Dequantizzazione Geometrica

Giuseppe Marmo *Dipartimento di Fisica "E. Pancini", Università di Napoli Federico II; INFN - Sezione di Napoli, Via Cintia - 80126 Napoli, Italy*

Alessandro Zampini *Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli", Università di Napoli Federico II; INFN - Sezione di Napoli, Via Cintia - 80126 Napoli, Italy*

1. Introduzione

Sin dalla sua introduzione all'inizio del secolo ventesimo al fine di descrivere misure osservate in sistemi fisici microscopici o in interazione con particolari campi di radiazione, la meccanica quantistica ha portato con sé l'idea che, alle scale di lunghezze o energie in cui la meccanica classica (e la teoria classica della radiazione) predice risultati in accordo con le misure, essa deve accordarsi alla descrizione classica. Questo pensiero è presente già nelle parole di Bohr [1],

> "Per ottenere la necessaria connessione con la ordinaria teoria della radiazione, noi dobbiamo assumere che una relazione, analoga a quella già provata per le frequenze, valga nel limite per grandi [1] n, per le intensità delle diverse linee dello spettro [...]".

A tale assunzione si è fatto poi riferimento con il nome di **principio di corrispondenza**. In pur poche righe, Bohr evidenzia che l'esistenza di una corrispondenza tra la descrizione quantistica di un sistema e quella classica è concettualmente necessaria, che essa si possa pensare come formulata matematicamente in termini di un opportuno limite, e che questo limite si applichi allo spettro di specifiche quantità misurate (osservabili, nel linguaggio che usiamo oggi) e più in generale vada considerato in modo specifico per ogni singolo sistema.

Questi temi sono presenti, all'interno di uno studio più generale sui principi e sulla formulazione matematica della meccanica quantistica, in ciò che scrive Dirac nel suo famoso manuale [2], ovvero

> "La meccanica classica deve essere un caso limite di quella quantistica. Noi ci aspettiamo che nozioni importanti in meccanica classica corrispondano a nozioni importanti in meccanica quantistica. Dalla comprensione della natura generale dell'analogia tra la meccanica classica e la meccanica quantistica noi possiamo allora sperare di ottenere leggi e teoremi in meccanica quantistica che appaiano come semplici generalizzazioni di ben noti risultati in meccanica classica."

Il problema del limite classico della meccanica quantistica è stato naturalmente studiato da allora, e ha portato ad una comprensione migliore sia delle teorie quantistiche che di quelle classiche, analizzate secondo tale prospettiva (la bibliografia su questi temi è sterminata, e noi ci limitiamo a rimandare il lettore a [3], in cui l'autore analizza i principali riferimenti, ponendoli in una

[1] Ovvero per nel limite per energie crescenti, identificate da valori discreti di n per i sistemi considerati.

prospettiva storica). Lo scopo di questa nota è presentare, all'interno di una descrizione geometrica di un sistema fisico, un insieme di domande sul problema della **dequantizzazione**, ovvero del limite classico di un sistema quantistico, ed analizzare più in dettaglio alcune di esse in relazione alle varie rappresentazioni della meccanica quantistica [2].

Nella sezione 2 presentiamo una formulazione matematica sia della dinamica quantistica di un sistema fisico, che della dinamica classica di un sistema fisico, individuando i termini di stato, osservabile, evoluzione temporale e sottolineando analogie e differenze fra i due formalismi. In virtù di esse, concludiamo tale sezione (nella 2.4) enucleando alcune domande sul problema del limite classico. In questa descrizione proviamo inoltre a mostrare come lo studio della fisica teorica resti circostanziato attraverso nozioni di geometria, algebra, analisi funzionale, e che le questioni concettualmente più delicate richiedano una solida traduzione all'interno di un formalismo matematico. Coerenti con l'osservazione che la descrizione matematica della meccanica quantistica ha sviluppato differenti rappresentazioni [3], nella sezione 3 descriviamo il formalismo di Poisson e quello simplettico per la meccanica classica, e la formulazione à la Weyl-Wigner per la meccanica quantistica, fondato sulla nozione di sistema di Weyl e di prodotto à la Moyal. Lungo questo cammino, nella sezione 4 descriviamo come un'opportuna procedura di limite conduca dalla descrizione dell'evoluzione quantistica in termini dell'equazione di Schrödinger alla descrizione classica in termini dell'equazione di Hamilton-Jacobi, e nella sezione 5 come l'evoluzione quantistica e quella classica possono essere formulate in termini della nozione di evoluzione unitaria su un opportuno spazio di Kähler.

[2] Un approccio nello spirito di questa nota è presente in [4], in cui l'autore descrive ciò che risulta parte di un programma più ampio di dequantizzazione geometrica (in particolare, per quella classe di dinamiche quantistiche a cui corrispondono dinamiche classiche il cui spazio delle fasi è uno spazio vettoriale simplettico) – programma che sorge naturalmente all'interno del formalismo, in quegli anni intensamente studiato, della quantizzazione geometrica (il lettore incontrerà una descrizione di questo formalismo nella sezione 3.

[3] Con il termine di rappresentazione della meccanica quantistica intendiamo qui la traduzione italiana del termine inglese *picture*.

2. Descrizione matematica di un sistema fisico

Ogni descrizione matematica di un sistema fisico e della sua evoluzione temporale richiede di identificare un insieme $\mathcal{S}$ di stati, che rappresentano un'informazione massimale sul sistema, un insieme $\mathcal{O}$ di osservabili, ovvero le quantità misurabili per il sistema, ed un accoppiamento tra essi (un *pairing*) dato da una applicazione

$$\mu\,:\,\mathcal{O}\times\mathcal{S}\quad\to\quad\mathcal{P}$$

in cui $\mathcal{P}$ è l'insieme delle misure di probabilità su $\mathbb{R}$. Dato uno stato $\rho\in\mathcal{S}$ e un'osservabile $A\in\mathcal{O}$, la quantità

$$0\,\leq\,\mu(A,\rho)(\Delta)\,\leq\,1$$

fornisce la probabilità che la misura di A, con il sistema nello stato ρ, dia un risultato in Δ, un elemento nella σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}$. Analizzare, inoltre, sistemi costituiti da un insieme di sottosistemi richiede di avere una legge di composizione in virtù della quale definire sistemi composti a partire da sistemi più elementari. Tali nozioni appaiono coerentemente descritte in termini geometrici considerando l'insieme delle osservabili $\mathcal{O}$ come il sottospazio reale di una $*$-algebra unitale $\mathcal{A}$ sul campo complesso $\mathbb{C}$ dotata di una norma. L'uso di strutture complesse in fisica permette di descrivere fenomeni di interferenza, e sembra necessaria [4] nei problemi di creazione e distruzione di particelle in teorie di campo quantistiche. All'algebra normata $\mathcal{A}$ corrisponde il suo duale $\mathcal{A}^*$, ovvero lo spazio dei funzionali lineari $\rho\,:\,\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ continui [5]. La norma su $\mathcal{A}$ induce una topologia su $\mathcal{A}^*$: in virtù di essa, l'insieme degli stati $\mathcal{S}$ si identifica con gli elementi positivi e normalizzati in $\mathcal{A}^*$. Il *pairing* tra osservabili e stati è formulato attraverso la dualità tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$, mentre la composizione di sistemi viene descritta in termini di prodotto tensoriale fra le correspondenti algebre.

[4] Un recente esperimento sembra indicare la necessità che nella formulazione matematica di un sistema quantistico sia presenta una struttura complessa. Rimandiamo il lettore a [5].

[5] Sono continui quei funzionali $\rho\,:\,\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ per cui, per ogni $a\in\mathcal{A}$, esiste una costante $\alpha\,\in\,\mathbb{R}$ tale che $|\rho(a)|\leq\alpha\parallel a\parallel$.

Ciò che abbiamo visto nelle righe precedenti può essere considerato come una descrizione geometrica della cinematica di un sistema fisico [6], ovvero di una sua descrizione indipendente dal tempo. La dinamica di un sistema fisico (ovvero l'evoluzione temporale delle sue osservabili, o alternativamente dei suoi stati) associato ad un'algebra $\mathcal{A}$ si può formulare come l'azione di un gruppo ad un parametro Φ_t (con $t \in \mathbb{R}$ la variabile temporale) di opportuni automorfismi di $\mathcal{A}$ su sé stessa, o (dualmente) sullo spazio $\mathcal{S}$ degli stati [7]. Intendiamo con ciò che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, la composizione di tali automorfismi dia

$$\Phi_{t+t'} = \Phi_t \circ \Phi_{t'}$$

con $\Phi_{t=0} = \mathbb{I}$ (ovvero l'identità su $\mathcal{A}$). Ogni gruppo (continuo[8]) ad un parametro di automorfismi in $\mathcal{A}$ ha un generatore infinitesimo, che è una **derivazione** [9] in $\mathcal{A}$.

Sia la descrizione di una dinamica classica che quantistica di un sistema fisico rientrano in questo dominio. Qui ci limiteremo a considerare sistemi fisici con un numero finito di gradi di libertà – secondo l'espressione dei manuali classici di meccanica – intendendo con ciò che non considereremo teorie di campo. Invero non considereremo sistemi fisici limitati in interazione con un ambiente (la cui evoluzione si studia in termini di semigruppi), o sistemi la cui evoluzione temporale è descritta da equazioni differenziali implicite, come ad esempio quelle relative a Lagrangiane degeneri.

[6]In quale misura abbia senso una suddivisione tra cinematica e dinamica per un sistema classico è analizzato, ad esempio, in [6], a cui rimandiamo.

[7]Per automorfismi di $\mathcal{A}$ intendiamo le corrispondenze $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ che sono compatibili con le strutture algebriche di $\mathcal{A}$, ovvero per cui $\Phi(a + a') = \Phi(a) + \Phi(a')$, $\Phi(aa') = \Phi(a)\Phi(a')$, $\Phi(\alpha a) = \alpha\Phi(a)$ e $\Phi(a^*) = (\Phi(a)^*$ per ogni $a, a' \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

[8]Intendiamo gruppi ad un parametro Φ_t che siano continui in norma, ovvero che soddisfino la condizione $\lim_{t\to 0} \|\Phi_t(a) - a\| = 0$ per ogni $a \in \mathcal{A}$.

[9]Un operatore lineare $\delta : D(\delta) \to \mathcal{A}$ da una $*$-sottoalgebra $D(\delta) \subseteq \mathcal{A}$ (il dominio di δ) tale che $\delta(a^*) = \delta(a)^*$ e $\delta(aa') = a\delta(a') + (\delta(a))a'$ è detta una $*$-derivazione. È possibile provare che, se Φ_t è un gruppo ad un parametro di automorfismi in $\mathcal{A}$, allora il suo generatore infinitesimo è la $*$-derivazione data da $\delta(a) = \lim_{t\to 0}(\Phi_t(a) - a)/t$ sul dominio $\mathcal{D}(\delta)$ dato dagli elementi $a \in \mathcal{A}$ per cui il limite esiste. Vedi anche [7, 8].

Come il lettore avrà osservato, questa descrizione richiama strutture matematiche tradizionalmente riferite ad aree differenti: quella di algebra e di suo spazio duale, quello di norma (e quindi di topologia), quello di automorfismi e gruppi, quello di misure di probabilità, di insiemi boreliani, di prodotti tensoriali e di prodotti di misure. Questa uniformità è ciò a cui ci si riferisce quando si parla di analogie tra la descrizione classica e quella quantistica per la dinamica di un sistema fisico.

Il primo scopo delle pagine seguenti in questa sezione è allora quello di delineare tali analogie, ovvero presentare il modo in cui sia una descrizione matematica della meccanica quantistica che della meccanica classica corrispondano a specifiche realizzazioni delle strutture formali presentate nell'introduzione precedente. Sarà all'interno di queste analogie che illustreremo in seguito alcuni aspetti del problema del limite classico della meccanica quantistica, inteso nel senso di analizzare il significato del passaggio tra diverse realizzazioni di una stessa struttura geometrica nell'ambito dello studio della dinamica di un sistema fisico.

