \mathbf{D} = -\rho$, la densità di corrente totale \mathbf{J}_{tot} non risulterebbe solenoidale.

Equazione di continuità

Rappresenta l’equazione di continuità della carica e ne formalizza la sua conservazione. Maxwell scrive:

“Se il mezzo conduce elettricità, allora avremo un’altra condizione, che può essere chiamata, come in idrodinamica, equazione di continuità”

$$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0 \text{ .”}$$

In termini moderni:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \text{ .}$$

Energia del campo elettromagnetico

Infine Maxwell scrive l’espressione dell’energia associata al campo elettromagnetico:

$$\begin{aligned} E &= \sum \left\{ \frac{1}{8\pi} (\alpha\mu\alpha + \beta\mu\beta + \gamma\mu\gamma) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (Pf + Qg + Rh) \right\} dV \end{aligned}$$

specificando:

“Il primo termine di questa espressione dipende dalla magnetizzazione del campo, ed è spiegato nella teoria proposta da un movimento effettivo di qualche tipo. Il secondo termine dipende dalla polarizzazione elettrica del campo, ed è spiegato nella teoria proposta da deformazioni di qualche tipo in un mezzo elastico.”

In termini moderni, tale relazione si esprime come

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) d^3 r \text{ .}$$

Inoltre Maxwell puntualizza la sua opinione sul concetto di energia associata ai fenomeni elettrici e magnetici:

“Nel parlare dell’Energia del campo, tuttavia, desidero essere inteso alla lettera. Tutta l’energia è uguale all’energia meccanica, sia che esista sotto forma di movimento o di elasticità, o in qualsiasi altra forma. L’energia nei fenomeni elettromagnetici è energia meccanica. L’unica domanda è: dove risiede? Nelle vecchie teorie risiede nei corpi elettrizzati, nei circuiti conduttori e nei magneti, sotto forma di una qualità sconosciuta chiamata energia potenziale, ovvero il potere di produrre certi effetti a distanza.

Secondo la teoria proposta risiede nel campo elettromagnetico, nello spazio che circonda i corpi elettrificati e magnetici, nonché in quei corpi stessi, ed è in due forme diverse, che possono essere descritte senza ipotesi come polarizzazione magnetica e polarizzazione elettrica, oppure, secondo un'ipotesi molto probabile, come il moto e la tensione di uno stesso mezzo."

Comunque, scrive Maxwell, le equazioni ottenute risultano indipendenti da tali ipotesi siccome sono dedotte da fatti sperimentali, quali

"L'induzione di correnti elettriche mediante l'aumento o la diminuzione delle correnti vicine in relazione alle variazioni delle linee di forza che passano attraverso il circuito. La distribuzione dell'intensità magnetica relativa alle variazioni di un potenziale magnetico. L'induzione (o influenza) dell'elettricità statica attraverso i dielettrici."

La teoria elettromagnetica della luce

La teoria elettromagnetica della luce, che in *On physical lines of force* è solo abbozzata, nella memoria *A dynamical theory of the electromagnetic field*, viene completamente formalizzata. Adoperando le sue equazioni, Maxwell deduce un insieme di relazioni che mostrano come le componenti del campo magnetico soddisfino l'equazione delle onde [43]:

"All'inizio di questo lavoro ci siamo serviti dell'ipotesi ottica di un mezzo elastico attraverso il quale si propagano le vibrazioni della luce, per mostrare che abbiamo validi motivi per cercare, nello stesso mezzo, la causa anche di altri fenomeni come quelli della luce. Abbiamo quindi esaminato i fenomeni elettromagnetici, cercandone la spiegazione nelle proprietà del campo che circonda i corpi elettrizzati o magnetici. In questo modo siamo arrivati a delle equazioni che esprimono certe proprietà del campo elettromagnetico. Procediamo ora ad indagare se queste proprietà di ciò che costituisce il campo elettromagnetico, dedotte dai soli

fenomeni elettromagnetici, siano sufficienti a spiegare la propagazione della luce."
([31], p. 577)

L'insieme di equazioni che Maxwell ricava è:

$$\begin{aligned} k\nabla^2\mu\alpha &= 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\alpha \\ k\nabla^2\mu\beta &= 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\beta \\ k\nabla^2\mu\gamma &= 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\gamma, \end{aligned}$$

dove, con ∇^2 rappresenta l'operatore di Laplace. Maxwell riconosce l'equazione di D'Alembert per ciascuna componente del campo magnetico e ne valuta la velocità dell'onda descritta:

$$V = \pm\sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}},$$

concludendo:

"Quest'onda consiste interamente di disturbi magnetici, la direzione della magnetizzazione essendo nel piano dell'onda. Nessun disturbo magnetico la cui direzione di magnetizzazione non è nel piano dell'onda può essere propagato come un'onda piana. Quindi le perturbazioni magnetiche propagate attraverso il campo elettromagnetico concordano con la luce in questo, che la perturbazione in ogni punto è trasversale alla direzione di propagazione, e tali onde possono avere tutte le proprietà della luce polarizzata."

Dopo aver confrontato le determinazioni di Weber e Kohlrausch con la misura di Fizeau e la misura di Jean Bernard Léon Foucault [44], Maxwell conclude

"Quindi la velocità della luce dedotta dall'esperimento concorda sufficientemente bene con il valore di V dedotto dall'unico insieme di esperimenti che possediamo. Il valore di V è stato determinato misurando la forza elettromotrice con cui è stato caricato un condensatore di capacità nota, e poi scaricando il condensatore attraverso un galvanometro, in modo da misurare la quantità di elettricità in esso contenuta in misura elettromagnetica. L'unico uso fatto della luce nell'esperimento era l'osservazione degli

strumenti. Il valore di V trovato da M. Foucault è stato ottenuto determinando l'angolo di rotazione di uno specchio rotante, mentre la luce riflessa da esso andava e veniva lungo un percorso misurato. Non si faceva alcun uso dell'elettricità o del magnetismo. L'accordo dei risultati sembra mostrare che la luce e il magnetismo siano manifestazioni della stessa sostanza, e che la luce è un disturbo elettromagnetico propagato attraverso il campo secondo le leggi elettromagnetiche."

