

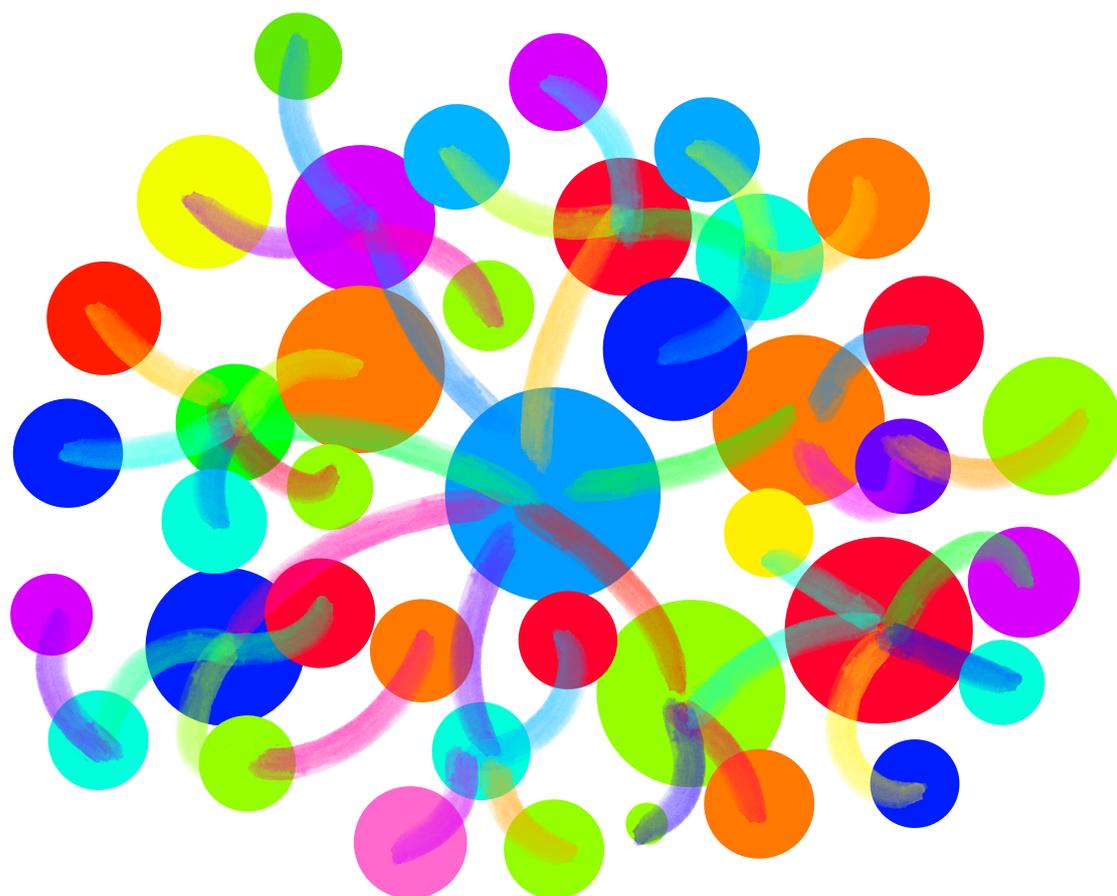
Numero XIII  
Anno 2019

  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA  
"Ennio De Giorgi"

  
UNIVERSITÀ  
DEL SALENTO

Viaggio nella Scienza

# Ithaca



Probabilità

---

## **Ithaca: Viaggio nella Scienza**

---

Una pubblicazione del Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi” dell’Università del Salento.

Registrazione presso il Tribunale di Lecce n. 6 del 30 Aprile 2013.  
e-ISSN: 2282-8079

Direttore Responsabile  
**Luigi Spedicato.**

Ideatore  
**Giampaolo Co’.**

Comitato di Redazione  
**Adriano Barra,**  
**Rocco Chirivì,**  
**Paolo Ciafaloni,**  
**Maria Luisa De Giorgi,**  
**Vincenzo Flaminio,**  
**Luigi Martina,**  
**Giuseppe Maruccio,**  
**Marco Mazzeo,**  
**Francesco Paparella,**  
**Carlo Sempi.**

Segreteria di Redazione  
**Daniela Dell’Anna.**

© 2013-2017 Dipartimento di Matematica e Fisica “*Ennio de Giorgi*”.