2.1 Una descrizione geometrica della meccanica quantistica

In meccanica quantistica l'insieme $\mathcal{O}$ delle osservabili è dato dallo spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) degli operatori autoaggiunti $Op(\mathcal{H})$ su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ complesso e separabile. Facendo riferimento alla notazione bra-ket à la Dirac [2], se

$$a = a^* = a^\dagger$$

è un operatore autoaggiunto su $\mathcal{H}$, e ha una parte di spettro puntuale $\sigma_p(a)$ con

$$a|e_k\rangle = \lambda_k|e_k\rangle$$

e una parte di spettro continuo $\sigma_c(a)$ con

$$a|\varphi_\alpha\rangle = \alpha|\varphi_\alpha\rangle$$

in termini di autofunzioni proprie e generalizzate (indicate con $|\rangle$), allora possiamo scrivere una risoluzione spettrale

$$1 = \sum_{\lambda_k \in \sigma_p(a)} |e_k\rangle\langle e_k| + \int_{\sigma_c(a)} \mathrm{d}\alpha |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|$$

e, per ogni Δ dato da un sottoinsieme (boreliano, ovvero misurabile) di $\mathbb{R}$, un proiettore ortogonale

$$E_a(\Delta) \,=\, \sum_{\lambda_k\in\Delta} |e_k\rangle\langle e_k| \,+\, \int_\Delta \mathrm{d}\alpha|\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|.$$

Ogni misura di probabilità che corrisponde a uno stato $\rho \in \mathcal{S}$ si può scrivere allora come [10]

$$\mu(a,\rho)\,:\,\Delta \quad\mapsto\quad \mathrm{Tr}(W_\rho\, E_a(\Delta))$$

dove W_ρ è un operatore densità su $\mathcal{H}$, ovvero un operatore positivo [11] per cui Tr $(W_\rho) = 1$. Il valor medio della distribuzione di probabilità $\mu(a,\rho)$ è quindi dato da

$$\langle a\rangle_\rho \,=\, \mathrm{Tr}(W_\rho a).$$

La dispersione associata alla misura di probabilità $\mu(a,\rho)$ è in generale data da

$$\sigma^2_\rho(a) \,=\, \langle(a-\langle a\rangle_\rho)^2\rangle_\rho.$$

È possibile dimostrare – ed è uno degli aspetti più peculiari della meccanica quantistica – che non esiste stato ρ che dia una distribuzione di probabilità con dispersione nulla per ogni osservabile. Lo spazio delle misure di probabilità risulta convesso, e i suoi elementi di bordo sono gli stati puri, che si possono identificare con gli operatori densità di rango 1, ovvero quelli che soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned} &W^2_\rho = W_\rho = W^\dagger_\rho, \\ &\mathrm{Tr}(W_\rho) = 1 \end{aligned}$$

su $\mathcal{H}$; equivalentemente, gli stati puri corrispondo agli elementi del proiettivo complesso

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) \,=\, \mathcal{H}_0/\mathbb{C}_0,$$

attraverso

$$\rho \,=\, \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

con $\psi \neq 0_\mathcal{H}$. Se il vettore $\psi \in \mathcal{H}$ di norma unitaria rappresenta uno stato puro, è immediato riconoscere una relazione di indeterminazione à la Heisenberg [12] data da

$$\sigma^2_\psi(a)\sigma^2_\psi(b) \geq \langle\psi|i[a,b]\psi\rangle^2 \tag{1}$$

in termini del *commutatore* tra due operatori su $\mathcal{H}$, definito antisimmetrizzando l'operazione di composizione $\circ$ in $Op(\mathcal{H})$, ovvero

$$[a,b] \,=\, a\circ b \,-\, b\circ a \tag{2}$$

con $a,b \in Op(\mathcal{H})$. Tale funzione è antisimmetrica (vale cioè che $[a,a'] = -[a',a]$), bilineare (ovvero $[a+a',a''] = [a,a'']+[a',a'']$ e analogamente sul secondo membro), soddisfa le identità di Jacobi e di Leibniz (rispetto alla composizione), che si scrivono come

$$\begin{aligned} &[[a,a'],a''] + [[a',a''],a] + [[a'',a],a'] = 0 \\ &[a\circ a',a''] = a\circ[a',a''] + [a,a'']\circ a' \end{aligned} \tag{3}$$

per ogni terna $a,a',a'' \in Op(\mathcal{H})$.

Quando due sistemi quantistici associati agli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ sono composti, lo spazio di Hilbert che corrisponde alla composizione di essi è dato dal prodotto tensoriale $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$. È l'esistenza di stati puri per $\mathcal{H}_{12}$ che non sono separabili, ovvero che non si possono scrivere come il prodotto tensoriale di uno stato puro in $\mathcal{H}_1$ con uno stato puro in $\mathcal{H}_2$ che origina il problema dell'*entanglement*.

Per formalizzare in termini geometrici l'evoluzione temporale di un sistema quantistico così descritto, notiamo che l'interpretazione probabilistica à la Born della meccanica quantistica induce a considerare l'evoluzione temporale di un sistema come descritto da un gruppo ad un parametro di automorfismi **unitari** (ovvero che conservano la norma operatoriale) sullo spazio delle osservabili $\mathcal{A} \subset Op(\mathcal{H})$ dato dagli operatori autoaggiunti eventualmente illimitati su $\mathcal{H}$. Il teorema di Wigner dimostra che, se Φ_t è un

[10] Questa frase sintetizza, per gli scopi di questa nota, il teorema di Gleason, per la cui analisi in relazione alle misure di probabilità à la Born in meccanica quantistica rimandiamo il lettore al libro [9].

[11] Un operatore a su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è positivo se è autoaggiunto e ha spettro non negativo.

[12] È possibile dimostrare relazioni di indeterminazione più generali, di cui quella à la Heisenberg è un caso particolare, così come è possibile analizzare le relazioni di indeterminazione per stati non puri. Per esse rimandiamo a [10, 11, 12], limitandoci a menzionare che, se lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ha dimensione finita, allora si può dimostrare che si ha

$$\sigma^2_\rho(a)\sigma^2_\rho(b) \geq \frac{1}{4}\,|\mathrm{Tr}(W_\rho[a,b])|^2\,.$$

gruppo continuo ad un parametro sullo spazio degli operatori $Op(\mathcal{H})$ che preserva la norma operatoriale (ovvero che $\|\Phi_t(a)\| = \|a\|$) allora esiste un gruppo ad un parametro $u_t \subset Op(\mathcal{H})$ di operatori unitari [13] per cui

$$a(t) = \Phi_t(a) = u_t^* a u_t, \tag{4}$$

e tale relazione di coniugazione non altera il dominio di a anche nel caso in cui a non sia limitato. È possibile poi provare (è parte del contenuto del teorema di Stone - von Neumann) che per ogni gruppo ad un parametro di operatori unitari su $\mathcal{H}$ esiste un operatore autoaggiunto $\delta = \delta^*$ (eventualmente non limitato) su $\mathcal{H}$ per cui vale $u_t = e^{it\delta}$. Tale operatore a fornisce il generatore infinitesimo della dinamica quantistica, o operatore Hamiltoniano della dinamica. La versione infinitesima della relazione precedente risulta in

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = i[a, \delta] \ , \tag{5}$$

che fornisce la descrizione della dinamica quantistica à la Heisenberg. Le proprietà del commutatore in $Op(\mathcal{H})$ chiariscono che la corrispondenza $a \mapsto i[a, \delta]$ è una derivazione in $Op(\mathcal{H})$ rispetto alla composizione, e che è interna, poichè è definita da un elemento $\delta \in Op(\mathcal{H})$. Sugli stati puri, l'evoluzione temporale in (4) si scrive come

$$\psi(t) = u_t \psi(0), \tag{6}$$

la cui versione infinitesima è data dall'equazione di Schrödinger (con $\delta = -H/\hbar$)

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = H\psi \tag{7}$$

in termini dell'operatore Hamiltoniano H in $\mathcal{H}$ e della costante di Planck $\hbar = h/2\pi$. Dall'equazione di Schrödinger segue che, nello spazio degli stati che si possono identificare di operatori densità su $\mathcal{H}$, l'evoluzione temporale è data dall'equazione di Landau - von Neumann

$$\frac{\mathrm{d}W_\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[W_\rho, H]. \tag{8}$$

[13] Ricordiamo che un operatore $u : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ su uno spazio di Hilbert complesso separabile è unitario se $uu^* = u^*u = 1$. Un gruppo a un parametro di operatori unitari è dato da un insieme u_t (per ogni $t \in \mathbb{R}$) di operatori unitari per cui $u_t u_{t'} = u_{t+t'}$.

Notiamo che, quando H corrisponde all'osservabile energia meccanica del sistema, si richiede che H sia limitato dal basso, ovvero che il suo spettro (che è necessariamente reale) abbia almeno un estremo limitato.

2.2 Una descrizione geometrica della meccanica classica

Una descrizione geometrica della meccanica classica inizia dall'identificare le osservabili come elementi di un insieme $\mathcal{O} = \mathcal{F}(M)$ di funzioni opportunamente regolari a valori in $\mathbb{R}$ definite su una varietà differenziale M (liscia e a dimensione finita). Tale insieme $\mathcal{F}(M)$ è un'algebra commutativa rispetto all'usuale definizione puntuale di somma e prodotto di funzioni, ovvero

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m),$$
$$(fg)(m) = f(m)g(m).$$

Gli stati sono elementi $\rho \in \mathcal{S}$ dell'insieme delle misure di probabilità su M. Gli stati densità sono dati da misure di probabilità $\mathrm{d}\mu_\rho$ assolutamente continue rispetto ad una misura di riferimento $\mathrm{d}m$, ad esempio la misura di Lebesgue invariante per traslazioni nel caso in cui $M = \mathbb{R}^{\dim M}$, e il *pairing* corrispondente è dato da

$$\mu(f, \rho) : \Delta \quad \mapsto \quad \int_{f^{-1}(\Delta)} \mathrm{d}\mu_\rho,$$

dove abbiamo denotato $f^{-1}(\Delta) = \{m \in M : f(m) \in \Delta\}$. Gli stati puri sono dati dalle misure di Dirac singolari δ_m, con il pairing

$$\mu(f, \delta_m) : \Delta \quad \mapsto \quad \begin{cases} 1 & \text{if} \quad m \in \Delta \\ 0 & \text{if} \quad m \notin \Delta \end{cases}$$

Dato uno stato ρ, il valor medio di una osservabile è dato da [14]

$$\langle f \rangle_\rho = \int \mathrm{d}\mu_\rho f.$$

[14] Anche questa dualità può essere analizzata più rigorosamente in termini del teorema di Riesz. Se $\mathcal{A} = C_0(M)$ è l'insieme delle funzioni continue che si annullano all'infinito, l'azione di ogni funzionale lineare continuo positivo $\phi \in \mathcal{A}^*$ si può rappresentare attraverso una misura regolare su M. Tale insieme, con la topologia w^* indotta da quella su $\mathcal{A}$ risulta compatto e convesso. I punti sul bordo sono le misure singolari, ovvero gli stati puri.

Resta evidente che gli stati puri forniscono distribuzioni di probabilità con dispersione nulla per ogni osservabile. La composizione di due sistemi descritti in termini di due varietà lisce M_1 e M_2 risulta in un sistema descritto sulla varietà prodotto cartesiano $M_1 \times M_2$.

All'interno di tale descrizione, è possibile dimostrare che, se $\mathcal{F}(M)$ denota l'algebra a valori reali delle funzioni lisce su M, allora l'insieme $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}(M))$ degli automorfismi continui è equivalente all'insieme $\mathrm{Diff}(M)$ dei diffeomorfismi su M: se $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F}(M))$, allora esiste un $\phi \in \mathrm{Diff}(M)$ per cui

$$\Phi(f) = \phi^*(f) = f \circ \Phi$$

attraverso il concetto di pull-back. Ancora, il teorema di Willmore [13] prova che l'insieme delle derivazioni per $\mathcal{F}(M)$ coincide con l'insieme $\mathfrak{X}(M)$ dei campi vettoriali su M, e quindi può essere scritta localmente (ovvero in termini di un sistema di coordinate locali $\{x^a\}_{a=1,\ldots,\dim M}$ su M) come

$$\mathfrak{X}(M) \ni \delta = \delta^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a}. \tag{9}$$

L'evoluzione temporale di un'osservabile $f \in \mathcal{F}(M)$ si può pertanto scrivere come

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \delta(f) = L_\delta(f), \tag{10}$$

in termini della derivata di Lie lungo δ, a cui corrisponde l'evoluzione temporale sugli stati puri[15] data localmente come un sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t} = \delta^a(x) \tag{11}$$

con un opportuno dato iniziale $x^a(0) = x^a_0$.

2.3 Non solo analogie

Le pagine precedenti hanno fornito al lettore un quadro delle analogie tra la descrizione quantistica e quella classica della dinamica di un sistema fisico. È invero interessante iniziare ad analizzare le differenze fra le due descrizioni. Nell'ottica del limite classico, o della dequantizzazione, di un sistema quantistico, un primo aspetto di differenza tra le due descrizioni appare evidente. Le osservabili quantistiche sono gli elementi autoaggiunti di $Op(\mathcal{H})$, la norma è data da

$$\|a\| = \sup_{0_\mathcal{H} \neq \psi \in \mathcal{H}} \frac{\|a(\psi)\|_\mathcal{H}}{\|\psi\|_\mathcal{H}}$$

rispetto alla norma $\|\psi\|_\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$. Come noto, un operatore $a \in Op(\mathcal{H})$ è continuo se e solo se è limitato, ed in questo caso il suo dominio $\mathrm{Dom}(a) = \mathcal{H}$. In particolare, l'insieme $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ degli elementi limitati in $Op(\mathcal{H})$ è una $\mathbb{C}^*$-algebra non commutativa, rispetto alla definizione naturale di somma e prodotto data dalla composizione di operatori su $\mathcal{H}$, e la coniugazione complessa data da $a \mapsto a^* = a^\dagger$, in quanto risulta un'algebra di Banach e vale l'identità

$$\|aa^*\| = \|a\|^2.$$

Se, in particolare, $\mathcal{H}$ ha dimensione finita (e quindi $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^{n=\dim \mathcal{H}}$) lo spazio degli operatori coincide con l'insieme delle matrici $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{C}$, e la composizione si riduce al prodotto matriciale (e questo è uno dei motivi per cui la meccanica quantistica fu anche pensata da Heisenberg, Born, Jordan, come una meccanica delle matrici, eventualmente con infinite righe e colonne).

Nella descrizione classica di un sistema fisico, le osservabili sono le funzioni (opportunamente regolari: lo specifico problema rende naturale considerare ad esempio funzioni misurabili, o continue, o differenziabili) a valori reali definite su una varietà M. In particolare l'insieme $C_0(M)$ delle funzioni a valori in $\mathbb{C}$ continue su M e che si annullano all'infinito (ovvero lo spazio delle funzioni continue $C(M)$ se M è compatto) risulta, rispetto alla somma e al prodotto puntuale di funzioni, e alla coniugazione complessa in $\mathbb{C}$, una $\mathbb{C}^*$-algebra *commutativa*, rispetto alla norma di Banach

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)|.$$

Ancora, possiamo notare che gli elementi autoaggiunti in $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ non esauriscono l'insieme delle

[15] L'evoluzione temporale di uno stato ρ non puro, a cui corrisponde una misura di probabilità data in termini della derivata di Radon-Nikodym rispetto alla misura di Lebesgue come $\mathrm{d}\mu_\rho = \tilde{\rho}\,\mathrm{d}m$ ha una forma esplicita rispetto al campo vettoriale δ alquanto complicata, che in casi opportuni si riduce all'equazione di Liouville (nota dalla meccanica statistica, ad esempio) per $\tilde{\rho}$.

osservabili di un sistema quantistico. Un esempio ben noto è quello che si ha considerando un sistema quantistico per cui $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$ (una particella che si muove lungo una retta, nella rappresentazione à la Schrödinger), e le osservabili momento e posizione, la cui azione su opportuni domini densi in $\mathcal{H}$ è data da

$$
\begin{aligned}
p &: \psi \mapsto -i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}, \\
x &: \psi \mapsto x\psi
\end{aligned}
$$

e per essi si ha

$$
[x, p] = i\hbar 1 \qquad (12)
$$

su un dominio che risulta essere denso in $\mathcal{H}$. Anche in meccanica classica esistono osservabili che sono rappresentate da funzioni che non si annullano all'infinito con M non compatto: pensiamo ancora alla velocità (nel formalismo non relativistico) di una particella vincolata a muoversi lungo una retta.