	Symbol of Vector.	Constituents.
The radius vector.....	ρ	$x y z$
The electromagnetic momentum at a point	\mathfrak{A}	$F G H$
The magnetic induction	\mathfrak{B}	$a b c$
The (total) electric current	\mathfrak{C}	$u v w$
The electric displacement.....	\mathfrak{D}	$f a h$
The electromotive force	\mathfrak{E}	$P Q R$
The mechanical force	\mathfrak{F}	$X Y Z$
The velocity of a point.....	\mathfrak{G} or $\dot{\rho}$	$\dot{x} \dot{y} \dot{z}$
The magnetic force	\mathfrak{H}	$\alpha \beta \gamma$
The intensity of magnetization	\mathfrak{I}	$A B C$
The current of conduction	\mathfrak{K}	$p q r$

We have also the following scalar functions:—
 The electric potential Ψ .
 The magnetic potential (where it exists) Ω .
 The electric density e .
 The density of magnetic 'matter' m .

Figura 8: Grandezze adoperate per la descrizione del campo elettromagnetico [45].

Il trattato

La formulazione dell'elettromagnetismo esposta nella memoria *A dynamical theory of the electromagnetic field*, compresa la Teoria elettromagnetica della luce fu trasferita con insignificanti variazioni nell'opera in due volumi *A Treatise on Electricity and Magnetism* [45], pubblicata in prima edizione nel 1873 e in seconda edizione nel 1881, rielaborata limitatamente ai primi nove dei trentacinque capitoli complessivi, siccome la prematura scomparsa dell'autore ne precluse la completa revisione.

Quest'opera non costituisce un trattato sistematico e risulta piuttosto arduo studiarlo dall'inizio alla fine, tuttavia è ricco di materiale e di idee originali sebbene disperse. Alcuni capitoli sono dedicati a calcoli matematici o a soluzioni di specifici problemi o dettagli di natura sperimentale e le equazioni del campo elettromagnetico sono presentata nella parte finale del secondo volume. Oltre ad esprimere i campi nella maniera usuale attraverso le componenti, nel trattato Maxwell adopera sia il formalismo vettoriale che la rappresentazione in termini di quaternioni (qui non riportata).

I simboli impiegati sono quelli indicati nella Fig. 8. Nel formato vettoriale le equazioni soddisfatte dai campi sono:

Espressione di Maxwell	Espressione moderna
$e = S \nabla \mathfrak{D}$	$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$
$\mathfrak{B} = \nabla \nabla \mathfrak{A}$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
$\mathfrak{C} = \nabla \mathfrak{G} \mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla \Psi$	$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Psi$
$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}$	$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
$4 \pi \mathfrak{C} = \nabla \nabla \mathfrak{H}$	$4 \pi \mathbf{J}_{\text{tot}} = \nabla \times \mathbf{H}$

Inoltre aggiunge le equazioni costitutive:

Espressione di Maxwell	Espressione moderna
$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
$\mathfrak{D} = \frac{1}{4 \pi} K \mathfrak{C}$	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$
$\mathfrak{K} = C \mathfrak{C}$	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

Maxwell indica gli operatori vettoriali di divergenza e di rotore di un vettore \mathbf{A} rispettivamente come $S \nabla \mathbf{A}$ e $V \nabla \mathbf{A}$, e indica il prodotto vettoriale $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ come $V \mathbf{A} \mathbf{B}$, infine la derivata di una funzione f rispetto al tempo è indicata come \dot{f} .

Complessivamente il trattato fu accolto con una certa diffidenza dai ricercatori dell'epoca ed anche alle successive generazioni parve come un grande, quanto inaccessibile monumento. Infine, consapevole delle perplessità suscitate dall'ipotesi circa un mezzo indispensabile a sostenere l'azione elettromagnetica, a conclusione del suo trattato Maxwell scrive:

"Sembra esserci, nella mente di eminenti uomini, qualche pregiudizio, o obiezione a priori, contro l'ipotesi di un mezzo in cui si svolgono i fenomeni di irraggiamento della luce e del calore e le azioni elettriche a

distanza. È vero che un tempo coloro che speculavano sulle cause dei fenomeni fisici avevano l'abitudine di rendere conto di ogni tipo di azione a distanza per mezzo di uno speciale fluido etereo, la cui funzione e proprietà era quella di produrre queste azioni. Riempirono tutto lo spazio tre e quattro volte con eteri di tipi diversi, le cui proprietà furono inventate semplicemente per "salvare le apparenze", così che ricercatori più razionali erano piuttosto disposti ad accettare non solo la precisa legge di attrazione di Newton a distanza, ma anche il dogma di Cotes⁴, secondo cui l'azione a distanza è una delle proprietà primarie della materia, e che nessuna spiegazione può essere più intelligibile di questo fatto. Quindi la teoria ondulatoria della luce ha incontrato molta opposizione, diretta non contro la sua incapacità di spiegare i fenomeni, ma contro la sua assunzione dell'esistenza di un mezzo in cui la luce si propaga."

Quindi, una volta prese in esame le teorie alternative sull'elettromagnetismo, termina con le parole

"In conclusione tutte queste teorie portano alla concezione di un mezzo in cui avviene la propagazione, e se ammettiamo questo mezzo come ipotesi, penso che dovrebbe occupare un posto preminente nelle nostre indagini, e che dovremmo sforzarci di costruire una rappresentazione mentale di tutti i dettagli della sua azione, e questo è stato il mio obiettivo costante in tutto questo Trattato."