© 2017 per i singoli articoli dei rispettivi autori.

Il materiale di questa pubblicazione può essere riprodotto nei limiti stabiliti dalla licenza  
“*Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 3.0 Italia*” (CC BY-SA 3.0 IT).

Per il testo della licenza: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/it/deed.it>

**Ithaca: Viaggio nella Scienza**  
è disponibile sul sito:

<http://ithaca.unisalento.it/>

Scriveteci all’indirizzo:

[ithaca@unisalento.it](mailto:ithaca@unisalento.it)

---

# Ithaca

## Viaggio nella Scienza

---

XIII 2019

**3** In questo numero

**5** Probabilità e meccanica statistica  
Angelo Vulpiani

**17** Modelli di occupazione  
Carlo Sempi

**21** Problemi epistemologici in meccanica quantistica  
Claudio Garola

**33** Gli spazi metrici probabilistici  
Carlo Sempi

La lezione mancata

**41** Il Teorema di Liouville sull'integrabilità  
Luigi Martina

Breve comunicazione

**47** L'ombra del buco nero in M87  
Francesco De Paolis, Gabriele Ingrosso, Achille Nucita



---

# In questo numero

---

L'argomento principale di questo XIII numero di *Ithaca* è la **Probabilità**.

Il primo articolo, di Angelo Vulpiani, tratta di come varie definizioni del concetto di probabilità vengono utilizzate in fisica, nell'ambito della Meccanica Statistica.

Segue un articolo di Carlo Sempi in cui si discute di quali siano le ipotesi sugli eventi probabilistici in modo da ottenere quella che in Fisica viene chiamata distribuzione di Bose-Einstein, quella che seguono le particelle quantistiche indistinguibili di spin intero.

Nell'articolo di Claudio Garola, si discute di come alcuni concetti di base della probabilità e della logica quando sono utilizzate in Meccanica Classica debbano essere modificati per non generare antinomie in Meccanica Quantistica.

In un secondo articolo, Carlo Sempi presenta gli Spazi Metrici Probabilistici, mostrando alcuni esempi e discutendo le prospettive di ricerca che aprono.

Segue una *lezione mancata*, scritta da Luigi Martina, sul teorema di Liouville, uno dei teoremi fondamentali della Meccanica Analitica.

Concludiamo con una comunicazione di Achille Nucita, Francesco De Paolis e Gabriele Ingrosso riguardante l'evento che ha recentemente attratto l'attenzione dei media, generando molta confusione e disinformazione: l'identificazione di un buco nero da parte dell'Event Horizon Telescope.

Buona lettura,  
il comitato di redazione



---

# Probabilità e meccanica statistica

*La verità non si trova mediante prove, ma mediante esplorazione*

Simone Weil

**Angelo Vulpiani**

Dipartimento di Fisica, Università Sapienza, Roma

---

**L**a teoria della probabilità è ormai una branca ben sviluppata della matematica, molto rilevante sia nelle applicazioni pratiche che in ambito teorico (ad incominciare dalla meccanica statistica). Nonostante ciò è ancora un argomento non particolarmente popolare. Forse uno dei motivi di questa scarsa attenzione è la persistenza di diverse scuole (frequentista, soggettivistica, assiomatica etc) su come intendere la probabilità, cosa che a volte risulta un po' troppo accademica.

Dopo una rapida presentazione delle varie interpretazioni, in particolare dell'approccio di Kolmogorov, mi concentrerò sull'uso della probabilità per la descrizione dei sistemi deterministici caotici e i fondamenti della meccanica statistica. Verrà messo in evidenza il ruolo dei teoremi limite nella costruzione di una formulazione matematica dell'approccio di Boltzmann. Un'enfasi speciale sarà dedicata all'approccio di Khinchin per l'ergodicità ed all'idea di tipicità nei sistemi macroscopici con un numero molto grande di gradi di

libertà.

## Introduzione

Parlare in modo esauriente in poche pagine di probabilità è un'impresa praticamente impossibile. Mi limiterò a cercare di chiarire un mio punto di vista, credo condiviso da una fetta della comunità dei fisici teorici. Ovviamente la presentazione si basa ampiamente sulla mia esperienza di ricerca in meccanica statistica e sistemi caotici.