Osserviamo ancora che le equazioni della dinamica quantistica per le osservabili (5) e per gli stati (8), così come le relazioni di indeterminazione (1) fanno riferimento alla struttura di commutatore definita in (9) antisimmetrizzando [16] il prodotto non commutativo in $Op(\mathcal{H})$ dato dalla composizione. La non commutatività del prodotto permette altresì di definire una funzione binaria (detta *prodotto di Jordan*), attraverso [17]

$$
a \odot b = \frac{1}{2}(a \circ b + b \circ a). \qquad (13)
$$

Risulta immediato provare che il prodotto di Jordan è simmetrico, ovvero $a \odot b = b \odot a$, ed interno allo spazio vettoriale degli operatori autoaggiunti, in quanto

$$
(a \odot b)^* = (a \odot b)
$$

se $a = a^*$ e $b = b^*$. Tale prodotto risulta non associativo, e la non associatività si può esprimere in termini del commutatore, come

$$
(a \odot b) \odot c - a \odot (b \odot c) = \frac{1}{4}[[a, c], b]. \qquad (14)
$$

Simmetrizzare, attraverso la formula (13), un prodotto di un'algebra commutativa non fornisce una nuova struttura algebrica: in tali casi, il prodotto di Jordan si riduce a quello stesso dell'algebra. Questo è il motivo per cui non si ha un prodotto di Jordan nell'algebra $\mathcal{F}(M)$ delle funzioni su uno spazio M rispetto al prodotto puntuale, e ciò costituisce un ulteriore differenza tra la descrizione quantistica e quella classica della dinamica di un sistema fisico.

2.4 Alcune domande sul problema del limite classico

Lo studio della transizione dalla descrizione quantistica alla descrizione classica per un sistema dinamico comporta alcune domande inerenti alle strutture matematiche che intervengono nelle descrizioni stesse.

Come ottenere, ad esempio, un'algebra commutativa a partire da una non commutativa? Come definire un formalismo matematico in cui l'insieme $Op(\mathcal{H})$ abbia come limite l'insieme $\mathcal{F}(M)$ delle funzioni opportunamente regolari su una varietà liscia, ed il prodotto non commutativo in $Op(\mathcal{H})$ abbia come limite il prodotto commutativo e puntuale (ovvero che dipende solo dal valore che le funzioni assumono in $m \in M$) in $\mathcal{F}(M)$?

E ancora, ancor prima: in che senso la varietà M si può ottenere come un opportuna dequantizzazione di un sistema fisico quantistico su $\mathcal{H}$, ovvero in che senso una varietà M può emergere da uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$? Come sappiamo, tutti gli spazi di Hilbert complessi e separabili sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione, e sono isomorfi se hanno dimensione infinita, mentre esistono varietà lisce, pur con la stessa dimensione, che sono solo localmente diffeomorfe. Ciò sembra indicare che uno spazio classico M, ottenuto come dequantizzazione di un sistema quantistico, dipenda non solo da $\mathcal{H}$ (nel senso che lo spazio degli stati puri di un sistema quantistico non origina, attraverso un

[16] È immediato verificare che, se $(\mathcal{A}, \cdot)$ è un'algebra associativa, il cui prodotto non è commutativo, la posizione $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ definisce un commutatore che è bilineare, antisimmetrico, e soddisfa le relazioni (10).

[17] Una algebra di Jordan è uno spazio vettoriale A in cui è definito un prodotto binario $\odot : A \times A \to A$ che sia bilineare, simmetrico, non associativo in generale ma per cui valga l'identità di Jordan, data da

$$
(a \odot b) \odot (a \odot a) = a \odot (b \odot (a \odot a)) \qquad \forall\, a, b \in A.
$$

processo di limite, lo spazio degli stati puri di un sistema classico) quanto anche da una specifica classe di osservabili per il sistema quantistico e dalla loro evoluzione temporale.

Naturalmente, una ulteriore questione: rispetto a quali grandezze introdurre un concetto di limite classico (quindi non commutativo) di una sistema quantistico? Quanto tale concetto è generale, e può valere per classi di sistemi fisici? Tale limite va inteso lungo una scala di azioni (con unità di misura in $\hbar$), o lungo una scala di energie (il parametro n di cui parlava Bohr), o una scala di lunghezze (la distanza tra due punti materiali, ad esempio elettroni o atomi carichi)?

Ancora: ogni sistema quantistico deve necessariamente avere un limite classico? Più in dettaglio: ogni osservabile quantistico deve necessariamente avere un osservabile classico come opportuno limite? In che modo interpretare il limite classico per sistemi quantistici il cui spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ha dimensione finita, problema oggi che ha interesse teorico e sperimentale notevole, alla luce della teoria geometrica dell'informazione e della computazione? Cosa significa studiare il problema del limite classico per sistemi a molti corpi, che manifestano comportamenti molto peculiari a seconda che i singoli componenti seguano statistiche bosoniche o fermioniche? Che ruolo ha, in tali sistemi, la temperatura come scala per definire un limite classico; e più in generale: in che significato il limite classico emerge in termini dinamici, attraverso l'interazione con un ambiente?

Risulta evidente che un'analisi generale che risponda a tali domande sia più che ardua, e supera gli scopi di questa nota. Pur ritenendo interessante, e concettualmente appropriato studiare il problema del limite classico a partire da un singolo sistema quantistico o da famiglie di sistemi analoghi, ciò che ci proponiamo nelle prossime pagine è di descrivere alcune questioni legate al limite classico dal punto di vista delle strutture geometriche utilizzate per descrivere i sistemi quantistici, in questo seguendo la linea tracciata proprio da Dirac e citata nell'introduzione.

3. Il limite classico della meccanica quantistica nel formalismo à la Weyl-Wigner

Tra le questioni che abbiamo evidenziato nelle righe precedenti vi è quella di comprendere come sia possibile ottenere un'algebra commutativa come un opportuno limite di un'algebra non commutativa. Il formalismo à la Weyl-Wigner che descriviamo in questa sezione fornisce una risposta a tale questione. Esso risulta fondato sulla nozione di struttura simplettica, e più in generale di struttura di Poisson su uno spazio classico, e permette perciò anche di definire un limite classico per l'evoluzione temporale di un'osservabile quantistico. Questo è il motivo per cui la nostra descrizione di tale formalismo inizia proprio introducendo la nozione di varietà di Poisson e di varietà simplettica.

Nella sezione precedente abbiamo già incontrato la celebre relazione di commutazione (12) tra le osservabili momento e posizione per un sistema quantistico per cui $\mathcal{H}$ è dato dalle funzioni a quadrato sommabile su una retta. Partendo da essa, nel suo studio [14] sulle equazioni fondamentali della meccanica quantistica (in cui esprime le cosiddette *quantum conditions*), Dirac scrive

> "Consideriamo ora a cosa l'espressione $xy - yx$ corrisponda nella teoria classica. [...] la differenza del prodotto di Heisenberg di due quantità (quantistiche) è uguale al prodotto di $ih/2\pi$ per l'espressione della loro parentesi di Poisson. In simboli,
>
> $$xy - yx = i\hbar\{x, y\}''. \qquad (15)$$

In questa espressione Dirac osserva *in primis* che ci sono osservabili quantistiche, il cui commutatore (il prodotto di Heisenberg) è un multiplo dell'identità, e pertanto commuta con ogni altro osservabile quantistico. In virtù di ciò, in seguito, introduce una relazione tra tale commutatore e la parentesi di Poisson tra le corrispondenti osservabili classiche. In linguaggio più moderno, tale espressione suggerisce che la dequantizzazione proceda dall'identificazione di opportune algebre di Lie di operatori quantistici (vedi la

(9)-(10)), e che per esse si identifichi, in un opportuno spazio classico, che a tale algebra di Lie corrisponda un insieme di osservabili classici le cui parentesi di Poisson sono analoghe alle relazioni di commutazione quantistiche, a meno del fattore in $\hbar$. Questo, ancora, suggerisce che tale corrispondenza possa interpretarsi come un limite per $\hbar \to 0$.

Per analizzare il limite classico della struttura di commutatore, richiamiamo brevemente cosa sia una struttura di Poisson su una varietà liscia.

Una parentesi di Poisson su uno spazio $\mathcal{F}(M)$ di funzioni opportunamente regolari su M è una struttura geometrica definita da

$$\{\ ,\ \}\,:\,\mathcal{F}(M)\,\times\,\mathcal{F}(M)\,\to\,\mathcal{F}(M)$$

tale che

$$\begin{aligned}
&\{f, f'\} = -\{f', f\},\\
&\{f + f', g\} \,=\, \{f, g\} \,+\, \{f', g\},\\
&\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \,=\, 0\\
&\{f\, f', g\} \,=\, f\{f', g\} + \{f, g\}f'
\end{aligned} \tag{16}$$

rispetto alla somma e al prodotto puntuale in $\mathcal{F}(M)$. L'analogia con il commutatore in $Op(\mathcal{H})$ è chiara, le prime tre relazioni indicano che si ha una algebra di Lie (infinito dimensionale) su $\mathcal{F}(M)$, e si manifesta notando ulteriormente che la corrispondenza $f\ \mapsto\ \{f, h\}$ è una derivazione in $\mathcal{F}(M)$ che dipende da h. Diviene allora naturale definire che una dinamica classica espressa in termini infinitesimi da un campo vettoriale $\delta \in \mathfrak{X}(M)$ abbia una descrizione *à la Poisson* se su M esiste una parentesi di Poisson ed una funzione h (detta Hamiltoniana) per cui

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \,=\, \delta(f) \,=\, \{f, h\}. \tag{17}$$

Se $M\ =\ T^*Q$ è lo spazio delle fasi (il fibrato cotangente) corrispondente ad uno spazio delle configurazioni Q, in cui le coordinate $\{q^a\}_{a=1,\ldots,d}$ su Q rappresentano le posizioni e le coordinate $\{p_b\}_{b=1,\ldots,d}$ sulla fibra rappresentano i momenti, esiste una struttura di Poisson canonica data da

$$\{q^a, p_b\} \,=\, \delta^a_b, \tag{18}$$

e tale relazione mostra una chiara analogia con l'espressione quantistica data dal commutatore in (12). Per una varietà liscia M con coordinate locali $\{x^a\}_{a=1,\ldots,\dim M}$, il tensore di Poisson risulta essere un bivettore caratterizzato da

$$\{x^a, x^b\} \,=\, \Lambda^{ab}$$

che soddisfa [18]

$$\Lambda^{ck}\partial_k\Lambda^{ab} + \Lambda^{ak}\partial_k\Lambda^{bc} + \Lambda^{bk}\partial_k\Lambda^{ca} = 0$$

(l'identità di Jacobi) e $\Lambda^{ab} = -\Lambda^{ba}$, e fornisce

$$\{f, f'\} \,=\, \Lambda^{ab}\frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial f'}{\partial x^b}.$$

Quando la matrice $\Lambda^{ab}(x)$ è invertibile per ogni $x \in M$, ad essa corrisponde una struttura simplettica su M, data da una 2-forma che assume l'espressione locale

$$\omega \,=\, \omega_{ab}\mathrm{d}x^a \wedge \mathrm{d}x^b$$

con $\Lambda^{ab}\omega_{bc}\ =\ -\delta^a_c$. Tale forma risulta non degenere per costruzione, mentre l'identità di Jacobi soddisfatta dal tensore di Poisson implica che sia chiusa, ovvero $\mathrm{d}\omega = 0$. Nel caso in cui $M = T^*Q$, la parentesi di Poisson canonica corrisponde alla nota 2-forma simplettica

$$\omega \,=\, \mathrm{d}q^a \wedge \mathrm{d}p_b. \tag{19}$$

Se (M, ω) è una varietà simplettica, un campo vettoriale $\delta \in \mathfrak{X}(M)$ (ovvero il generatore infinitesimo di una dinamica) risulta Hamiltoniano se e solo se esiste una funzione h per cui

$$i_\delta\omega = \mathrm{d}h$$

in termini dell'operatore di contrazione. Su $(M = T^*Q, \omega = \mathrm{d}q^a \wedge \mathrm{d}p_b)$ le equazioni del moto relative ad una dinamica Hamiltoniana (con Hamiltoniana h) assumono la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}t} &\,=\, \{q^a, h\} \,=\, \frac{\partial h}{\partial p_a}\\
\frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}t} &\,=\, \{p_a, h\} \,=\, -\frac{\partial h}{\partial q^a}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Tali equazioni descrivono l'evoluzione temporale infinitesima degli stati puri[19] su $M = T^*Q$.

[18] In questa nota assumiamo che il simbolo di sommatoria sia implicito se nell'espressione sono presenti indici ripetuti.