Conclusioni

La teoria elettromagnetica della luce introduceva al problema della verifica sperimentale dell'esistenza delle onde elettromagnetiche previste. A partire dagli anni '80 del XIX secolo la comunità scientifica si mosse con l'obiettivo di verificare innanzitutto se l'energia elettromagnetica legata alla corrente di spostamento potesse essere

⁴Roger Cotes fu il matematico che scrisse la prefazione alla seconda edizione del 1713 dell'opera *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* di Isaac Newton.

irradiata nello spazio. Attraverso una rielaborazione formale della teoria di Maxwell, Heinrich Rudolf Hertz nel 1884 comprese che le perturbazioni elettromagnetiche possono essere generate attraverso delle oscillazioni elettriche ad alta frequenza. A seguito di una serie di esperimenti riportati in una memoria del 1888 [46] Hertz concluse che in un raggio costituito da oscillazioni trasversali

"...le oscillazioni elettriche si effettuano nel piano verticale del raggio [...] e le oscillazioni della forza magnetica si effettuano nel piano orizzontale."

Quindi, così come previsto dalla teoria di Maxwell, nelle oscillazioni elettromagnetiche il campo elettrico e il campo magnetico sono fra loro concatenati con linee di forza ortogonali.

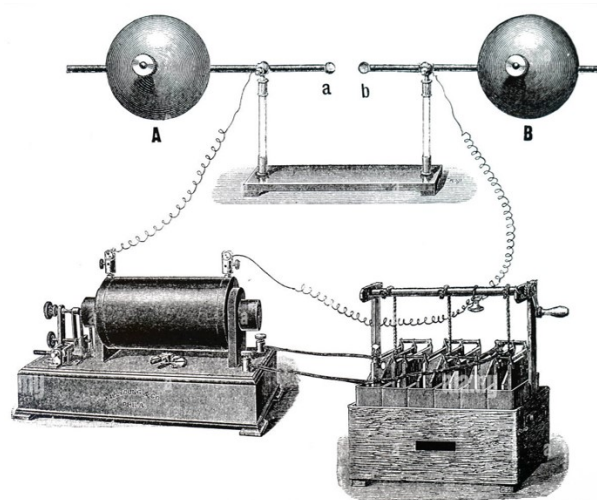


Figura 9: Il dispositivo utilizzato da Hertz per la generazione di onde elettromagnetiche. Una batteria (in basso a destra) alimenta un rocchetto di Ruhmkorff (in basso a sinistra) i cui terminali sono collegati al condensatore costituito dalle sfere metalliche A e B. Le scintille che si originano tra le sfere più piccole a e b poste al centro determinano la formazione di onde elettromagnetiche.

Nel 1873 il ricercatore inglese Oliver Heaviside, dopo uno studio approfondito del trattato di Maxwell, a partire dal gennaio 1885, pubblicò una serie di memorie nelle riviste *Electrician* e *Telegraphic Journal* volte a semplificare la formulazione di Maxwell delle relazioni tra i campi. Le memorie vennero successivamente ripubblicate nelle opere *Electrical Papers* [47] e *Electromagnetic Theory* [48]. Sebbene fosse un sostenitore entusiasta della teoria di Maxwell, Heaviside era poco

favorevole all'uso fatto da Maxwell dei quaternioni, ritenendone l'interpretazione fisica poco intuitiva ed attribuendo a tale strumento matematico lo scarso consenso che ingiustamente l'opera di Maxwell suscitava nei ricercatori. Ponendosi l'obiettivo di dare alla teoria di Maxwell una formulazione più chiara, Heaviside comprese che poteva eliminare i potenziali dalle equazioni di Maxwell, dandole una forma che metteva meglio in luce la loro simmetria. La simmetria si completava aggiungendo una densità di carica magnetica ed una corrente magnetica fittizie che Heaviside riteneva potessero, in linea di principio, esistere:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_e \\ \mu \nabla \cdot \mathbf{H} &= \rho_m \\ \nabla \times \mathbf{H} &= 4\pi k \mathbf{E} + c \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ -\nabla \times \mathbf{E} &= 4\pi g \mathbf{H} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\end{aligned}$$

I potenziali venivano descritti attraverso due separate relazioni:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Psi$$

Con le verifiche sperimentali da parte di Hertz e le riformalizzazioni dovute sia ad Hertz che ad Heaviside, la teoria del campo elettromagnetico di Maxwell prese progressivamente a consolidarsi nella comunità scientifica. In particolare fu accettata la fondamentale differenza rispetto alle ordinarie equazioni della meccanica che si applicano a regioni dello spazio in cui è presente materia mentre le equazioni di Maxwell sono valide ovunque, indipendentemente dalla presenza di corpi, descrivendo la dinamica dei campi.

Esisteva inoltre una sostanziale differenza con le equazioni della meccanica, perché le equazioni di Maxwell non restano invariate rispetto ad una trasformazione galileiana. Inoltre le equazioni di Maxwell non si applicavano a corpi in movimento rispetto all'etere. Pertanto era evidentemente indispensabile completarle con uno studio di questo caso che era naturalmente connesso al problema del comportamento dell'etere rispetto ai corpi in movimento.

Nel 1690 Christiaan Huygens [49] aveva avanzato l'ipotesi secondo cui la luce è un'onda che si

propaga attraverso l'etere. Huygens immaginava che le onde luminose fossero onde longitudinali, che si propagano come il suono o altre onde meccaniche nei fluidi. Tuttavia le onde longitudinali, oscillando unicamente nella direzione di propagazione, non sono in grado di giustificare fenomeni quali, ad esempio, la birifrangenza nelle sostanze otticamente anisotrope, in cui la diversa rifrazione può essere facilmente ricondotta a due differenti stati di polarizzazione della luce. Newton [50] rifiutava l'identificazione della luce con un'onda in un mezzo, perché un tale mezzo dovrebbe estendersi ovunque nello spazio interferendo col moto dei corpi. Newton sosteneva invece che la luce fosse composta da particelle, un'ipotesi che sebbene gli consentisse di spiegare caratteristiche come la capacità della luce di viaggiare in linea retta e di riflettersi sulle superfici, rendeva tuttavia ardua la spiegazione di fenomeni quali, ad esempio, la rifrazione e la diffrazione. Solo nel 1704, nel terzo libro dell'opera "Optiks" [50], Newtown postulò l'esistenza di un mezzo eterico le cui vibrazioni consentirebbero sia la rifrazione che la riflessione della luce.