Cominciamo con una domanda ovvia: *perché vale la pena di occuparsi di probabilità?* Di motivi ce ne sono molti, eccone alcuni:

- il suo ruolo nella vita di tutti i giorni, ad esempio nel gioco del lotto, investimenti in borsa e interpretazione delle analisi mediche;
- la sua rilevanza nelle scienze e nella tecnologia;
- è ancora un argomento controverso ed esistono varie scuole che ne danno interpretazioni diverse.

La probabilità è una scienza giovane, la sua (prei)storia inizia solo nel 16-mo secolo nel frivolo mondo dei giochi (dadi, carte, scommesse); ha poi avuto un ruolo fondamentale nella meccanica statistica, nella meccanica quantistica, e più recentemente ha avuto intersezioni con il

caos deterministico e la complessità. Tuttavia, nonostante la sua grande rilevanza, la probabilità è ancora un argomento non molto popolare sia in ambito accademico che tra i media.

Inizio con una breve carrellata di opinioni diverse (anche provocatorie):

- *Tra la probabilità e la matematica c'è la stessa relazione che intercorre tra il mercato nero e l'economia (diceria maligna del passato).*

- *Le stime probabilistiche non sono falsificabili. E, naturalmente, non sono neppure verificabili ... (K. Popper).*

Popper riteneva inconsistente l'uso della probabilità in ambito deterministico, su questo tema c'è anche l'opinione esattamente opposta:

*... non credo che lei abbia ragione quando sostiene la tesi che è impossibile derivare conclusioni statistiche da una teoria deterministica. Le basti pensare alla meccanica statistica (lettera di A. Einstein a K. Popper).*

- *La vera logica di questo mondo è il calcolo delle probabilità... Questa branca della matematica che di solito viene ritenuta favorire il gioco d'azzardo, quello dei dadi e le scommesse, e quindi estremamente immorale, è la sola matematica per uomini pratici (J.Clerk Maxwell).*

- *La probabilità non esiste (B. de Finetti).*

Affermazione chiaramente provocatoria: de Finetti ha dedicato gran parte della sua vita allo studio della probabilità.

Concludo con le mie preferite:

- *Uno dei compiti più importanti della teoria delle probabilità è identificare quegli eventi la cui probabilità è vicina a zero o ad uno (A.A. Markov).*

- *La teoria della probabilità è la teoria della misura più un'anima. [L'anima è la nozione di indipendenza] (M. Kac).*

- *La probabilità, come il tempo, è un concetto inventato dagli esseri umani, e gli esseri umani devono assumersi la responsabilità delle oscurità che li circondano (J.A. Wheeler).*

## Le principali interpretazioni della probabilità

Per la probabilità persiste una lunga tradizione su come debba essere intesa, un argomento forse un po' vetusto di interesse solo per qualche dotto

accademico, vale comunque la pena una breve discussione delle più importanti interpretazioni (tra parentesi il principale sostenitore):

I- Probabilità classica (Laplace).

II- Probabilità come frequenza (von Mises).

III- Probabilità soggettiva (de Finetti), come grado di convinzione (Ramsey).

IV- Probabilità come teoria matematica (Kolmogorov).

Ogni interpretazione ha problemi e/o inconsistenze. Credo che l'aspetto veramente importante sia l'uso del calcolo della probabilità nella comprensione del mondo reale; temo che su questo difficilmente si avrà mai un'opinione completamente condivisa.

### Probabilità classica

Si definisce la probabilità di un evento  $A$  come

$$Prob(A) = \frac{N(A)}{N_T}$$

ove  $N(A)$  è il numero di casi favorevoli al verificarsi di  $A$  e  $N_T$  è numero di casi totali equiprobabili. Ad esempio per una moneta non truccata la probabilità di avere testa è  $1/2$ . Non è difficile convincersi che siamo in presenza di un circolo vizioso: la probabilità è definita in termini di equiprobabilità.

In alcuni casi (con eventi discreti) non ci sono problemi, ad esempio in tutti i giochi non truccati, usando le "simmetrie" e un po' di calcolo combinatorio è facile determinare la probabilità. Ma come regolarsi se il dado è truccato?