[19] Per circostanziare un'osservazione precedente, conside-

Riprendiamo l'analisi del problema della dequantizzazione seguendo la linea di Dirac, ed assumiamo di avere un sistema quantistico a cui corrisponde uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed un insieme di osservabili $\hat{q}^a, \hat{p}_a$ con $a = 1, \ldots, N$ che soddisfano le regole di commutazione canoniche, ovvero per esse valgono

$$[\hat{q}^a, \hat{p}_b] = i\hbar\delta^a_b 1. \tag{21}$$

Quali sono le realizzazioni, più propriamente le rappresentazioni di tali operatori? È immediato osservare (Weyl lo scrive nel suo libro sulla meccanica quantistica) che, se N coppie di operatori soddisfano la (21), allora $\mathcal{H}$ non può avere [20] dimensione finita; ancora, è possibile dimostrare (teorema di Wintner) che gli operatori autoaggiunti che realizzano le regole di commutazione canoniche non sono limitati su $\mathcal{H}$, e quindi sono definiti su domini eventualmente densi in $\mathcal{H}$, ma che non coincidono con $\mathcal{H}$. Un modo per rappresentare tali operatori evitando una analisi dei domini è quella di considerare opportuni gruppi ad un parametro di operatori unitari su $\mathcal{H}$, di cui essi risultino generatori infinitesimi. Nell'approccio à la Weyl, si considerano perciò (ci limitiamo al caso $N = 1$ per non appesantire la notazione) gruppi ad un parametro $U(s), V(t) \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$, con $s, t \in \mathbb{R}$, che siano continui nella topologia operatoriale e soddisfino le relazioni

$$U(s)V(s') = e^{iss'/\hbar}V(s')U(s). \tag{22}$$

Richiamando il teorema di Stone, si vede che se $\hat{p}$ è il generatore infinitesimo di

$$U(s) = e^{is\hat{p}/\hbar}$$

e $\hat{q}$ è il generatore infinitesimo di

$$V(s') = e^{is'\hat{q}/\hbar},$$

si ha $\hat{q} = \hat{q}^\dagger$ e $\hat{p} = \hat{p}^\dagger$, e tali generatori soddisfano le regole di commutazione canoniche. Il caso più noto di realizzazione di tali gruppi ad un parametro è detta **rappresentazione di Schrödinger**. Per essa, si ha $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$, e su tale spazio si definiscono

$$\begin{aligned} U(s) &: \psi(x) \mapsto \psi(x+s), \\ V(s') &: \psi(x) \mapsto e^{-ixs'/\hbar}\psi(x) \end{aligned} \tag{23}$$

che soddisfano la (22). Per i generatori infinitesimi abbiamo

$$\begin{aligned} U(s) &= e^{is\hat{p}\hbar} : (\hat{p}\psi)(x) = -i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \\ V(s') &= e^{is'\hat{q}\hbar} : (\hat{q}\psi)(x) = x\psi(x) \end{aligned} \tag{24}$$

Il teorema di Stone - von Neumann permette anche di analizzare l'unicità di tale realizzazione. È infatti possibile dimostrare che ogni altra rappresentazione irriducibile dei gruppi a un parametro che soddisfano le regole di commutazione canoniche (22) è unitariamente equivalente a quella di Schrödinger (tale risultato rivestì anche una notevole importanza, poiché permise di dimostrare l'equivalenza tra la formulazione tra la meccanica delle matrici à la Heisenberg e quella in termini di operatori differenziali à la Schrödinger).

Dagli operatori (22) possiamo definire l'operatore unitario

$$\begin{aligned} D(s,s') &= U^\dagger(s)V(s')e^{-iss'/2\hbar} \\ \psi(x) &\mapsto e^{\frac{i}{2\hbar}(ss'-2xs')}\psi(x-s) \end{aligned} \tag{25}$$

su $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$. Se interpretiamo s, s' come un sistema di coordinate globali su $\mathbb{R}^2$, per cui scriviamo un vettore $v = (s, s') \in \mathbb{R}^2$, vediamo che tale operatore soddisfa

$$D(v_1)D(v_2)D^\dagger(v_1)D^\dagger(v_2) = e^{i\omega(v_1,v_2)/\hbar}, \tag{26}$$

rispetto alla struttura simplettica canonica $\omega = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}s'$. Per tali operatori si ha

$$D(v_1 + v_2) = e^{i\omega(v_1,v_2)/2\hbar}D(v_1)D(v_2) : \tag{27}$$

essi danno una rappresentazione unitaria pro-

riamo il caso di uno stato non puro ρ, che si può descrivere attraverso la misura $\mathrm{d}\mu_\rho = \tilde{\rho}\mathrm{d}m$ rispetto alla misura *simplettica* $\mathrm{d}m = \mathrm{d}q^1 \wedge \ldots \mathrm{d}q^n \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \ldots \mathrm{d}p_n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega = \omega^{\wedge n}$. La misura simplettica risulta invariante lungo una dinamica Hamiltoniana, ed il fattore $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(q,p,t)$ si evolve secondo l'equazione di Liouville data da

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = -\{\tilde{\rho}, h\}.$$

[20] Se si avesse $\dim\ \mathcal{H} = d$ finita, allora $\hat{q}, \hat{p}$ sarebbero rappresentati da matrici di rango finito. Dalla ciclicità dell'operazione di Traccia, si avrebbe che $\mathrm{Tr}([\hat{q}^a, \hat{p}_b] = 0 = i\hbar d$, che è assurdo.

iettiva del gruppo delle traslazioni $(\mathbb{R}^2, +)$ su $\mathcal{H}$, ed il fattore proiettivo dipende dalla struttura simplettica canonica per $\mathbb{R}^2$. Gli operatori $D(v)$ si dicono operatori di *displacement*, e danno un **sistema di Weyl**.

Notiamo inoltre che l'estensione al caso $N > 1$ finito è immediato, su $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N, \mathrm{d}x)$. L'origine di tale spazio di Hilbert risulta naturale osservando ancora l'espressione (27). Essa mostra che, se v_1 e v_2 appartengono allo stesso sottospazio Lagrangiano di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla struttura simplettica ω, gli operatori corrispondenti commutano e hanno come spettro comune proprio il sottospazio Lagrangiano $\mathbb{R}^N$ che compare in $\mathcal{H}$.

Come si vede, una realizzazione irriducibile delle regole di commutazione canoniche porta ad un sistema di Weyl per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ che si può naturalmente identificare con lo spazio delle fasi $T^*\mathbb{R}$ (o con $T^*\mathbb{R}^N$ a dimensioni superiori). Questa identificazione risulta molto interessante, e permette di studiare altri aspetti della dequantizzazione di un sistema quantistico. Per illustrarli, notiamo che, attraverso gli operatori di displacement (25) per $N > 1$, si può definire su un dominio opportuno, la corrispondenza (solitamente detta mappa di *Wigner*) $W : Op(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2N})$ data da

$$W_A(z) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{\mathrm{d}w}{(2\pi\hbar)^N} \, e^{-i\omega(w,z)/\hbar} \, \mathrm{Tr}[A \, D^\dagger(w)]$$

in cui abbiamo denotato con $z = (q, p)$ le coordinate su $T^*\mathbb{R}^N$ e con w le sue coordinate duali secondo Fourier. Tale corrispondenza W associa ad un operatore A su $\mathcal{H}$ il suo *simbolo* à la Wigner $W_A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2N})$. Tale corrispondenza risulta iniettiva (con inversa detta mappa di *Weyl*), e quindi si può definire l'algebra (non commutativa) di Moyal come lo spazio dei simboli di Wigner (il codominio di W in $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2N})$) attraverso

$$(W_A * W_B)(z) = W_{AB}(z), \qquad (28)$$

con AB il prodotto operatoriale. Si può dimostrare che ([15, 16, 17])

$$\begin{aligned}(f * g)(x) \;=\; & \frac{1}{(\pi\hbar)^{2N}} \int\!\!\int \mathrm{d}u\mathrm{d}v \, f(x+u) \\ & g(x+v) \, e^{-2i\omega(u,v)/\hbar} \end{aligned} \qquad (29)$$

se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$, lo spazio delle funzioni di Schwartz in $\mathbb{R}^{2N}$. Ciò significa che nello spazio vettoriale $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ abbiamo sia il prodotto commutativo puntuale che il prodotto di Moyal, che risulta non locale e non commutativo, in quanto traduce il prodotto operatoriale. Lo spazio delle funzioni di Schwartz è però non sufficiente per rappresentare molte osservabili di un sistema fisico: si pensi alla funzione unità, o ad esempio alle posizioni e ai momenti, che sono funzioni lineari q^a, p_b. Un'analisi più raffinata ci permette di risolvere questo problema. Attraverso le proprietà della misura, è possibile estendere il prodotto di Moyal dapprima allo spazio delle distribuzioni temperate $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N})$ e poi a quello dei moltiplicatori, ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\hbar_L &= \{T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N}) : \\ & T * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N}) \, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})\} \\ \mathcal{M}^\hbar_R &= \{T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N}) : \\ & f * T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N}) \, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})\}; \end{aligned}$$

l'intersezione $\mathcal{M}^\hbar = \mathcal{M}^\hbar_L \cap \mathcal{M}^\hbar_R$ risulta una $*$-algebra con unità che contiene i polinomi, le onde piane, le distribuzioni delta di Dirac e le sue derivate. Come si vede, il prodotto di Moyal dipende da $\hbar$, così come quindi l'algebra $\mathcal{M}^\hbar$. La condizione

$$\lim_{\hbar \to 0} \mathcal{M}^\theta = \mathcal{O}_M$$

definisce l'insieme di ciò che possiamo chiamare osservabili classiche su $M = \mathbb{R}^{2N}$, e che coincide con lo spazio delle funzioni lisce a crescita polinomiale con tutte le loro derivate in $\mathbb{R}^{2N}$. Su di esse, il prodotto di Moyal si scrive come una serie asintotica in $\hbar$. Per $N = 1$, tale espressione risulta data da

$$\begin{aligned} f * g \quad \sim \quad & fg + \frac{i\hbar}{2}\{f, g\} \\ + \quad & \sum_{k=2}^{\infty} (\frac{i\hbar}{2})^k \frac{1}{k!} D_k(f, g) \\ \text{se} \quad & \hbar \to 0 \end{aligned} \qquad (30)$$

in cui D_k è un operatore bidifferenziale di ordine

k che si può scrivere come

$$
\begin{aligned}
D_k(f,g) &= \frac{\partial^k f}{\partial q^k}\frac{\partial^k g}{\partial p^k} \\
&- \binom{k}{1}\frac{\partial^k f}{\partial^{k-1} q \partial p}\frac{\partial^k g}{\partial^{k-1} p \partial q} + \dots \\
&+ (-1)^k \frac{\partial^k f}{\partial p^k}\frac{\partial^k g}{\partial q^k}. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

L'espressione (30) indica che il prodotto di Moyal deforma quello puntuale, e si riduce ad esso nel limite in cui $\hbar \to 0$: in questo senso, il formalismo che stiamo descrivendo permette di descrivere l'algebra delle osservabili quantistiche e l'algebra delle osservabili classiche sullo stesso spazio vettoriale, con il prodotto operatoriale che si scrive come un prodotto non commutativo e non locale. Nel limite per $\hbar \to 0$, la struttura algebrica del sistema quantistico che consideriamo si riduce a quella classica. In essa si osserva che primo termine di deformazione è dato dalla parentesi di Poisson associata alla struttura simplettica ω su $\mathbb{R}^{2N}$; i termini $D_k(f,g)$ risultano simmetrici in $f \leftrightarrow g$ per k pari, antisimmetrici per k dispari. Ne segue che antisimmetrizzare il prodotto conduce al commutatore à la Moyal,

$$
\begin{aligned}
[f,g]_\hbar &= f * g - g * f = i\hbar\{f,g\} \\
&+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{(2s+1)!} \\
&\quad \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{2s+1} D_{2s+1}(f,g): \qquad (32)
\end{aligned}
$$

tale commutatore deforma la parentesi di Poisson su $\mathbb{R}^{2N}$, e si ha

$$
\{f,g\} = \lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{i\hbar}(f*g - g*f). \qquad (33)
$$

In questo senso, osserviamo che la struttura di Poisson si ottiene all'interno del formalismo *à la Moyal* come un opportuno limite del commutatore, e questo pone la frase di Dirac (15) in un contesto matematicamente meno formale. In particolare, per le funzioni coordinate si ha

$$
\begin{aligned}
[q^a, q^b]_\hbar &= 0, \\
[p^a, p^b]_\hbar &= 0, \\
[q^a, p^b]_\hbar &= i\hbar\delta^{ab} \quad ,
\end{aligned}
$$

e per le funzioni che sono polinomi in q, p di grado non superiore a 2 si ha proprio la (15)

$$
[f,g]_\hbar = i\hbar\{f,g\}. \qquad (34)
$$

È interessante osservare che il formalismo à la Weyl-Wigner che stiamo descrivendo permette di analizzare anche il limite classico della dinamica, (ovvero dell'evoluzione temporale) di un sistema quantistico. L'evoluzione temporale quantistica viene descritta da un gruppo $u_t = e^{it\hat{H}/\hbar}$ di operatori unitari su $\mathcal{H}$, con generatore autoaggiunto $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$. All'evoluzione temporale di un'osservabile autoaggiunto $\hat{a} \in Op(\mathcal{H})$ dato da (4) $\hat{a} = u^\dagger(t)\hat{a}u_t$ corrisponde, attraverso la mappa di Weyl, l'evoluzione temporale del suo simbolo, dato da

$$
a(t) = u_t^\dagger * a * u_t \qquad (35)
$$

con $u_t = \exp^{-itH/\hbar}$ in cui l'esponenziazione è rispetto al prodotto di Moyal. La versione infinitesima di tale relazione si scrive come

$$
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[a,H]_\hbar \qquad (36)
$$

che, nel limite per $\hbar \to 0$, mostra che l'evoluzione temporale quantistica si riduce ad una evoluzione temporale Hamiltoniana su $T^*\mathbb{R}^N$ con una opportuna funzione Hamiltoniana H che è il limite per $\hbar \to 0$ del simbolo di Weyl dell'operatore Hamiltoniano quantistico $\hat{H}$.