Nel 1720, James Bradley condusse una serie di esperimenti con l'obiettivo di misurare la parallasse stellare, cioè il cambiamento della posizione apparente di una stella sulla sfera celeste, in relazione al periodo dell'anno [51]. Durante l'orbita della Terra attorno al Sole, l'angolo apparente rispetto a un dato punto distante cambia; a partire dalla misura di tali angoli può essere calcolata la distanza dalla stella, nota la circonferenza orbitale della Terra. Non riuscendo a rilevare alcuna parallasse, Bradley pose un limite inferiore alla distanza delle stelle studiate. Attraverso questi esperimenti Bradley scoprì che le posizioni apparenti delle stelle cambiano nel corso dell'anno, ma non come previsto. Invece di massimizzare l'angolo apparente quando la Terra si trova alle due estremità della sua orbita rispetto alla stella, l'angolo è massimizzato quando la Terra assume la sua massima velocità rispetto alla stella. Questo effetto, ora noto come **aberrazione stellare**, fu interpretato da Bradley nel contesto della teoria corpuscolare della luce proposta da Newton, mostrando che l'angolo di aberrazione è riconducibile alla semplice addizione vettoriale della velocità orbitale della Terra con la velocità dei corpuscoli di luce, proprio come le gocce di

pioggia che cadendo verticalmente, colpiscono un oggetto in movimento ad un angolo rispetto la verticale. A partire dalla conoscenza della velocità della Terra, misurando l'angolo di aberrazione, Bradley fornì la stima di 2.95×10^8 m/s per la velocità della luce. La spiegazione dell'aberrazione stellare nell'ambito di una teoria della luce basata sull'etere risultava problematica, poiché l'aberrazione si basava su velocità relative e la velocità misurata dipende dal movimento della Terra rispetto ad un etere stazionario. Ciò significa che la Terra può spostarsi attraverso l'etere, un mezzo fisico, senza alcun effetto apparente, cioè proprio il problema che aveva portato Newton a rigettare il modello ondulatorio della luce.

Circa un secolo dopo, Thomas Young [53] e Fresnel [54] rilanciarono la teoria ondulatoria della luce quando compresero che la polarizzazione di un'onda trasversale poteva spiegare in modo semplice il fenomeno della birifrangenza; così attraverso una serie di prove sperimentali venne progressivamente rigettato il modello particellare proposto da Newton. In analogia al comportamento delle onde meccaniche, si presumeva la necessità di un mezzo per la propagazione delle onde luminose, cioè l'etere proposto da Huygens diffuso in tutto lo spazio. Tuttavia, un'onda trasversale richiede che il mezzo di propagazione si comporti come un solido, invece che come un fluido, dovendo lasciarsi attraversare dai corpi. Per conciliare le due proprietà dell'etere proposto, la solidità e la permeabilità, Augustin-Louis Cauchy [54] e successivamente anche Fresnel [55] suggerirono che probabilmente l'etere veniva trascinato dai corpi in movimento, sebbene tale ipotesi fosse poco conciliabile col fenomeno dell'aberrazione. Stokes nel 1845 sviluppò ulteriormente in concetto di trascinamento dell'etere, proponendo un modello [56] in cui l'etere risultava totalmente trascinato nell'immediata prossimità dei corpi con un parziale trascinamento gradatamente decrescente all'aumentare della distanza dai corpi.

Per risolvere la questione, nel 1851 Hippolyte Fizeau [57] realizzò un esperimento in cui vennero fatti interferire due raggi di luce, uno dei quali aveva attraversato una colonna d'acqua nel senso del moto e l'altro in senso contrario. Se l'etere viene trascinato nel moto, le frange di interferenza si debbono spostare relativamente alla

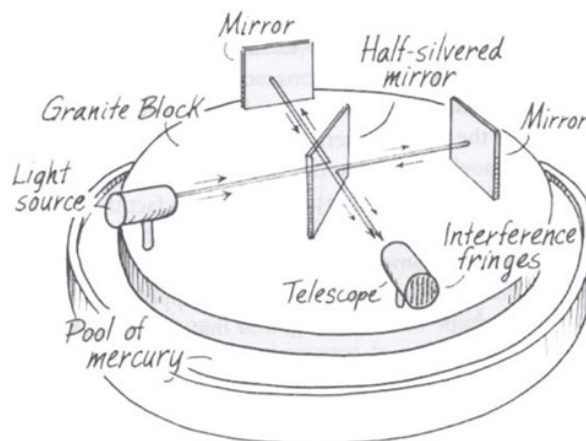


Figura 10: Schema dell'interferometro di Michelson usato per verificare il trascinamento dell'etere. Questo dispositivo, posto su una piattaforma di granito galleggiante sul mercurio, divide in due un fascio di luce; i due fasci viaggiano lungo cammini perpendicolari per essere successivamente fatti convergere su uno schermo, formando una figura di interferenza. Una differenza nel tempo impiegato dai due fasci per percorrere i due cammini determinerebbe lo spostamento delle frange di interferenza.

disposizione che assumono quando l'esperimento si compie con acqua ferma. I risultati ottenuti da Fizeau confermarono l'ipotesi del parziale trascinamento dell'etere. Nel 1886 l'esperimento venne replicato da Albert Abraham Michelson e Edward Williams Morley [58] con maggiore precisione rispetto alla versione originale di Fizeau (Figura 10). Attraverso l'apparato sperimentale adoperato, il trascinamento parziale dell'etere venne confermato, non solo nell'acqua ma anche in aria. Tuttavia cinque anni prima Michelson aveva tentato di rivelare il moto della Terra rispetto ad un etere supposto immobile [59]. Il metodo adoperato prevedeva che un fascio di luce incidendo su una lastra parzialmente riflettente si divideva in due fasci ortogonali, corrispondenti al fascio riflesso ed al fascio rifratto. Questi fasci, riflessi normalmente su due specchi posti alla medesima distanza dalla lastra, ritornando lungo i rispettivi percorsi di andata, si sovrappongono e sono inviati ad un cannocchiale. A causa della differenza di tempo impiegato dai due raggi a compiere i due percorsi ortogonali, se la Terra si sposta rispetto ad un etere immobile o parzialmente trascinato, tra i due raggi sovrapposti si

dovevano osservare degli effetti di interferenza; inoltre, ruotando di 90° tutto l'apparato, si sarebbe dovuto osservare uno spostamento delle frange di interferenza. L'esperimento, ripetuto in diversi momenti nel corso dell'anno e con diverse orientazioni dell'apparato dette risultati negativi, in nessun caso si osservò uno spostamento delle frange. Michelson ripeté l'esperimento nel 1887 insieme con Morley, ma i risultati furono altrettanto negativi, cioè l'etere si muoveva insieme alla Terra, sebbene il fenomeno dell'aberrazione della luce indicasse, invece, che l'etere deve essere stazionario.