Ancora peggio se le variabili sono continue. È ben noto il "paradosso di Bertrand": dato un cerchio quanto vale la probabilità che una corda tracciata a caso sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto? Non sembra esserci una risposta unica. In realtà non c'è alcun paradosso, siamo semplicemente davanti ad una domanda mal posta: si può tracciare a caso in modi diversi (in pratica assumendo una densità di probabilità uniforme per diverse variabili) ottenendo così diverse risposte.

### Probabilità come frequenza

Si ha:

$$Prob(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(A)$$

ove  $f_N(A)$  è la frequenza dell'evento  $A$  in  $N$  tentativi.

In termini formali: per ogni  $\epsilon$  si ha:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}(|f_N(A) - \text{Prob}(A)| > \epsilon) = 0.$$

Anche in questo caso si potrebbe obiettare che  $c'$  è un circolo vizioso: la probabilità è definita in termini di eventi con probabilità nulla.

Questa interpretazione della probabilità può essere introdotta solo per eventi ripetibili. A livello pratico è naturale chiedersi quanto grande deve essere  $N$  e come regolarsi con gli eventi a probabilità molto piccola.

### Interpretazione soggettiva della probabilità

Si definisce la  $\text{Prob}(A \text{ secondo il Signor Rossi})$  come la massima somma che il Signor Rossi è disposto a scommettere per ricevere 1 se l'evento  $A$  accade, accettando che altri possano scommettere contro di lui alle stesse condizioni.

Con questa definizione si ha un ovvio vantaggio: si può definire la probabilità di un qualsiasi evento, ad esempio *che domani la Terra sarà invasa da alieni*. Inutile dire che su questo delicato aspetto alcuni hanno da ridire, primo tra tutti Kolmogorov.

Ci sono ovviamente anche svantaggi, infatti la probabilità dipende dalla persona, così la probabilità di un evento può essere diversa per il Signor Rossi e la Signora Bianchi.

Questa interpretazione della probabilità non è molto popolare nell'ambito delle scienze naturali, mentre è quasi sempre accettata da chi lavora nelle scienze sociali. Anche in questi ambiti si pone il problema pratico di come determinare una probabilità; ad esempio per fissare il premio di un'assicurazione.

### Probabilità come teoria matematica

Questo approccio è nato per rispondere alle esigenze di chiarezza (vedi il paradosso di Bertrand), è iniziato alla fine del 19-mo secolo (Borel, Cantelli, Lévy, Khinchin, von Mises, etc) e ha la sua codifica ufficiale nel libro di Kolmogorov del 1933 *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Fondamenti della Teoria della Probabi-

lità) [la traduzione inglese è consultabile su: <http://www.kolmogorov.com/Foundations.html>].

Alcuni aspetti concettuali da sottolineare:

\* Non si definisce la probabilità di un evento, si danno solo delle proprietà matematiche che devono essere soddisfatte.

\* Kolmogorov riteneva che l'interpretazione della probabilità in termini di frequenza fornisse la migliore connessione tra il formalismo matematico e la realtà fisica. Questa era una sua convinzione personale (condivisa da chi scrive), ma non è una conseguenza dell'approccio assiomatico.

\* Non per ogni evento ha senso parlare di probabilità, Kolmogorov è esplicito: *l'assunzione che una definita probabilità esiste per un dato evento sotto certe condizioni è un'ipotesi che deve essere verificata e giustificata in ciascun caso individuale* su questo punto il dissenso con de Finetti è netto.

### Gli assiomi di Kolmogorov

Vediamo ora gli assiomi introdotti da Kolmogorov e il loro significato. Consideriamo lo spazio degli eventi  $\Omega$ , costituito dall'insieme degli eventi elementari  $\omega$  e da  $\mathcal{F}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $\Omega$ .

I-  $\mathcal{F}$  è un'algebra d'insiemi, cioè  $\Omega \in \mathcal{F}$  ed inoltre  $\mathcal{F}$  è chiusa rispetto all'operazione di unione, intersezione e complemento.

II- Ad ogni elemento  $A$  di  $\mathcal{F}$  si associa un numero reale non negativo  $P(A)$ , la probabilità di  $A$ , con  $P(A) \geq 0$ .

III-  $P(\Omega) = 1$ .