A conclusione di questa sezione, osserviamo che se si simmetrizza il prodotto di Moyal si ottiene un prodotto di Jordan, che scriviamo come

$$
\begin{aligned}
f \odot g &= \frac{1}{2}(f*g + g*f) \\
&= fg - \frac{\hbar^2}{8}D_2(f,g) + o(\hbar^4). \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Diversamente da ciò che accade per l'espressione antisimmetrica in (32), è possibile dimostrare che nessun troncamento ad un ordine finito in $\hbar$ della serie asintotica (37) risulta in un prodotto di Jordan, che quindi non si può ottenere come una opportuna approssimazione di quello *à la Moyal* [18].

3. Sulla quantizzazione di una dinamica classica attraverso il formalismo à la Weyl-Wigner

Il formalismo à la Weyl-Wigner, che noi abbiamo presentato nell'ottica della dequantizzazione di una dinamica quantistica, è stato analizzato anche nell'ottica della quantizzazione di una dinamica classica. Ne descriviamo brevemente alcuni aspetti, a complemento della descrizione precedente, per mostrare come il problema del limite classico sia legato a quello della quantizzazione.

In particolare, osserviamo che la rappresentazione di Schrödinger di un sistema di Weyl per lo spazio simplettico $(\mathbb{R}^2, \omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p)$ fornisce un esempio di immersione di uno spazio delle configurazioni classico $Q = \mathbb{R}$ in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(Q = \mathbb{R}, \mathrm{d}x)$, in virtù del fatto che ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ fornisce un elemento di una base, in senso generalizzato, di $\mathcal{H}$ per cui si ha una risoluzione dell'identità [21]

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x |x\rangle\langle x| \qquad (38)$$

da cui uno scrive

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x |x\rangle \psi(x) \qquad (39)$$

con $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$. Gli stati puri si possono descrivere in termini di funzioni d'onda normalizzate $\psi(x)$ a cui corrispondono densità di probabilità date dal prodotto $\psi^*(x)\psi(x) = \langle x|\psi\rangle\langle\psi|x\rangle$. In tale realizzazione, gli osservabili momento corrispondono a operatori di derivazione, e l'evoluzione si può scrivere in termini di una equazione d'onda $i\hbar\dot{\psi} = \hat{H}\psi$ in termini di un operatore differenziale $\hat{H}$ il cui simbolo di Weyl coincide con una funzione Hamiltoniana classica di una data dinamica.

Il formalismo à la Weyl-Wigner-Moyal è stato studiato all'interno del problema più generale della `quantizzazione per deformazione` di una varietà simplettica (M, ω) (vedi [19, 20, 21]), e ancor più in generale della quantizzazione per deformazione di una varietà di Poisson (M, Λ) [22].

[21] Notiamo che tale risoluzione, con parte discreta o continua vale, seguendo Dirac, una volta scelto Q come spettro comune di un insieme massimale di osservabili che commutano su $\mathcal{H}$.

All'interno di tale formalismo è noto che differenti realizzazioni della mappa di Weyl forniscono diverse corrispondenze tra operatori e simboli, e che queste corrispondenze danno una formulazione del problema dell'ordinamento nella quantizzazione [22]. Una classe di esempi interessanti viene da una immediata generalizzazione della definizione di sistema di Weyl per il gruppo abeliano $(V = \mathbb{R}^{2N}, +)$. Rispetto alla definizione posta in (26), si possono considerare sistemi di Weyl definiti come rappresentazioni unitarie proiettive di $(\mathbb{R}^{2N}, +)$ per cui

$$D_S(v_1 + v_2) = e^{i\phi(v_1,v_2)/\hbar} D_S(v_1) D_S(v_2) \qquad (40)$$

in cui il fattore di fase $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ è un bilineare [23] che non è necessariamente antisimmetrico, e che scriviamo come

$$\phi(v_1, v_2) = \omega(v_1, v_2) + S(v_1, v_2) \qquad (41)$$

con $S(v_1, v_2) = S(v_2, v_1)$. È possibile dimostrare (vedi [23]) che, rispetto al caso di un fattore proiettivo puramente simplettico dato da (26) (che corrisponde al caso $S = 0$), si ha

$$D_S(v) = D(v) e^{iS(v,v)/4\hbar},$$

e che ad esso corrisponde una ben definita mappa di Weyl-Wigner che permette un corrispondenza fra operatori su $\mathcal{H}$ e simboli in $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2N})$. Rispetto all'ordinamento, si vede che se $T^*Q = \mathbb{R}^2$ con $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$, la scelta $S = 0$ fornisce una quantizzazione

$$f = qp \quad \mapsto \hat{f} = \frac{1}{2}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})$$

in termini degli operatori canonici nella rappresentazione (24) à la Schrödinger. Il fattore di fase

[22] Ci stiamo riferendo al cosiddetto problema dei diversi *ordinamenti* nella quantizzazione. La funzione classica qp su $\mathbb{R}^2$ corrisponde in principio al limite per $\hbar \to 0$ delle diverse (tra molte altre) espressioni operatoriali $\alpha\hat{q}\hat{p} + (1-\alpha)\hat{p}\hat{q}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

[23] La richiesta che $D_S : V \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ sia una rappresentazione proiettiva implica che il fattore di fase debba soddisfare una condizione di cociclo data da

$$\phi(v_1, v_2 + v_3) + \phi(v_2, v_3) = \phi(v_1, v_2) + \phi(v_1 + v_2, v_3)$$

$$\forall \quad v_1, v_2, v_3 \in V.$$

Tale condizione è soddisfatta da funzioni ϕ bilineari.

$S = 2\mathrm{d}q \otimes \mathrm{d}p$ fornisce una quantizzazione

$$f = qp \quad \mapsto \hat{f} = \hat{p}\hat{q}$$

ed un prodotto à la Moyal dato da

$$f *_S g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial q^k} \frac{\partial^k g}{\partial p^k}, \qquad (42)$$

mentre il fattore $S = -2\mathrm{d}q \otimes \mathrm{d}p$ dà

$$f = qp \quad \mapsto \hat{f} = \hat{q}\hat{p}.$$

ed un prodotto di Moyal

$$f *_S g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\hbar)^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial p^k} \frac{\partial^k g}{\partial q^k}. \qquad (43)$$

Questi casi forniscono degli esempi di risultati più generali che si possono provare (vedi [20]). Per i prodotti à la Moyal ottenuti da sistemi di Weyl del tipo (40), e che sono detti *pesati*, si ha ancora

$$\{f, g\} = \lim_{\hbar \to 0} -\frac{i}{\hbar}(f *_S g - g *_S f),$$

rispetto alla parentesi di Poisson relativa alla struttura simplettica ω. Ancora una volta, inoltre, nessun troncamento della serie asintotica del prodotto simmetrizzato ad un ordine finito in $\hbar$ fornisce una struttura di Jordan. Tutti i prodotti deformati ottenuti a partire da sistemi di Weyl del tipo (40) con un fattore proiettivo (41) con lo stesso termine antisimmetrico legato alla struttura simplettica ω risultano equivalenti, nel senso che esiste una trasformazione invertibile $T_S : \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2N}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2N})$ – che dipende dal bilineare simmetrico S – per cui

$$T_S(f * g) = (T_S f) *_S (T_S g).$$

Questo risultato indica ancor più chiaramente che, sebbene il prodotto di Moyal, in quanto associativo e non commutativo, dia origine ad un commutatore e ad un prodotto di Jordan, nel limite classico formulato secondo $\hbar \to 0$ queste due strutture hanno comportamenti profondamente diversi.

Il problema della quantizzazione e del limite classico è stato parallelamente analizzato all'interno della fomulazione tomografica della meccanica quantistica (vedi [24]), ed anche nella prospettiva dello studio della dinamica quantistica scritta in termini di stati coerenti generalizzati [25]. Un esempio interessante in tal senso è dato considerando (vedi [26]) una varietà liscia M ed una forma di volume che scriviamo come $\mathrm{d}\mu_M$. Nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(M, \mathrm{d}\mu_M)$ consideriamo un insieme ortonormale $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per cui $0 < k(m) = \sum_n |\phi_n(m)|^2 < \infty$. Indicando i vettori $\phi_n \sim |n\rangle$, definiamo

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{k(m)}} \sum_n \phi_n^*(m)|n\rangle;$$

tali vettori $|m\rangle$ risultano normalizzati, ovvero $\langle m|m\rangle = 1$, ma non ortogonali fra di loro, e forniscono una risoluzione dell'identità (in questo senso generalizzando la nozione di stati coerenti)

$$\int_M \mathrm{d}\mu_M \, k(m)|m\rangle\langle m| = 1$$

su $\mathcal{H}$. Attraverso questo sistema di stati coerenti generalizzati, che forniscono ancora una immersione di M in $\mathcal{H}$, possiamo trasformare un operatore $A \in Op(\mathcal{H})$ in un simbolo $f_A \in \mathcal{F}(M)$ dato da

$$f_A(m) = \langle m|A|m\rangle; \qquad (44)$$

questa corrispondenza si può invertire attraverso una quantizzazione data da

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(M) \ni f \quad &\mapsto \\ A_f = \int_M &\mathrm{d}\mu_M k(m) f(m)|m\rangle\langle m|. \end{aligned} \qquad (45)$$

Attraverso la scelta $M = \mathbb{R}^2$ (con coordinate (q, p) che identificano $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ secondo $z = q + ip$) con il volume $\mathrm{d}\mu_M = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p/2\pi\hbar$ e

$$\phi_n(z) = e^{-|z|^2/2\hbar} \frac{z^*}{\sqrt{\hbar n!}}$$

possiamo definire

$$|z\rangle = \sum_n \frac{e^{-|z|^2/2\hbar}}{\sqrt{\hbar n!}} z^n|n\rangle$$

ed abbiamo gli stati coerenti nella rappresentazione à la Fock dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Per essi si ha

$$\int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}^2 z \frac{1}{\hbar\pi} |z\rangle\langle z| = 1,$$
$$\langle z|z'\rangle = e^{-|z-z'|^2/2\hbar} e^{i\omega(z,z')/\hbar}$$

rispetto alla struttura simplettica standard su $\mathbb{R}^2$. La mappa di quantizzazione

$$f(z,z^*) \quad \mapsto \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}z^*}{\hbar\pi} f(z,z^*)|z\rangle\langle z|$$

dà operatori simmetrici se $f = f^*$, limitati se f è limitata, autoaggiunti (attraverso l'estensione di Friedrichs) se f è reale e semi-limitata. Alle funzioni coordinate z, z^* corrispondono gli operatori di *distruzione* e di *creazione* nello spazio di Fock, dati come

$$\begin{aligned} A_z &= \hat{a} \quad ; \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{\hbar n}|n-1\rangle, \\ A_{z^*} &= \hat{a}^\dagger \quad ; \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{\hbar(n+1)}|n+1\rangle \end{aligned}$$

con la regola di commutazione $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hbar 1$.

4. Dall'equazione di Schrödinger alla equazione di Hamilton-Jacobi

Uno degli aspetti più interessanti in cui la descrizione classica differisce da quella quantistica sorge immediatamente dal confronto tra l'equazione di Schrödinger (7) e le equazioni del moto classico (11). Lo spazio $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale lineare e complesso, le equazioni dell'evoluzione quantistica sono lineari; la dinamica classica è non lineare su uno spazio di supporto M che non è necessariamente uno spazio lineare. Anche negli esempi, notevoli per le applicazioni fisiche, di dinamiche classiche in cui $M \simeq \mathbb{R}^d$, le equazioni del moto sono in generale non lineari [24]. Sin dalla introduzione della meccanica quantistica, l'assunzione che le funzioni d'onda ψ siano ampiezze di probabilità, ed elementi di uno spazio vettoriale complesso $\mathcal{H}$, è stata invocata come un elemento costitutivo in quanto in grado di descrivere matematicamente i fenomeni di interferenza e diffrazione osservati sperimentalmente, insieme all'assunto ulteriore che le densità di probabilità corrispondono ai quadrati delle ampiezze, e che tali ampiezze si possono linearmente sovrapporre.

Il problema di comprendere come sia possibile ottenere una descrizione non lineare a partire da una lineare era stato affrontato storicamente già da Schrödinger stesso. Caratterizzando gli stati coerenti presentati nella sezione precedente come quelli su cui le relazioni di indeterminazione assumono il valore minimo possibile, aveva osservato che tale insieme non è una sottovarietà lineare in $\mathcal{H}$ e che purtuttavia risulta stabile rispetto all'evoluzione quantistica di una opportuna classe di sistemi. Questo aspetto risulta anche in meccanica classica, in cui si possono esibire esempi notevoli di sistemi lineari la cui riduzione rispetto a sottovarietà non lineari fornisce sistemi integrabili nel senso di Arnold - Liouville [25].

Invero, una prima naturale osservazione sulla questione della linearità della descrizione quantistica viene richiamando ciò che Dirac scrisse a tal proposito

> "...la sovrapposizione in meccanica quantistica ha una natura essenzialmente diversa da quella che si verifica nelle teorie classiche, come si può vedere considerando che il principio di sovrapposizione quantistico richiede indeterminazione nei risultati al fine di avere una interpretazione fisica coerente coi risultati sperimentali."