Nel 1892 Oliver Lodge [60] divulgò una congettura formulata poco prima da Fitzgerald per superare tale contraddizione; Fitzgerald aveva ipotizzato che le dimensioni dei corpi fossero una funzione della loro velocità attraverso l'etere. Indipendentemente da Fitzgerald e poco dopo di lui, il fisico olandese Hendrik Antoon Lorentz [61], formulò la medesima ipotesi; secondo Lorentz i corpi in movimento subiscono una contrazione nel senso del moto, che cresce con la velocità del corpo, diventando massima in corrispondenza della velocità della luce; in tale limite la lunghezza del corpo diventerebbe nulla. Tale ipotesi, sebbene artificiosa, giustificava completamente l'esito negativo dell'esperimento di Michelson, siccome il braccio del dispositivo disposto lungo la direzione di moto della Terra si contrarrebbe della misura necessaria ad annullare la differenza di tempo di propagazione della luce in tale direzione e nella direzione perpendicolare. Lorentz, sviluppò ulteriormente la sua ipotesi in un trattato [62] pubblicato nel 1895. In questa memoria Lorentz considerò l'effetto dell'etere all'interno della materia ed introdusse la struttura discontinua dell'elettricità, ipotizzando una materia costituita da particelle elementari di elettricità, da lui definite "ioni positivi e ioni negativi", con la convenzione che un corpo neutro possiede ioni di segno opposto in ugual numero, mentre l'eccesso di ioni di un tipo ne determina la carica corrispondente. La corrente è determinata dal moto di ioni liberi all'interno di un conduttore, e ciascuno ione crea un campo elettromagnetico nel suo intorno; se il moto è rettilineo uniforme, lo ione trascina il campo con sé e di conseguenza non c'è emissione energetica nello spazio circostante mentre, se il moto è accelera-

to si ha l'emissione di onde elettromagnetiche con una conseguente perdita d'energia proporzionale al quadrato dell'accelerazione dello ione. Non avendo ioni mobili, i dielettrici agiscono da isolanti, tuttavia in questo caso gli ioni possono oscillare attorno alle loro posizioni di equilibrio, giustificando in questo modo le proprietà ottiche di tali materiali. Quindi, conclude Lorentz, il campo elettromagnetico osservato macroscopicamente è la sovrapposizione dei molteplici campi microscopici creati dai singoli ioni. A partire da tali considerazioni ricavò cinque relazioni fondamentali dalle quali, come lo stesso Lorentz mostrò, è possibile dedurre ogni altra legge nota relativa all'elettromagnetismo. Per la prima volta le equazioni appaiono raggruppate in un insieme:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{d} &= \rho \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \mathbf{j} &= \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \\ \nabla \times \mathbf{h} &= \mathbf{j} \\ -4\pi c^2 \nabla \times \mathbf{d} &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{h} &= 0 \\ \mathbf{f} &= 4\pi c^2 \mathbf{d} + \mathbf{v} \times \mathbf{h} \end{aligned}$$

Lorentz usò deliberatamente le lettere minuscole per indicare i campi microscopici che si osserverebbero all'interno della materia. L'insieme di equazioni integra la relazione che esprime la forza che agisce su una carica unitaria. Come le equazioni di Maxwell, anche quelle scritte da Lorentz non erano invarianti in corrispondenza di una trasformazione galileiana.

Nel 1887 il fisico tedesco Woldemar Voigt [63] aveva sviluppato una trasformazione che mantiene invariate le equazioni di Maxwell. Ad insaputa di tale risultato, nel 1904 Lorentz scoprì [64] la medesima trasformazione che Jules Henri Poincaré perfezionò e definì "trasformazione di Lorentz" [65]. La differenza con la trasformazione di Galileo è che il tempo non resta immutato per due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme uno rispetto l'altro, cioè nella trasformazione di Lorentz passando da un sistema all'altro si ha un cambiamento anche del tempo. Senza attribuirvi un particolare significato fisico,

Lorentz alla corrispondente espressione matematica attribuì il nome di *“tempo locale”*. Quindi le equazioni di Maxwell sono invarianti per una trasformazione di Lorentz ma non restano invariate le equazioni della meccanica classica. Cioè la scoperta di queste trasformazioni non permetteva comunque di sanare il contrasto tra le equazioni dell'elettromagnetismo e quelle della meccanica.

Sebbene ritenuto privo di significato fisico, il tempo locale introdotto da Lorentz richiamò l'attenzione dei ricercatori dell'epoca. Tra tutti Poincaré ne fece l'analisi più approfondita mettendo in discussione il concetto di simultaneità tra eventi. In particolare nel 1898, aveva descritto [66] una procedura di sincronizzazione per orologi a riposo l'uno rispetto all'altro, giungendo alla conclusione che due eventi, che sono simultanei in un sistema di riferimento, in generale non sono simultanei in un altro. Poincaré distingueva tra il *“tempo locale o apparente”* degli orologi in movimento e il *“tempo reale”* degli orologi in quiete rispetto all'etere. Sebbene ritenesse che l'etere potesse essere inosservabile e quindi la sua esistenza fosse una questione metafisica, Poincaré comunque considerava la sua esistenza una *“ipotesi conveniente”*, supponendo tuttavia che un giorno il concetto di etere sarebbe stato messo da parte come inutile.