IV- Se due insiemi  $A$  e  $B$  sono disgiunti (cioè  $A \cap B = \emptyset$ ) allora  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

\*Una variante delicata del IV (additività numerabile): se  $\{A_j\}$  è una collezione numerabile di insiemi a due a due disgiunti allora

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

A prima vista può sembrare che il tutto sia piuttosto pedante, ma con un po' di riflessione non è troppo difficile capire le motivazioni dei vari assiomi:

I- L'algebra d'insiemi  $\mathcal{F}$  specifica gli eventi per i quali si può parlare di probabilità; se esiste la

probabilità di  $A$  e  $B$  allora è lecito parlare di probabilità di  $A \cup B$ , di  $A \cap B$ , del complemento di  $A$ , etc.

III- Con certezza (probabilità = 1) succede qualcosa.

IV- Se non c'è sovrapposizione tra  $A$  e  $B$  (cioè se accade  $A$  non si verifica mai  $B$ ) allora  $Prob(\text{evento } A, \text{ oppure evento } B) = Prob(\text{evento } A) + Prob(\text{evento } B)$ .

Gli assiomi di Kolmogorov sono perfettamente compatibili con la definizione della probabilità classica; inoltre l'insieme degli assiomi non è contraddittorio.

## Probabilità e mondo reale

Invece di addentrarmi in discussioni senza fine sulle interpretazioni della probabilità, preferisco concentrarmi sull'uso del calcolo delle probabilità nella descrizione del mondo reale, in particolare in fisica. Due domande nascono spontanee:

- La probabilità ha un carattere epistemico oppure ontico (i.e. *intrinseco*)?

- La probabilità deve essere interpretata come una proprietà soggettiva oppure oggettiva?

In altri termini, il concetto di probabilità va inteso come uno strumento che usiamo per studiare i fenomeni naturali, o piuttosto la natura stessa ha un carattere intrinsecamente probabilistico?

In meccanica quantistica la probabilità è considerata come una proprietà intrinseca cioè ontica, in ambito classico la situazione è meno chiara.

Ovviamente un carattere ontico implica una proprietà oggettiva; tuttavia un'interpretazione epistemica non esclude proprietà oggettive.

## Probabilità in un mondo deterministico: un ossimoro?

In fisica classica in genere si assume che valga il determinismo, cioè che esista una regola di evoluzione, non necessariamente esplicita, che dato lo stato di un sistema al tempo iniziale  $x(0)$ , determina univocamente  $x(t)$  per  $t > 0$ ; le leggi di Newton della meccanica sono di questo tipo. La domanda *cosa succede nel futuro se conosco  $x(0)$* ? a volte può essere senza senso anche in ambito deterministico; ad esempio questo accade se il sistema è "complicato" (oggi diremmo caotico). Lasciamo la parola a J. Clerk

Maxwell:

*Il fatto che dagli stessi antecedenti seguano le stesse conseguenze è una dottrina metafisica. ... Ma non è molto utile nel mondo in cui viviamo, ove non si verificano mai gli stessi antecedenti e nulla accade identico a se stesso due volte. ... L'assioma della fisica che ha, in un certo senso, la stessa natura è che da antecedenti simili seguono conseguenze simili.*

La domanda "giusta" (dell'uomo pratico, come direbbe Maxwell) sembra essere: *cosa succede nel futuro se conosco  $x(0)$  con una data incertezza?* Questo è un problema di probabilità.

## Caos deterministico

È ormai ben assodato che esistono sistemi deterministici che mostrano un'evoluzione temporale piuttosto irregolare, simile a quella che ci si aspetta nei processi stocastici e con una forte dipendenza dalla condizione iniziale, cioè piccole differenze al tempo iniziali vengono amplificate in modo esponenziale: questo è il famoso (famigerato?) *effetto farfalla*.

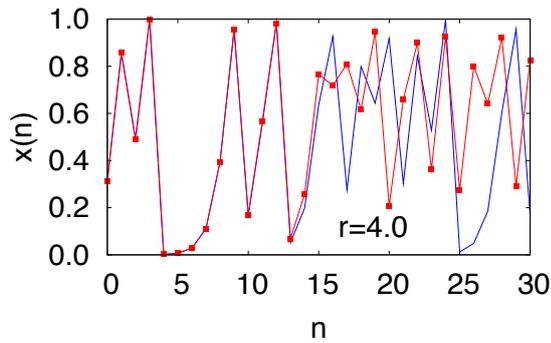
La possibilità di questo tipo di comportamento venne compresa per la prima volta da H. Poincaré:

*Se pure accadesse che le leggi della natura non avessero più alcun segreto per noi, anche in questo caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente .... può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito.*

Il comportamento caotico non è un fatto eccezionale: lo si incontra un po' ovunque (ecologia, astronomia, geofisica, ottica, etc) e può essere presente anche in sistemi apparentemente innocenti; questo è ormai ben chiaro dai lavori di E. Lorenz, M. Hénon e B.V. Chirikov, per citare solo i principali protagonisti della rinascita del caos. Un esempio di comportamento caotico facile da studiare numericamente è fornito dalla mappa logistica

$$x(n+1) = 4x(n)(1-x(n)) , \quad (1)$$

con  $x(n) \in [0, 1]$ , che costituisce un modello (iper)semplificato, ma non banale, per la dinamica delle popolazioni. L'andamento tempora-



**Figura 1:** Evoluzione nel tempo di due traiettorie della mappa logistica  $x(n+1) = rx(n)(1-x(n))$ , per  $r = 4$  e con condizioni iniziali molto vicine ( $|x(0) - x'(0)| = 4 \times 10^{-6}$ ). Notare che il comportamento è irregolare, e come solo dopo 16 iterazioni le due traiettorie diventano completamente diverse.

le  $\{x(0), x(1), x(2), \dots, x(T)\}$  appare "erratico", inoltre un piccolo errore raddoppia ad ogni passo,  $\delta x(n) \sim 2\delta x(n-1)$ , pertanto dopo pochi passi l'errore è enorme anche se  $\delta x(0)$  è molto piccolo, vedi Figura 1.

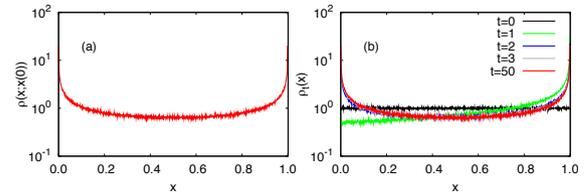
Consideriamo un sistema deterministico con un'incertezza sulla condizione iniziale. Questo corrisponde ad avere una densità di probabilità  $p_0(x)$ , diversa da una delta, ad esempio se la condizione iniziale  $x(0)$  è nota con precisione  $\epsilon$  allora  $p_0(x)$  è diversa da zero nella regione  $|x - x(0)| < \epsilon$ . Non è difficile trovare un'equazione che permette di determinare la densità di probabilità  $p_t(x)$  al tempo  $t$ , proprio come nei processi stocastici.

Ad esempio nelle mappe unidimensionali  $x(t+1) = f(x(t))$  si ha la regola:

$$p_{t+1}(x) = \sum_k \frac{p_t(y_k)}{|f'(y_k)|}$$

ove le  $y_k$  sono quei punti (preimmagini) tali che  $f(y_k) = x$ .

Possiamo domandarci se, dopo un tempo sufficientemente lungo, indipendentemente dalla densità iniziale  $p_0(x)$ , la  $p_t(x)$  tende a una densità  $p_\infty(x)$ . Se questo avviene il sistema è detto mescolante (mixing) e possiamo dire che la densità  $p_\infty(x)$  è una proprietà intrinseca del sistema, cioè ha un carattere oggettivo. Il risultato è indipendente dalla grandezza dell'incertezza iniziale e si ha sempre la stessa densità di probabilità asintotica. Questo accade per la mappa logistica:



**Figura 2:** A sinistra la densità di probabilità ottenuta con un istogramma, per la mappa logistica con  $T = 10^7$  per un generico  $x(0)$  con un  $\Delta x = 10^{-3}$ . A destra l'evoluzione di  $p_t(x)$  a  $t = 1, 2, 3$  e 50 ottenuto con  $10^6$  traiettorie a partire da  $x(0)$  uniformemente distribuite in  $(0, 1]$ , notare come già per  $t = 3$  la  $p_t(x)$  è praticamente uguale alla  $p_\infty(x)$ .

si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(x) = p_\infty(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}.$$

Un altro modo di introdurre la probabilità in ambito deterministico è il seguente (sempre per semplicità di notazione consideriamo il caso di una sola variabile e di tempo discreto): data la condizione iniziale  $x(0)$  possiamo generare una traiettoria  $\{x(1), x(2), \dots, x(T)\}$  e da questa calcolarci una densità di probabilità in modo empirico:

$$p(x, x(0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta(x - x(t)).$$

Ovviamente il risultato potrebbe dipendere da  $x(0)$ ; se questo non accade si dice che il sistema è ergodico.