Nelle teorie quantistiche, quindi, l'aspetto strutturalmente cruciale sembra essere una regola di sovrapposizione per gli stati, non necessariamente legata ad una struttura lineare, e che tale sovrapposizione sia coerente con le relazioni di indeterminazione, che sembrano legate (vedi la (1)) alla non commutatività della composizione fra osservabili. Questa osservazione è legata anche al fatto che lo spazio degli stati puri è, come abbiamo visto, il proiettivo complesso $\mathbb{P}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_0/\mathbb{C}_0$ (eventualmente a dimensione infinita), e che tale spazio quoziente risulta

[24] Tra gli esempi, consideriamo il caso in cui la varietà M coincide con TQ, il fibrato tangente di uno spazio delle configurazioni $Q = \mathbb{R}^n$ i cui punti q rappresentano le posizioni e le cui coordinate di fibra rappresentano le velocità v. Una dinamica $\delta \in \mathfrak{X}(TQ)$ ha una formulazione Newtoniana se l'evoluzione descritta da δ risulta in

$$\dot{q}^a = v^a, \quad \dot{v}^a = F^a.$$

Se la forza F è una funzione lineare di posizione e velocità (come – inter alias – nel caso dell'oscillatore armonico, con $F^a = -\omega^2 q^a$ o della particella libera, con $F^a = 0$), allora la dinamica è lineare.

[25] Per essi, rimandiamo il lettore allo studio dei sistemi di Calogero - Moser dal punto di vista della meccanica quantistica, come in [27, 28]

in una varietà (eventualmente a dimensione infinita), non uno spazio lineare. In quest'ottica sembra quindi naturale studiare se in tale spazio degli stati puri esista una nozione di sovrapposizione compatibile con l'evoluzione quantistica, evolvendo un'analisi iniziata in [29], e parimenti analizzare, all'interno del formalismo classico, dinamiche non lineari nel cui spazio delle soluzioni esista una regola di sovrapposizione, per cui da due soluzioni se ne ottiene una terza, come ad esempio nell'equazione di Riccati e più in generale nei cosiddetti sistemi di Lie-Scheffers [30].

Queste considerazioni si rivelano invero legate più ad uno studio dei fondamenti di una descrizione geometrica della meccanica quantistica e delle relazioni fra la meccanica quantistica la meccanica classica, che al problema del limite classico di una dinamica quantistica. Per riprendere la nostra analisi sul limite classico di un sistema quantistico, osserviamo che l'equazione di Schrödinger è il punto di partenza di un interessante percorso di dequantizzazione. Questo percorso evidenzia una relazione tra la linearità delle equazioni della dinamica quantistica e la non linearità delle equazioni di una dinamica classica.

Questo cammino inizia considerando una varietà Q liscia e orientabile, su cui è definito un tensore metrico che scriviamo come

$$g \,=\, g_{ab}\mathrm{d}q^a \otimes \mathrm{d}q^b$$

rispetto ad un sistema di coordinate locali $\{q^a\}_{a=1\ldots,N=\dim Q}$. Se $f \in \mathcal{F}(Q)$ è una funzione opportunamente regolare, il gradiente $\nabla f \in \mathfrak{X}(Q)$ è il campo vettoriale che soddisfa la condizione

$$g^{-1}(\mathrm{d}f, \alpha) = i_{\nabla f}\alpha \tag{46}$$

per ogni 1-forma α su Q, e l'operatore di Laplace-Beltrami è dato da

$$\Delta\phi \,=\, \mathrm{div}(\nabla\phi),$$

in cui la divergenza di un campo vettoriale X su Q è definita da $L_X\tau = (\mathrm{div}X)\tau$ rispetto ad una forma di volume [26] τ su Q. Consideriamo il sistema quantistico descritto dall'evoluzione temporale della funzione d'onda $\psi = \psi(q,t) \in \mathcal{H} = \mathcal{L}^2(Q,\tau)$ secondo l'equazione di Schrödinger relativa ad una particella di massa m in Q soggetta ad un potenziale $V(q)$ è data da[27]

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} \,=\, \hat{H}\psi \,=\, -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(q)\psi. \tag{47}$$

Visto che ψ assume valori in $\mathbb{C}$, possiamo scriverla in termini di un'ampiezza e di una fase,

$$\psi(q,t) \,=\, A(q,t)e^{iS(q,t)/\hbar} \tag{48}$$

in cui A, S sono funzioni a valori reali. L'equazione di Schrödinger dà origine a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial t} \,+\, \frac{1}{m}\nabla A\cdot\nabla S \,+\, \frac{1}{2m}A\Delta S \,=\, 0,\\ &A\left(\frac{\partial S}{\partial t} \,+\, \frac{1}{2m}\nabla S\cdot\nabla S \,+\, V(q)\right) \,=\, \frac{\hbar^2}{2m}\Delta A \end{aligned} \tag{49}$$

in cui intendiamo, come prodotto scalare di due gradienti, l'espressione

$$\nabla f\cdot\nabla g \,=\, g(\nabla f,\nabla g) \,=\, g^{-1}(\mathrm{d}f,\mathrm{d}g). \tag{50}$$

La prima relazione in (49) fornisce una equazione di continuità per la densità di probabilità $\rho = A^2$ ed il vettore corrente $\nabla S/m$, che si può scrivere come

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \,+\, \frac{1}{m}\,\mathrm{div}(\rho\nabla S) \,=\, 0 \tag{51}$$

e che dipende dall'autoaggiuntezza dell'operatore Hamiltoniano $\hat{H}$ in (47), o equivalentemente dall'unitarietà della dinamica quantistica.

Nella regione in cui $A(q,t) \neq 0$, la seconda equazione in (49) si può scrivere come

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla S\cdot\nabla S + V(q) - \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\Delta A}{A} \,=\, 0. \tag{52}$$

Essa è l'equazione di Hamilton-Jacobi [31, 32] rispetto alla struttura simplettica canonica su T^*Q con Hamiltoniana classica

$$H \,=\, \frac{1}{2m}\,g^{ab}p_ap_b \,+\, V(q) \,-\, \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\Delta A}{A} \tag{53}$$

[26]Sebbene la divergenza di un campo vettoriale X possa essere definita per ogni dato volume τ che dia una orientazione a Q, si considera, se su Q si ha una metrica g, la forma di volume $\tau \,=\, \sqrt{\det[g_{ab}]}\mathrm{d}q^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^N$.

[27]Osserviamo che il potenziale $V(q)$ deve essere tale che l'operatore Hamiltoniano $\hat{H}$ sia limitato dal basso.

in cui l'energia potenziale ha un termine di origine quantistica, variabile nel tempo t, che dipende da $\hbar$. Vediamo quindi che l'equazione di Schrödinger, che è una equazione alle derivate parziali lineare per la funzione d'onda ψ a valori complessi, si può scrivere in termini di ampiezza e fase come una coppia di equazioni alle derivate parziali non lineari. Una di esse è una equazione di continuità per la densità di probabilità; l'altra è una equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di fase S, ovvero

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

con Hamiltoniana (53). Il primo passo dell'approssimazione JWKB consiste nel trascurare, rispetto al termine $V(q)$, il termine potenziale che dipende da $\hbar$ e A, ovvero disaccoppiare, nelle regioni in cui $A \neq 0$, l'equazione per la fase dall'equazione per l'ampiezza della funzione d'onda. L'equazione che ne risulta è naturalmente

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla S \cdot \nabla S + V(q) = 0, \qquad (54)$$

che scriviamo, per l'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} g^{ab} p_a p_b + V(q) \qquad (55)$$

indipendente dal tempo, come

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = E \qquad (56)$$

per $S = W - Et$. Un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi nella forma (56), ovvero una funzione $W(q, x)$ che dipende in modo essenziale da un numero di parametri x pari alla dimensione di Q per cui

$$\det \left| \frac{\partial^2 W}{\partial q^a \partial x^a} \right| \neq 0, \qquad (57)$$

permette di definire una trasformazione canonica su T^*Q data da $(q, p) \quad \mapsto \quad (x, k)$ con

$$p_a = \frac{\partial W}{\partial q^a}, \qquad k_a = \frac{\partial W}{\partial x^a},$$

che riduce il sistema all'equilibrio, ovvero riduce le equazioni del moto a $\dot{x}^a = 0$ e $\dot{k}_a = 0$. Al medesimo ordine di approssimazione, è possibile dimostrare (vedi anche [33]), che la soluzione per l'ampiezza A dall'equazione di continuità in (49) è proprio

$$\rho = \det \left| \frac{\partial^2 W}{\partial q^a \partial x^a} \right| \neq 0, \qquad (58)$$

e che pertanto possiamo scrivere una soluzione semiclassica all'ordine più basso in uno sviluppo in $\hbar$ come

$$\psi = \sqrt{\rho}\, e^{it(W-Et)/\hbar}. \qquad (59)$$

È interessante osservare che, se $\psi = Ae^{iS/\hbar}$ e $\tilde{\psi} = \tilde{A}e^{i\tilde{S}/\hbar}$ sono una coppia di soluzioni della dinamica nell'approssimazione che stiamo considerando (ovvero la condizione che permette di trascurare in (53) è soddisfatta per entrambe le ampiezze, indipendentemente) si ha che in generale tale condizione di approssimazione non vale per la somma $\psi + \tilde{\psi}$. Inoltre si vede che, pur nei casi in cui la condizione di approssimazione sia valida per la somma $\psi + \tilde{\psi}$, tale somma non è necessariamente una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata: la linearità dell'equazione della dinamica quantistica non si conserva nel limite semiclassico che dà una dinamica classica Hamiltoniana descritta nella formulazione di Hamilton-Jacobi.

4.1 Equazioni d'onda e formalismo *à la* Hamilton-Jacobi

Le relazioni tra l'equazione di Schrödinger ed il formalismo *à la* Hamilton-Jacobi che abbiamo succintamente descritto permette alcune ulteriori interessanti osservazioni, sia nell'ottica del limite classico che della quantizzazione di una dinamica classica.

Abbiamo visto che la teoria di Hamilton-Jacobi venne ideata in [34] come metodo di soluzione delle equazioni del moto nella formulazione Hamiltoniana. Se la funzione $W = W(q, x)$ è un integrale completo della (56), allora si considerano le equazioni differenziali ordinarie su Q date da

$$\frac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_a}\Big|_{p_a = \frac{\partial W}{\partial q^a}} : \qquad (60)$$

le relazioni

$$p_a = \frac{\partial W}{\partial q^a}\Big|_{q^a = q^a(t)}, \qquad (61)$$

in cui le funzioni $q^a(t)$ risolvono (60), danno un insieme di curve integrali per le equazioni di Hamilton relative alla Hamiltoniana H in (55) con dati iniziali

$$(q^a(0), p_a(0)) = \frac{\partial W}{\partial q^a}(q(0), x)). \qquad (62)$$

Un integrale completo W fornisce pertanto una famiglia di equazioni differenziali ordinarie (che corrispondono ai diversi valori assunti dalle variabili x) su Q le cui soluzioni sono sufficienti, attraverso la (61), a dare soluzioni delle equazioni di Hamilton su T^*Q.

Relazioni simili appaiono nell'analisi geometrica di equazioni ondulatorie $D\psi = 0$ date dall'azione di operatori differenziali iperbolici che agiscono su una funzione d'onda ψ definita su uno spazio delle configurazioni Q. Se ψ ha valori complessi, la fase S di tale funzione d'onda soddisfa la cosiddetta equazione caratteristica, che nell'equazione d'onda data dall'operatore di D'Alembert descrive la propagazione per fronti d'onda. Essa risulta del tipo di Hamilton-Jacobi per una funzione Hamiltoniana su T^*Q in cui alle componenti del gradiente ∇S corrispondono le componenti dei momenti canonici. La proiezione su Q delle equazioni di Hamilton associate, come in (60), fornisce le equazioni delle bicaratteristiche dell'operatore d'onda D. Nel linguaggio dell'ottica, esse descrivono l'evoluzione dei raggi del sistema. Il metodo JWKB consiste, in tale prospettiva, a considerare lo studio semiclassico della dinamica quantistica come l'analogo dello studio dell'ottica geometrica come approssimazione per l'ottica ondulatoria. Il confronto in (52) tra $V(q)$ ed il termine in $\hbar\Delta A/2mA$ si interpreta in modo analogo al confronto tra la lunghezza d'onda di un onda elettromagnetica e la scala di variazione dell'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga.

Ancora: all'interno del formalismo che stiamo descrivendo, ad una equazione d'onda $D\psi = 0$ in cui D è un operatore differenziale di ordine n su Q, corrisponde una funzione H (la (55)) a valori *reali* su T^*Q, dato da un polinomio di grado n nelle coordinate momento p. Tale corrispondenza può essere letta come un ulteriore modo di formalizzare una corrispondenza tra operatori differenziali che agiscono su una funzione d'onda, ed il proprio simbolo. Non è questo il modo più generale per associare ad un operatore differenziale su Q un simbolo, ovvero una funzione definita su uno spazio a dimensione doppia di quella di Q. Una analisi più ampia è in [26, 32, 35].

Ai fini di questa nota, ci interessa sottolineare che l'equazione di Schrödinger, scritta come in (48), ha una approssimazione semiclassica non lineare, descritta attraverso l'equazione di Hamilton-Jacobi e una equazione di continuità che è conseguenza dell'unitarietà dell'evoluzione quantistica. Che una teoria lineare (ovvero la meccanica quantistica) abbia una approssimazione non lineare (ovvero la meccanica classica), mentre le equazioni lineari appaiono in molti problemi in fisica come approssimazioni (teorie effettive) di equazioni non lineari, indica che lo studio della meccanica quantistica obbliga ad un cambio di prospettiva nella lettura delle relazioni tra linearità e non linearità: un processo di unificazione sembra far emergere teorie più generali e lineari, rispetto ad un processo di riduzione [27, 6]. In quest'ottica, il problema della quantizzazione di un sistema classico appare come un problema in cui una dinamica non lineare debba essere opportunamente linearizzata e resa unitaria: all'interno delle descrizione à la Schrödinger in termini di operatori differenziali, ciò significa passare dalle soluzioni di una equazione di Hamilton-Jacobi per una funzione di fase ad una descrizione in termini anche di una ampiezza conservata con una opportuna equazione di trasporto. Tale problema risulta naturalmente non univoco, come si vede considerando che la stessa funzione su T^*Q è il simbolo di operatori differenziali diversi.