I tentativi di rilevare il moto della Terra rispetto all'etere e di accordare meccanica ed elettromagnetismo furono completamente stravolti con la comparsa nel 1905 di una memoria [67] di Albert Einstein. In questa memoria Einstein esordisce scrivendo

“È noto che l'elettrodinamica di Maxwell – come la si interpreta attualmente – nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni.”

Einstein porta quale esempio come le azioni mutue tra una corrente ed un magnete non dipendano solo dal moto relativo ma anche dal fatto che sia la corrente oppure il magnete ad essere spostato e aggrunge

“Esempi di tipo analogo, come pure i tentativi andati a vuoto di constatare il moto della Terra relativamente al “mezzo luminoso” portano alla supposizione che il concetto di quiete assoluta non solo in meccanica,

ma anche in elettrodinamica non corrisponda ad alcuna proprietà dell'esperienza, e che inoltre per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni meccaniche debbano valere anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche [...]. Assumeremo questa congettura (il contenuto della quale nel seguito sarà chiamato “principio di relatività”) come postulato, e oltre a questo introdurremo il postulato, con questo solo apparentemente incompatibile, che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con una velocità [...], indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti.”

L'unione di questi due postulati:

- le leggi che regolano tutti i principi fisici sono le stesse per due osservatori in moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro (principio di relatività);
- la luce si propaga nel vuoto con una velocità costante in tutte le direzioni, indipendentemente dalle condizioni di moto della sorgente e dell'osservatore (principio di costanza della velocità della luce)

era sufficiente, secondo Einstein, per giungere ad una *“teoria semplice e consistente dell'elettrodinamica dei corpi in moto”* basata sulla teoria di Maxwell e senza la necessità del concetto di etere. Questi postulati, insieme alla fondazione sulla teoria classica di Maxwell, conducono alla cinematica del corpo rigido, poiché

“gli enunciati di una qualsiasi teoria di questo genere riguardano le relazioni fra corpi rigidi (sistemi di coordinate), orologi, e processi elettromagnetici. L'insufficiente considerazione di questa circostanza è alla radice delle difficoltà con le quali, attualmente, deve fare i conti l'elettrodinamica dei corpi in movimento.”

La memoria di Einstein è divisa in due parti, una dedicata alla cinematica e l'altra all'elettrodinamica; nella prima parte Einstein ritrova la contrazione ipotizzata da Lorentz per giustificare l'esito negativo della misura di Michelson, sebbene in abito relativistico non si tratti di un artificio, quanto di una inevitabile conseguenza della dipendenza della lunghezza di un regolo

dal sistema di riferimento. Nella seconda parte, Einstein mostra come la nuova cinematica introdotta permette di rendere le equazioni di Maxwell compatibili col principio di relatività, semplicemente provando che tali equazioni sono invarianti per una trasformazione di Lorentz e stabilisce le regole di trasformazione dei campi elettrico e magnetico nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro in moto rettilineo uniforme rispetto al primo.

L'introduzione della teoria della relatività proposta da Einstein si può ritenere costituisca il limite dell'elettromagnetismo classico. Gli studi sull'emissione della luce da parte di un corpo incandescente, avevano portato Max Planck nel 1900 a ipotizzare che gli atomi eccitati scambiassero energia con il campo elettromagnetico non in modo continuo ma per quantità discrete [68], gettando così le basi della Fisica quantistica che costituisce il modello interpretativo dei fenomeni su scala atomica e subatomica. L'ipotesi quantistica di Planck permise nel 1905 ad Einstein di giustificare [69] l'effetto fotoelettrico, classicamente inspiegabile, ipotizzando che la luce si propaghi come uno sciame di particelle e, successivamente, a risolvere la controversia sulla natura della radiazione elettromagnetica, portandolo a scrivere nel 1909 [70]

“È innegabile che esista un vasto insieme di dati sulla radiazione i quali mostrano che la luce ha certe proprietà fondamentali che possono essere comprese assai più facilmente dal punto di vista della teoria di Newton della emissione che da quello della teoria ondulatoria. Reputo quindi che la prossima fase dello sviluppo della Fisica teorica ci porterà una teoria della luce che potrà essere interpretata come una specie di fusione della teoria ondulatoria e corpuscolare.”

In merito alla formulazione dell'elettromagnetismo, nel 1831, in occasione del centenario della nascita di Maxwell, Einstein ebbe modo di affermare [71]:

“Prima di Maxwell si concepiva la realtà fisica - in quanto si suppone che rappresenti gli eventi della natura - come punti materiali, i cui cambiamenti consistono esclusivamente in moti, che sono soggetti a equazioni

differenziali totali. Dopo Maxwell si concepì la realtà fisica come rappresentata da campi continui, non spiegabili meccanicamente, che sono soggetti ad equazioni alle derivate parziali. Questo cambiamento nella concezione della realtà è il più profondo e fecondo che sia intervenuto in fisica dai tempi di Newton.”

Bibliografia generale

- E. Bellone, *Storia della Fisica - Moderna e contemporanea*, UTET, Torino, 1998
- S. D'Agostino, *L'elettromagnetismo classico*, Sansoni, Firenze, 1975
- S. D'Agostino, *La scienza dell'elettricità da Volta ad Einstein*, Booksprint Edizioni, 2013
- O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein*, Oxford University press, Oxford (UK), 2000;
- P. Duhem, *The Electric Theories of J. Clerk Maxwell - A Historical and Critical Study*, Springer, 2015
- M. Faraday, *Saggio storico di elettromagnetismo*, CUEN, Napoli, 1996
- M. Gliozzi, *Storia della Fisica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2005
- B. Mahon, *The man who changed everything, The Life of James Clerk Maxwell*, John Wiley & Sons, Chichester (UK), 2003
- D.M. Siegel, *Innovation in Maxwell's Electromagnetic Theory. Molecular Vortices, Displacement Current, and Light*, Cambridge University press, Cambridge (UK), 2002
- E. Whittaker, *A History of the Theories of Aether & Electricity: The Classical Theories/the Modern Theories 1900-1926*, Dover Publication, New York (USA), 2022



[1] M. Faraday: *Experimental Researches in Electricity*, R. Taylor and W. Francis, Londra (1839).