Per capire gli aspetti essenziali del comportamento caotico in ambito deterministico consideriamo due sistemi con comportamento diverso: la rotazione sul cerchio

$$x(t+1) = x(t) + \omega, \text{ mod } 1 \quad (2)$$

e la mappa logistica (1).

Nel caso della mappa (2) è facile mostrare che se  $\omega$  è irrazionale allora la  $p(x, x(0))$  non dipende da  $x(0)$  ed è uniforme nell'intervallo  $(0, 1]$ , tuttavia il sistema benché ergodico, non è mescolante, cioè non esiste il limite di  $p_t(x)$  per  $t \rightarrow \infty$ . Per la mappa logistica (1) non è possibile un trattamento analitico; comunque ci sono chiare evidenze numeriche del comportamento ergodico e mescolante, vedi Figura 2.

Tornando al problema sulla connessione tra pro-

babilità e sistemi deterministici, mi sembra onesto concludere che nella diatriba tra Einstein e Popper il netto vincitore (sulla linea Maxwell e Boltzmann) è Einstein: anche in un contesto puramente deterministico ha perfettamente senso parlare di probabilità (che non ha un carattere soggettivo).

## Il Problema di fondo della Meccanica Statistica: la grande visione di Boltzmann

A livello microscopico un corpo materiale è costituito da un grande numero di atomi,  $O(10^{20} - 10^{25})$ , che evolvono seguendo le leggi di Newton (assumiamo, solo per semplicità, la validità della fisica classica). Al contrario a livello macroscopico le proprietà termodinamiche sono descritte da poche variabili: temperatura, pressione etc. Se non si vuole rimanere ad un livello meramente pragmatico è necessario porsi la seguente domanda: quale connessione esiste tra la descrizione a livello meccanico e la termodinamica?

Il contributo più significativo a questo enorme problema è sicuramente quello di Boltzmann. La sua idea visionaria può essere riassunta in due punti:

I) *Introduzione di idee probabilistiche e loro interpretazione in termini fisici.*

II) *Una relazione che fornisca un legame tra quantità nel mondo macroscopico (termodinamica) e quelle nel mondo microscopico (dinamica).*

Il punto I) è estremamente delicato ed ancora oggi oggetto di studio. L'idea è la seguente: abbiamo un sistema composto da  $N$  particelle, il cui stato fisico è dato dal vettore  $\mathbf{X}$  le cui componenti sono le posizioni e le velocità di tutte le particelle. Quando uno strumento effettua una misura (ad esempio della pressione) di fatto compie una media temporale di una funzione di  $\mathbf{X}$ :

$$\frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} A(\mathbf{X}(t)) dt ,$$

ove  $\mathcal{T}$  è il tempo di misura; in pratica, poiché i tempi tipici della dinamica microscopica sono  $O(10^{-9} - 10^{-10} s)$ , possiamo assumere  $\mathcal{T} = \infty$ .

Ovviamente per poter prevedere teoricamente il risultato della misurazione bisognerebbe:

a) conoscere la condizione iniziale  $\mathbf{X}(0)$ ;

b) essere in grado di trovare l'evoluzione  $\mathbf{X}(t)$  e c) calcolare l'integrale.

Tutte cose che sono chiaramente fuori dalla portata umana.

L'idea di Boltzmann fu di sostituire la media temporale con una media da calcolare con un'opportuna densità di probabilità.

È possibile tutto ciò? Non è affatto ovvio, questa congettura è chiamata *ipotesi ergodica*. Non è difficile convincersi che, nel caso l'ipotesi sia soddisfatta la probabilità di una regione  $\mathcal{A}$  dello spazio delle fasi non è altro che la frazione di tempo che il sistema durante la sua evoluzione (su un tempo molto lungo) passa in  $\mathcal{A}$ .