5. La dinamica quantistica come evoluzione unitaria su uno spazio di Kähler

Come abbiamo visto nelle sezioni precedenti, la meccanica quantistica è stata fondata su strutture algebriche lineari. In questa sezione vogliamo descrivere come l'evoluzione quantistica si possa descrivere attraverso il formalismo della geometria differenziale [27, 36, 37], e come all'interno di questo formalismo l'equazione di Schrödinger (presentata in (4)-(5)) si possa scrivere come un equazione differenziale ordinaria del primo ordine, ovvero come un campo vettoriale su una opportuna varietà M, in modo analogo alla descrizione classica di una evoluzione temporale. La struttura geometrica [28] che permette ciò è un tensore di Kähler su M. Tale tensore permette di definire sia una struttura simplettica che una struttura metrica Riemanniana (che vengono dette compatibili), e l'equazione di Schrödinger risulta unitaria, ovvero Hamiltoniana e di Killing rispetto alla metrica. Lo scopo di questa sezione è descrivere il modo attraverso cui una dinamica si possa scrivere attraverso un campo vettoriale, su uno spazio eventualmente a dimensione infinita, e che questo fornisce un quadro per lo studio del limite classico.

Il primo passo di questa analisi è mostrare come l'equazione di Schrödinger su uno spazio di Hilbert a dimensione finita si possa scrivere in termini di un campo vettoriale su uno spazio vettoriale reale. Tale campo vettoriale risulta unitario, nel senso che mostreremo.

Iniziamo pertanto considerando uno spazio di Hilbert $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^N$ a dimensione finita, in cui denotiamo il prodotto scalare come $\langle z|z'\rangle$ e assumiamo che tale prodotto scalare sia $\mathbb{C}$-lineare nel secondo argomento e $\mathbb{C}$-antilineare nel primo. Se $\{e_a\}_{1,\dots,N}$ è una base Hermitiana per $\mathcal{H}$, le componenti di z rispetto ad essa sono date da

$$\langle e_a|z\rangle \,=\, q_a + ip_a,$$

con $(q^a, p_a) \in \mathbb{R}$. Possiamo allora identificare $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N \simeq \mathbb{R}^{2N} \simeq \mathcal{H}_\mathbb{R}$ con un sistema globale di coordinate dato da (q,p). Visto che $\mathbb{R}^{2N}$ è uno spazio vettoriale, abbiamo $T\mathbb{R}^{2N} \simeq \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}$ e possiamo scrivere il prodotto scalare Hermitiano in forma reale come

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial}{\partial q_a}, \frac{\partial}{\partial q_b}\rangle &= \langle \frac{\partial}{\partial p_a}, \frac{\partial}{\partial p_b}\rangle = \delta_{ab},\\ \langle \frac{\partial}{\partial q_a}, \frac{\partial}{\partial p_b}\rangle &= -\langle \frac{\partial}{\partial p_a}, \frac{\partial}{\partial q_b}\rangle = i\delta_{ab},\end{aligned} \tag{63}$$

ovvero come tensore

$$\begin{aligned}\mathrm{h} \;&=\; (\mathrm{d}q_a \otimes \mathrm{d}q_a \,+\, \mathrm{d}p_a \otimes \mathrm{d}p_a)\\ &+\; i\,(\mathrm{d}q_a \otimes \mathrm{d}p_a \,-\, \mathrm{d}p_a \otimes \mathrm{d}q_a)\\ &=\; \mathrm{g} + i\,\omega\end{aligned} \tag{64}$$

su $\mathbb{R}^{2N}$. La parte reale g fornisce una metrica Euclidea, la parte immaginaria ω la forma simplettica canonica. Il tensore (1-1) dato da

$$\mathrm{J} \,=\, \frac{\partial}{\partial p_a} \otimes \mathrm{d}q_a \,-\, \frac{\partial}{\partial q_a} \otimes \mathrm{d}p_a, \tag{65}$$

soddisfa $\mathrm{J}^2 = -1$, e dà una struttura complessa su $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ compatibile sia con la struttura metrica che con quella simplettica, poiché si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(Ju, v) \,&=\, \omega(u,v),\\ \mathrm{g}(Ju, Jv) \,&=\, \mathrm{g}(u,v),\\ \omega(Ju, Jv) \,&=\, \omega(u,v)\end{aligned} \tag{66}$$

per ogni coppia di campi vettoriali u, v su $\mathcal{H}_\mathbb{R}$. Lo spazio $(\mathcal{H}_\mathbb{R}, \mathrm{J}, \mathrm{g}, \omega)$ è pertanto una varietà di Kähler (vedi [**?**]), in cui J ha torsione nulla (è una condizione di integrabilità globale) e struttura simplettica ω. Se invece si adottano coordinate $z_a = q_a + ip_a$ e $\bar{z}_a = q_a - ip_a$ si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{g} \,&=\, \frac{1}{2}\,(\mathrm{d}z_a \otimes \mathrm{d}\bar{z}_a \,+\, \mathrm{d}\bar{z}_a \otimes \mathrm{d}z_a),\\ \omega \,&=\, \frac{i}{2}\,\mathrm{d}z_a \wedge \mathrm{d}\bar{z}_a,\\ \mathrm{J} \,&=\, i\left(\frac{\partial}{\partial z_a} \otimes \mathrm{d}z_a \,-\, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_a} \otimes \mathrm{d}\bar{z}_a\right).\end{aligned} \tag{67}$$

Le trasformazioni unitarie su $\mathcal{H}$, ovvero quelle lineari per cui la struttura Hermitiana h è invariante, risultano date equivalentemente da una delle intersezioni

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(N) \;&=\; \mathrm{O}(2N,\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}(2N,\mathbb{R})\\ &=\; \mathrm{GL}(N,\mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(2N,\mathbb{R})\\ &=\; \mathrm{Sp}(2N,\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(N,\mathbb{C}),\end{aligned} \tag{68}$$

in cui il gruppo ortogonale è quello che lascia invariata la metrica g, quello simplettico è quello che lascia invariata la forma simplettica ω. Un generico campo vettoriale lineare su $\mathbb{R}^{2N}$ si scrive come

$$X_W \,=\, W_{ab}x_b\partial_a$$

(indicato con $\{x_a\}_{a=1,\dots,2N} = (q,p)$ le coordinate

[28] Una interessante introduzione alla nozione di struttura di Kähler e alla sua analisi nella descrizione di sistemi fisici è in [38], a cui rimandiamo il lettore interessato.

globali su $\mathbb{R}^{2N}$) rispetto ad una matrice W ad elementi in $\mathbb{R}$. Esso genera un gruppo ad un parametro di trasformazioni unitarie se e solo se vale uno tra gli insiemi di condizioni equivalenti dati da [29]

- $L_{X_W}\mathrm{J} = 0$, e $L_{X_W}\mathrm{g} = 0$;
- $L_{X_W}\mathrm{J} = 0$, e $L_{X_W}\omega = 0$;
- $L_{X_W}\mathrm{g} = 0$, e $L_{X_W}\omega = 0$.

che corrispondono alle intersezioni in (68). Queste condizioni sono realizzate se e solo se la matrice $W \in \mathbb{M}^{2N,2N}(\mathbb{R})$ si scrive come

$$W = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad A = -A^T,\ B = B^T. \tag{69}$$

I corrispondenti campi vettoriali lineari X_W sono detti Hermitiani: essi sono sia Hamiltoniani rispetto alla forma simplettica ω che di Killing rispetto alla metrica g. Ciò implica anche che J risulti invariante lungo il flusso che generano. La corrispondente funzione Hamiltoniana, ovvero la f_W su $\mathbb{R}^{2N}$ per cui $i_{X_W}\omega = \mathrm{d}f_W$ risulta quadratica, ovvero

$$\begin{aligned} & f_W(q,p) \\ = \;& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_a & p_a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{ab} & -A_{ab} \\ A_{ab} & B_{ab} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_b \\ p_b \end{pmatrix} \\ = \;& \frac{1}{2}\bar{z}_a(H_{ab})z_b = \frac{1}{2}\langle z|H|z\rangle \\ = \;& f_H(z,\bar{z}) \end{aligned} \tag{70}$$

con $H \in \mathbb{M}^{N,N}(\mathbb{C})$ data da $H = B + iA = H^\dagger$. La dinamica unitaria data da X_W (o equivalentemente da X_H) si può scrivere come

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}t} &= H_{ab}z_b, \\ -i\hbar\frac{\mathrm{d}\bar{z}_a}{\mathrm{d}t} &= \bar{H}_{ab}\bar{z}_b, \end{aligned} \tag{71}$$

pertanto possiamo identificare il settore olomorfo di $\mathbb{C}^{2N}$ con $\mathbb{R}^{2N}$ e osservare che una dinamica quantistica (ovvero una equazione à la Schrödinger) sullo spazio vettoriale di Kähler $(\mathcal{H}, \mathrm{h} = \mathrm{g} + i\omega)$ è data da tutti e soli i campi vettoriali lineari Hermitiani su $(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, \mathrm{J}, \mathrm{g}, \omega)$.

[29] L'operatore L_{X_W} indica la derivata di Lie di un tensore lungo il campo L_{X_W}, ovvero la derivata di un tensore lungo le curve integrali di X_W.

La dinamica di Schrödinger (71) si può anche scrivere in termini della parentesi di Poisson

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial q_a} \wedge \frac{\partial}{\partial p_b} = -2i\,\frac{\partial}{\partial z_a} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}_a}, \tag{72}$$

corrispondente alla struttura simplettica ω. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \dot{q}_a &= \frac{1}{\hbar}\{q_a, f_W\}, \\ \dot{p}_a &= \frac{1}{\hbar}\{p_a, f_W\} \end{aligned} \tag{73}$$

su $\mathcal{H}$ rispetto a coordinate reali (q,p) e una matrice W che soddisfa (69) e

$$\begin{aligned} \dot{z}_a &= \frac{1}{\hbar}\{z_a, f_H\}, \\ \dot{\bar{z}} &= \frac{1}{\hbar}\{\bar{z}_a, f_H\} \end{aligned} \tag{74}$$

rispetto a coordinate olomorfe, con $H = H^\dagger$. Così come il tensore di Poisson permette di associare ad ogni funzione f su $\mathcal{H}$ un campo vettoriale Hamiltoniano X_f, anche la struttura metrica, scritta in forma controvariante,

$$\begin{aligned} G &= \frac{\partial}{\partial q_a}\otimes\frac{\partial}{\partial q_a} + \frac{\partial}{\partial p_a}\otimes\frac{\partial}{\partial p_a} \\ &= 2\,(\frac{\partial}{\partial z_a}\otimes\frac{\partial}{\partial \bar{z}_a} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_a}\otimes\frac{\partial}{\partial z_a}) \end{aligned} \tag{75}$$

permette di associare ad ogni funzione f (come in (46)) un campo *gradiente* ∇f su $\mathcal{H}$, ed il prodotto scalare tra essi si può scrivere come una parentesi simmetrica (come in (50)) che denotiamo come

$$(f, f') = G(\mathrm{d}f, \mathrm{d}f'). \tag{76}$$

Consideriamo ora la corrispondenza, che amplia la (70) data da

$$A \mapsto f_A(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\langle z|A|z\rangle. \tag{77}$$

Essa risulta una biiezione tra l'insieme $\mathbb{M}^{N,N}(\mathbb{C})$ e l'insieme delle funzioni quadratiche nelle coordinate lineari $z\bar{z}, z$. Visto che sia il tensore di Poisson che il tensore metrico (72)-(75) sono omogenei di grado (-2), è immediato verificare che

$$\begin{aligned} \{f_A, f_B\} &= f_{-i[A,B]} = -i\,f_{[A,B]}, \\ (f_A, f_B) &= f_{AB+BA} \end{aligned} \tag{78}$$

da cui si ha

$$f_{AB} = \frac{1}{2}(f_A, f_B) + \frac{i}{2}\{f_A, f_B\}. \qquad (79)$$

Questa relazione mostra che le spazio vettoriale delle funzioni quadratiche su $\mathcal{H}$ non è un'algebra rispetto al prodotto puntuale, ma la corrispondenza (77) induce in essa una struttura di prodotto non commutativo (bilineare) che rappresenta il prodotto non commutativo in $Op(\mathcal{H})$, in analogia al prodotto à la Moyal descritto precedentemente. Al commutatore in $Op(\mathcal{H})$ corrisponde ancora una volta una struttura di Poisson, al prodotto di Jordan corrisponde una struttura metrica compatibile (nel senso di Kähler, vedi la (66)) e pertanto equivalentemente una struttura complessa J. L'evoluzione quantistica, che è lineare e unitaria, preserva i tensori $\mathrm{g}, \omega, \mathrm{J}$.