- [2] A. Avogadro: *Considérations sur l'état dans lequel doit se trouver une couche d'un corps non-conducteurs de l'électricité, lorsqu'elle est interposée entre deux surfaces douées d'électricité de différente espèce*, Journal de Physique, LXIII (1806) 450.
- [3] H. Davy: *Elements of Chemical Philosophy*, Johnson & Co., Londra (1812).
- [4] O. F. Mossotti: *Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps. Aperçu pour servir à la détermination de la cause et des lois de l'action moléculaire*, De L'imprimerie Royale, Torino (1836).
- [5] B. Franklin: *Experiments and observations on electricity*, F. Newbery, Londra (1774).
- [6] R. Hare: *A letter to Prof. Faraday on certain Theoretical Opinions*, Silliman's American Journal of Science and Arts, 38 (1839) 1.
- [7] R. Hare: *Dr. R. Hare's Letter to Prof. Faraday on certain Theoretical Opinions*, Phil. Mag., XVII (1840) 44.
- [8] R. J. Bošković: *Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, Leopold Johann Kaliwoda, Vienna (1758).
- [9] M. Faraday: *A speculation touching electric conduction and the nature of matter*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, XXIII (1844) 392.
- [10] M. Faraday: *Toughts on Ray-vibrations*, Philosophical Magazine, XXVII (1846) 188.
- [11] M. Faraday: *Experimental Researches in Electricity, Vol. III*, R. Taylor and W. Francis, Londra (1855).
- [12] E. K. Lenz: *Über die Bestimmung der Richtung der durch elektrodynamische Vertheilung erregten galvanischen Ströme*, Annalen der Physik, 107 (1834) 483.
- [13] H. von Helmholtz: *Über die Erhaltung der Kraft*, Druck und Verlag von G. Reiner, Berlino (1847).
- [14] F. E. Neumann: *Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme*, Annalen der Physik, 143 (1846) 31.
- [15] G. T. Fechner: *Über die Verknüpfung der Faraday'schen Inductions-Erscheinungen mit den Ampèreschen elektrodynamischen Erscheinungen*, Annalen der Physik, 140 (1845) 337.
- [16] C. F. Gauss: *Werke, Vol. 5*, W.F. Kaestner, Göttingen (1867).
- [17] W. Weber: *Elektrodynamische Maassbestimmungen*, Abhandl., Lipsia (1846).
- [18] H. von Helmholtz: *Scientific Memoirs, vol. 7, edited by J. Tyndall and W. Francis*, Johnson Reprint Corporation, New York (1966).
- [19] R. Kohlraush and W. Weber: *Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass*, Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, vol. III, Lipsia (1857). pp. 221-90;
- [20] W. Weber: *Wilhelm Weber's Werke, vol. III, H. Weber (editor)*, Springer, Berlino (1893).
- [21] B. Riemann: *A contribution to Electrodynamics*, Annals of Physics and Chemistry, 131 (1867) 237.
- [22] F.E. Neumann: *Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme*, Abh. d. kgl. Akad. d. Wiss., Berlin (1845). Repr. as Ostwald's Klassiker, Nr. 10, Leipzig (1889).
- [23] W. Thomson: *Reprint of papers on Electrostatic and Magnetism*, Macmilan & Co., Londra (1872).
- [24] J.B.J. Fourier: *Théorie Analytique de la Chaleur*, Cambridge University Press, Cambridge UK (2010).
- [25] G. Stokes: *On the Theories of the internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids*, Transaction of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge (1845).
- [26] W. Thomson: *On a mechanical representation of electric, magnetic, and galvanic forces*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, II (1847) .
- [27] S. P. Thompson: *The life of Lord Kelvin*, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1976).
- [28] W. Thomson: *A Mathematical Theory of Magnetism*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 141 (1851) 243.
- [29] W. Thomson: *Motion of a Viscous Liquid; Equilibrium or Motion of an Elastic Solid; Equilibrium or Motion of an Ideal Substance Called for Brevity Ether; Mechanical Representation of Magnetic Force* published for the first time in May 1890, W. Thomson, *Mathematical and Physical Papers*, 6 vols. (Cambridge, 1882-1911), 3, p. 436-465
- [30] P. M. Harman: *The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell: Volume 1, 1846-1862*, Cambridge University Press, Cambridge UK (1990).
- [31] W. D. Niven: *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Cambridge University Press, Cambridge UK (1890).
- [32] S.D. Poisson: *Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroïdes*, Nouveau Bull. Soc. Philomathique de Paris, 3 (1813) 388.
- [33] J.L. Lagrange: *Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques*, Mémoires de l'Académie de Berlin, 125 (1773) .
- [34] A. M. Ampère: *Extrait d'un Mémoire sur l'action exercée par un circuit électrodynamique, formant une courbe plane dont les dimensions sont considérées comme infiniment petites; sur la manière d'y ramener celle d'un circuit fermé, quelles qu'en soient la forme et le grandeur; sur deux nouveaux instruments destinés à des expériences propres à rendre plus directe et à vérifier la détermination de la valeur de l'action mutuelle de deux éléments de conducteurs; sur l'identité des forces produites par des circuits infiniment petits, et par des particules d'aimant; enfin sur un nouveau théorème relatif à l'action de ces particules*, lu à l'Académie royale des sciences dans séance du 21 novembre 1825. Correspondence Mathématique et Physique royaume des Pays-Bas, 2 (1826b) 35.
- [35] A. M. Ampère: *Theory of Electrodynamical Phenomena, Uniquely Deduced from Experience*, Deuxième Edition Conforme a la première publiée en 1826, Paris, A. Hermann, Librairie Scientifique, 1883, Tav. I, Fig. 16)