La domanda naturale diviene ora se sia possibile descrivere questa dinamica sullo spazio degli stati puri del sistema, ovvero sul proiettivo complesso dato dal quoziente $\mathbb{P}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_0/\mathbb{C}_0$, che non è più uno spazio lineare, ma una varietà. Invero, è possibile dimostrare che tale quoziente si può realizzare come base di un fibrato principale, le cui fibre sono le distribuzioni integrali generate dai campi vettoriali Δ e Γ, dove

$$\Delta = q_a \frac{\partial}{\partial q_a} + p_a \frac{\partial}{\partial p_a}$$

è il generatore infinitesimo del gruppo delle dilatazioni (il campo di Eulero) e codifica la presenza di una struttura lineare su $\mathbb{R}^{2N}$, mentre $\Gamma = \mathrm{J}(\Delta)$ è il generatore infinitesimo dell'azione del fattore di fase da $\mathbb{C}$ come rotazione in $\mathbb{R}^{2N}$ intorno ad un punto fisso dato dallo zero. Tale quoziente risulta ancora una varietà di Kähler. A partire [30] dai tensori Λ e G su $\mathcal{H}$ si osserva che i tensori

$$\tilde{\Lambda} = \langle z|z\rangle\,\Lambda,$$
$$\tilde{G} = \langle z|z\rangle\,G$$

non forniscono una struttura di Kähler su $\mathcal{H}$, ma sono proiettabili sul quoziente $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, dove invero forniscono l'inverso di una struttura simplettica $\tilde{\omega}$ e un tensore metrico $\tilde{g}$ globalmente compatibili [31], ovvero una struttura di Kähler. Una funzione $f : \mathbb{P}(\mathbb{C}^N) \to \mathbb{R}$ si dice Kähleriana se il corrispondente campo vettoriale Hamiltoniano X_f rispetto a $\tilde{\omega}$ è anche di Killing rispetto alla metrica $\tilde{g}$ di Fubini-Study, una funzione $f : \mathbb{P}(\mathbb{C}^N) \to \mathbb{C}$ si dice Kähleriana se sono Kähleriane sia la sua parte reale che la sua parte immaginaria. In particolare, f risulta Kähleriana se e solo se [32] esiste una matrice $A \in \mathbb{M}^{N,N}(\mathbb{C})$ per cui

$$f = e_A = \frac{\langle z|A|z\rangle}{\langle z|z\rangle}. \qquad (80)$$

In particolare, il campo vettoriale unitario dato da X_H in (74) in $\mathcal{H}$ risulta anche esso proiettabile su $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, ovvero risulta una derivazione dell'algebra delle funzioni su $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Non solo: esso risulta unitario rispetto alla struttura di Kähler introdotta in precedenza, e la sua Hamiltoniana risulta la funzione $e_H/2$. Le funzioni di Kähler forniscono un ulteriore esempio di rappresentazione dell'algebra non commutativa delle matrici, con un prodotto non commutativo dato da

$$\begin{aligned} e_{AB} &= e_A * e_B \\ &= e_A e_B + \frac{1}{2}[(e_A, e_B)_{\tilde{g}} + i\{e_A, e_B\}_{\tilde{\omega}}] \end{aligned}$$

che risulta ancora una deformazione di quello puntuale lungo il tensore metrico $\tilde{g}$ e la struttura simplettica $\tilde{\omega}$.

Questa descrizione si può estendere al caso in cui $\dim \mathcal{H} = \infty$, come analizzato in dettaglio in [42, 43, 44], se l'algebra non commutativa delle matrici su $\mathbb{C}$ viene sostituita dall'algebra $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ degli operatori limitati su $\mathcal{H}$. In particolare, si può vedere che la struttura di commutatore sullo spazio degli operatori è legato alla struttura di Poisson rispetto a $\tilde{\omega}$ sullo spazio degli stati puri. L'evoluzione temporale (generata da un operatore Hamiltoniano H) dell'osservabile $A \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ risulta nell'evoluzione temporale del suo valor medio, ovvero della funzione Kähleriana e_A. Tale evoluzione è sia simplettica che di Killing sul

[30] Un'analisi più completa di questa procedura di riduzione è in [39, 40, 41]. Accanto ad essa, si dimostra la struttura di Kähler si può indurre attraverso le proprietà di una momentum map sul proiettivo complesso poichè esso risulta un'orbita dall'azione simplettica del gruppo unitario.

[31] In particolare, il tensore metrico che ne risulta coincide con quello di Fubini-Study.

[32] Notiamo infatti che $\mathbb{P}(\mathbb{C}^N)$ non è uno spazio vettoriale, e pertanto non esiste una definizione consistente di funzioni lineari, o quadratiche.

proiettivo complesso, e si scrive come

$$\frac{\mathrm{d}e_A}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}\, e_{[A,H]} = -\frac{i}{\hbar}\{e_A, e_H\}_{\tilde{\omega}}. \qquad (81)$$

Questa relazione generalizza il teorema di Ehrenfest, e descrive l'evoluzione quantistica in termini di valor medi delle osservabili su uno spazio di Kähler.

Prima di concludere questa sezione, osserviamo che la struttura metrica $\tilde{g}$ permette di descrivere le relazioni di indeterminazione, che nel limite classico non sono presenti, così ritrovando una analogia con l'analisi condotta all'interno del formalismo à la Weyl-Wigner. Anche la struttura complessa, la cui presenza in una geometria di Kähler è equivalente a quella di una metrica compatibile con la forma simplettica, subisce lo stesso destino.

Conclusioni

In questa nota abbiamo provato a descrivere alcune questioni legate al problema della dequantizzazione di un sistema quantistico. Abbiamo presentato il formalismo à la Weyl-Wigner all'interno del problema di circostanziare la forma del principio di corrispondenza à la Dirac; abbiamo descritto la cosiddetta approssimazione semiclassica (o di iconale) a partire dall'equazione di Schrödinger al fine di analizzare come si ottenga una classica non lineare a partire da una descrizione quantistica lineare del moto di un sistema. Al termine, abbiamo descritto la geometria dello spazio degli stati puri di un sistema quantistico, evidenziando che la dinamica quantistica risulta naturalmente unitaria rispetto ad una struttura di Kähler su uno spazio non lineare dato dal proiettivo complesso di uno spazio di Hilbert complesso e separabile a dimensioni infinita.

Chiudiamo questa nota con altre due questioni, che meritano una ulteriore futura analisi. La prima riguarda la possibilità di studiare come un prodotto commutativo sorga come contrazione di un prodotto non commutativo, evolvendo una idea descritta in [45], la cui origine poggia sull'analisi di un esperimento di diffusione da doppia fenditura di un sistema in cui la posizione di una lastra di conduttore permette di definire un opportuno parametro che fornisce una scala per quantificare la classicalità (ovvero) la non classicalità di un insieme di misure. La seconda riguarda il problema di sviluppare una nozione di integrabilità (nel sensi di Arnold - Liouville), per una dinamica quantistica, visto che nel caso classico una dinamica lineare e unitaria è sempre completamente integrabile.

[1] N. Bohr, *On the quantum theory of line spectra*, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturvidensk. og Mathem. 8 (1918), ripubblicato come parte di un testo dal medesimo titolo da Dover, NY 2005;

[2] P.A.M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, 4th edition 1958, Pergamon Oxford.

[3] M.C. Gutzwiller, Resource Letter ICQM-1: The interplay between classical and quantum mechanics, Am. Jour. Physics 66 (1998) 304-324.

[4] G.G. Emch, *Geometric dequantization and the correspondence problem*, Int. J. Theor. Phys. 22 (1983) 397-420;

[5] Z. Li, Y. Mao, M. Weilenmann, A. Tavakoli, H. Chen, L. Feng, S. Yang, M.O. Renou, D. Trillo, T. Le, N. Gisin, A. Acín, M. Navascués, Z. Wang, J. Fan, *Testing real quantum theory in an optical quantum network*, Phys. Rev. Lett. 128 (2022) 040402.

[6] G. Marmo, E.J. Saletan, A. Simoni, B. Vitale, *Dynamical system: a differential geometric approach to symmetry and reduction*, John Wiley New York 1985;

[7] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics I*, Springer Berlin Heidelberg 1987;

[8] O. Bratteli, *Derivations, dissipations and group actions on C^*-algebras*, Lect. Notes in Math. 1229, Springer Berlin Heidelberg 1986;

[9] K. Landsman, *Foundations of quantum theory*, Springer Open 2017;

[10] E. Schrödinger, *Zum heisenbergschen Unschärfeprinzip*, Ber. Kgl. Akad. Wiss. 296 (1930) 296-303.

[11] H.P. Robertson, *A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation*, Phys. Rev. 35 (1930) 667;

[12] H.P. Robertson, *An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation*, Phys. Rev. 46 (1934) 794-801;

[13] G. Rudolph, M. Schmidt, *Differential Geometry and Mathematical Physics. Part I: Manifolds, Lie groups and Hamiltonian systems*, Springer 2013;

[14] P.A.M. Dirac, *The fundamental equations of quantum mechanics*, Proc. Royal Soc. London. Series A. 109 (1925) 642-653;

[15] V. Gayral, J.M. Gracia-Bondía, B. Iochum, T. Schücker, J.C. Varilly, *Moyal planes are spectral triples*, Comm. Math. Phys. 246 (2004) 569;

[16] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Varilly, *Algebras of distributions suitable for phase space quantum mechanics I*, J. Math. Phys. 29 (1988) 869-879;

[17] J. C. Varilly, J. M. Gracia-Bondía, *Algebras of distributions suitable for phase space quantum mechanics II – Topologies on the Moyal algebra*, J. Math. Phys. 29 (1988) 880-887;

[18] G. Marmo, G. Scolarici, A. Simoni, F. Ventriglia, *The quantum-classical transition: the fate of the complex struture*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 2 (2005) 127-145;

[19] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization – I Deformations of symplectic structures*, Ann. Phys. 111 (1978) 61-110;

[20] M. Bertelson, M. Cahen, S. Gutt, *Equivalence of star products*, Class. Quantum Grav. 14 (1997) 93-107;

[21] M. Schlichenmaier, *Berezin-Toeplitz quantization for compact Kähler manifolds, a review of results*, Adv. Math. Phys. 927180 (2010) Hindawi;

[22] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. 66 (2003) 157-613;

[23] A. Zampini, *Applications of the Weyl-Wigner formalism to noncommutative geometry*, Ph.D. thesis 2005. Una copia è su arXiv:hep-th/0505271.

[24] A. Ibort, V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *An introduction to the tomographic picture of quantum mechanics*, Phys. Scr. 79 (2009) 065013.

[25] A. Perelomov, *Generalised coherent states and their applications*, Text Monograph in Physics, 1986, Springer Berlin;

[26] J.F. Cariñena, E. Martinez, G. Marmo, X. Gràcia, M.C. Muñoz-Lecanda, *A quantum route to Hamilton-Jacobi equation: comments and remarks*, Banach Centre Pub. 110 (2016) 41-56;

[27] J.F. Cariñena, L.A. Ibort, G. Marmo, G. Morandi, *Geometry from Dynamics, classical and quantum*, Springer Dordrecht 2015;

[28] P. Etingof, *Lectures on Calogero - Moser systems*, https://math.mit.edu/ etingof/zlecnew.pdf;

[29] V.I. Man'ko , G. Marmo, E.C.G. Sudarshan, F. Zaccaria, *Interference and entanglement: an intrinsic approach*, J.Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 7137-7157;

[30] J.F. Cariñena, J. Grabowski, G. Marmo, *Lie-Scheffers systems: a geometric approach*, Bibliopolis 2000, Napoli.

[31] G. Marmo, G. Morandi, N. Mukunda, *A geometrical approach to the Hamilton-Jacobi form of dynamics and its generalisations*, Riv. Nuovo Cimento 13 (1990) 1-74;

[32] G. Marmo, G. Morandi, N. Mukunda, *The Hamilton-Jacobi theory and the analogy between classical and quantum mechanics*, J. Geom. Mech. 1 (2009) 317-355;

[33] G. Esposito, G. Marmo, E.C.G. Sudarshan, *From classical to quantum mechanics*, Cambridge Univ. Press 2004, Cambridge;

[34] C.G. Jacobi, *Jacobi's lecture on dynamics*, ed. A. Clebsch (2nd. rev. ed.) Hindustan Book Ag 1884/2009;

[35] F. Lizzi, G. Marmo, G. Sparano, A.M. Vinogradov, *Eikonal type equations for geometrical singularities of solutions in field theory*, J. Geom. Phys. 14 (1994) 211-235;

[36] A. Ashtekar, T.A. Schilling, *Geometrical formulation of quantum mechanics*, in On Einstein's Path, 23-65; Springer Verlag 1999.

[37] E. Ercolessi, G. Morandi, G. Marmo, *From the equations of motion to the canonical commutation relations*, Riv. Nuovo Cimento **033** 08-09 (2010) 401-590.

[38] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge Univ. Press 1984, New York;

[39] J. Grabowski, M. Kuś, G. Marmo, *Geometry of quantum systems: density states and entanglement*, J Phys. A: Math. Gen. **38** (2005) 10217;

[40] J. Grabowski, M. Kuś, G. Marmo, *Symmetries, group actions and entanglement*, Open Sys. and Information Dyn. **13** (2006) 343-362.

[41] G. Marmo, A. Zampini, *Kähler geometry on complex projective spaces by reduction and unfolding*, Rend. Mat. Appl. 7 (2018) 329-345;

[42] R. Cirelli, P. Lanzavecchia, *Hamiltonian vector fields in quantum mechanics*, Nuovo Cimento, **79B** (1984) 271-283.

[43] R. Cirelli, A. Manià, L. Pizzocchero, *Quantum mechanics as an infinite dimensional Hamiltonian system with uncertainty structures – I*, J. Math. Phys. 31 (1990) 2891-2897;

[44] R. Cirelli, A. Manià, L. Pizzocchero, *Quantum mechanics as an infinite dimensional Hamiltonian system with uncertainty structures – II*, J. Math. Phys. 31 (1990) 2898-2903;

[45] A. Ibort, V.I. Man'ko, G. Marmo, C. Stornaiolo, A. Simoni, F. Ventriglia, *The quantum-to-classical transition: contractions of associative products*, Phys. Scripta 91 (2016) 045201;

Giuseppe Marmo: è Professore Emerito di fisica teorica, modelli e metodi matematici della Fisica presso l'Università di Napoli "Federico II". Ha dato notevoli contributi alla fisica matematica tra i quali la teoria dei monopoli non-abeliani, il problema inverso nel calcolo delle variazioni e nella teoria classica e quantistica dei sistemi bi-Hamiltoniani.

Alessandro Zampini: è Professore di Geometria presso l'Università di Napoli "Federico II". Si è interessato del formalismo simplettico all'interno del problema della quantizzazione di un sistema dinamico classico e del limite classico di un sistema dinamico quantistico.