- [36] J. J. Jackson: *Elettrodinamica classica*, Zanichelli, Bologna (2001).
- [37] W. Thomson: *Dynamical illustrations of the magnetic and the helicoidal rotatory effects of transparent bodies on polarized light*, Phil. Mag., ser. 4, 13 (1857) 198.
- [38] O. F. Mossotti: *Discussione analitica sull'influenza che l'azione di un mezzo dielettrico ha sulla distribuzione dell'elettricità alla superficie di più corpi elettrici disseminati in esso*, Memorie della Società Italiana delle Scienze (Modena), 24 (1846) 49.
- [39] A. Fresnel: *Mémoire sur la diffraction de la lumière*, Mémoires de l'Académie des sciences, V (1826) 339.
- [40] H. Fizeau: *Sur une expérience relative à la Vitesse de la propagation de la lumière*, Compte Rendu hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 29 (1851) 90.
- [41] W. Weber, F. Kohlrausch: *Über die Elektrizitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fließt*, Poggendorff's Annalen, 99 (1856) 10.
- [42] J. C. Maxwell: *On a Method of Making a Direct Comparison of Electrostatic with Electromagnetic Force: With a Note on the Electromagnetic Theory of Light*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 158 (1868) 643.
- [43] J. le Rond d'Alembert: *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin, 3 (1747) 214.
J. le Rond d'Alembert: *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin, 3 (1747) 220.
J. le Rond d'Alembert: *Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin, 6 (1750) 355.
- [44] L. Foucault: *Sur les vitesses de la lumière dans l'air et dans l'eau*, Ann. de Chim. et de Phys., 3rd series XLI (1851) 129.
- [45] J. C. Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover Publications, New York (1954).
- [46] H. Hertz: *Über Strahlen elektrischer Kraft*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Berlino (1888).
- [47] O. Heaviside: *Electrical Papers*, Macmillan, Londra (1894).
- [48] O. Heaviside: *Electromagnetic theory*, "The Electrician" printing and publishing company, Londra (1894).
- [49] C. Huygens: *Traité de la lumière*, Chez Pierre vander Aa, marchand libraire, Leide (1690).
- [50] I. Newton: *Optik*, Sam. Smith and Benj. Walford, Londra (1704).
- [51] James Bradley: *A Letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and F.R.S. to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. Giving an Account of a New Discovered Motion of the Fix'd Stars.*, Phil. Trans. R. Soc., vol. 35, 406 (1727) 637.
- [52] T. Young: *Course of Lectures on Natural Philosophy and the Medical Arts*, J. Johnson, Londra (1807).
- [53] H. de Senarmont, E. Verdet, and L. Fresnel: *Oeuvres complètes d'Augustin Fresnel*, Imprimerie Impériale, Parigi (1866).
- [54] A. L. Cauchy: *Mémoire sur la théorie de la lumière* Mém. de l'Acad., 10 (1830) 293.
A. L. Cauchy: *Notes de M. Cauchy sur l'optique* Comptes Rendus, 2 (1836) 341.
- [55] A. Fresnel: *Lettre de M. Fresnel à M. Arago sur l'influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d'optique*, Annales de Chimie et de Physique, 9 (1818) 57, (1818) 286, ristampato in H. de Senarmont, E. Verdet, and L. Fresnel (eds.), *Oeuvres complètes d'Augustin Fresnel*, vol. 2 (1868) 627.
- [56] G. G. Stokes: *On the Aberration of Light*, Philosophical Magazine 27 (1845) 9.
G. G. Stokes: *On Fresnel's Theory of the Aberration of Light* Philosophical Magazine 28 (1846) 76
G. G. Stokes: *On the Constitution of the Luminiferous Æther, viewed with reference to the phenomenon of the Aberration of Light* Philosophical Magazine, 29 (anno) 6.
- [57] H. Fizeau: *Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux* Comptes Rendus. 33 (1851) 349. H. Fizeau: *Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux* Ann. Chim. Phys. 57 (1859) 385
- [58] A. A. Michelson, E. W. Morley: *Influence of Motion of the Medium on the Velocity of Light*, American Journal of Science, 31 (1886) 377.
- [59] A. A. Michelson: *The relative motion of the Earth and the Luminiferous ether*, American Journal of Science, 22 (1881) 120.
- [60] O. J. Lodge: *On the present state of our knowledge of the connection between ether and matter: an historical summary*, Nature, 46 (1892) 164.
- [61] H. A. Lorentz: *De relatieve beweging van de aarde en den aether*, Zittingsverlag Akad. V. Wet., 1 (1892) 74.
- [62] H. A. Lorentz: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*, E.J. Brill, Leiden (1895).
- [63] W. Voigt: *Über das Doppler'sche princip*, Göttinger Nachrichten, (1887) 41.
- [64] H. A. Lorentz: *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*, Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, 6 (1904) 809.
- [65] H. Poincaré: *Sur la dynamique de l'électron*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 21 (1906) 129.
- [66] H. Poincaré: *La théorie de Lorentz et le principe de réaction*, edited by Johannes Bosscha, Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, 5 (1900) 252.
- [67] A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik, 322 (1905) 891.
- [68] M. Planck: *Über eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 2 (1900) 202.

- [69] A. Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, *Annalen der Physik*, 322 (1905) 132.
- [70] A. Einstein: *On the development of our understanding of the nature and composition of radiation*, *Physikalische Zeitschrift*, 10 (1909) 817.
- [71] A. Einstein: *Maxwell's influence on the evolution of the idea of Physical Reality*. On the one hundredth anniversary of Maxwell's birth. Published, 1931, in James Clerk Maxwell: A Commemoration Volume, Cambridge University Press.



Marco Panareo: è Professore Associato di Fisica Sperimentale presso l'Università del Salento. Si occupa principalmente di Fisica delle Alte Energie, sviluppando nuovi rivelatori di particelle, elettronica di front-end e sistemi di acquisizione. Ha inoltre svolto attività di ricerca nel campo della Fisica dei Raggi Cosmici. Attualmente coordina il gruppo di Lecce dell'esperimento MEG presso il Paul Scherrer Institut di Zurigo (CH), il cui obiettivo è la ricerca del decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$, proibito dal Modello Standard delle particelle elementari ed inoltre partecipa alla progettazione dell'esperimento DUNE presso il Fermi National Accelerator Laboratory di Batavia, Illinois (USA), volto allo studio delle oscillazioni del neutrino.