Torniamo al punto II): la relazione che fornisce il ponte tra la termodinamica ed il mondo microscopico è incisa sulla tomba di Boltzmann:

$$S = k \ln W , \quad (3)$$

ove  $S$  è l'entropia del corpo macroscopico, con  $N$  particelle contenute in un volume  $V$  e con energia  $E$ , e  $W$  è il numero di stati microscopici che hanno lo stesso stato macroscopico. Dato un sistema descritto da un'Hamiltoniana  $H(\mathbf{X})$

$$W(N, V, E) = \int \delta(H(\mathbf{X}) - E) d\mathbf{X} ,$$

notare la  $S$  è una quantità termodinamica mentre la  $W$  è determinata dalle proprietà microscopiche; abbiamo quindi che la (3) è la legge ponte tra il mondo della meccanica e quello della termodinamica.

Su come intendere la probabilità in meccanica statistica, ovviamente, ci sono diverse scuole, limitiamoci alle due più importanti: quella di Jaynes (massima entropia) e quella (diciamo tradizionale) di Boltzmann.

Secondo il punto di vista soggettivista di Jaynes, che non esito a catalogare come un "estremista antiboltzmanniano", la meccanica statistica non sarebbe parte della fisica, bensì una teoria di inferenza statistica: il principio di massima entropia è la regola per determinare le probabilità in circostanze in cui si hanno solamente informazioni parziali, ad esempio sono noti alcuni valori medi. In questo approccio la probabilità è interpretata come misura del grado di convinzione di una proposizione, e non una quantità fisicamente misurabile.

Non è questa la sede per una discussione sul principio di massima entropia, il cui successo in meccanica statistica di equilibrio, a mio avviso, è dovuto solo ad una serie di fortunate coincidenze, mi limito a ripetere un'osservazione più volte sollevata: *come è possibile fare inferenza dalla propria ignoranza?*

Al contrario nell'approccio di Boltzmann si ricorre all'ergodicità, che nasce, in modo naturale, dalla dinamica e dalla necessità di collegarsi con l'esperienza e permette di introdurre la probabilità in un contesto deterministico.

## Perché, a volte, è possibile usare la probabilità nel mondo reale?

Dopo i risultati numerici iniziati con il pionieristico lavoro di Fermi, Pasta e Ulam ed il teorema di Kolmogorov, Arnold e Moser, è ben chiaro che un generico sistema Hamiltoniano, da un punto di vista matematico, non è ergodico. Tuttavia abbiamo un'impressionante evidenza del fatto che, in sistemi macroscopici, l'ipotesi ergodica funziona più che bene. Basti pensare al metodo della dinamica molecolare in cui si integrano numericamente le equazioni di Hamilton e si calcolano, sempre numericamente, medie temporali. Il fatto che questi risultati siano in perfetto accordo con i calcoli probabilistici (ottenuti con tecniche perturbative e/o numeriche) e anche esperimenti di laboratorio, mostra che, anche se da un punto di vista strettamente matematico i sistemi macroscopici non sono ergodici, lo sono "di fatto" in un senso che sarà discusso in seguito. Un aspetto tecnicamente rilevante, spesso non considerato con la giusta attenzione dai filosofi della scienza, è che nella teoria delle probabilità si calcolano medie, distribuzioni etc, mentre nella realtà spesso c'è un unico sistema. Un corpo macroscopico è costituito da un numero di particelle che è virtualmente infinito, vedremo in seguito che è proprio questo che permette di usare il calcolo della probabilità, in particolare i teoremi limite, per capire il comportamento di un singolo oggetto macroscopico.

### L'idea di tipicità

Quello che, più o meno, hanno in testa i fisici (o almeno una parte) quando pensano ai fonda-

menti della meccanica statistica è che, a parte casi veramente "strani" (quelli non tipici), il singolo sistema, se è grande, si comporta come la media. In pratica si può prevedere l'andamento temporale della temperatura di una singola pentola dal comportamento medio di un insieme di tante pentole nelle stesse condizioni. Questa è quella che viene chiamata tipicità: in un sistema con  $N$  componenti ed un osservabile  $A$  che dipende da tutte le componenti, ci si aspetta che per ogni  $\epsilon$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}(|A - \langle A \rangle| > \epsilon) = 0.$$

È possibile, a volte, formalizzare l'idea di tipicità. In termini molto stringati: se  $N \gg 1$  i teoremi limite ci assicurano che  $A$  osservato in una singola misura è molto vicino a  $\langle A \rangle$ , a parte eventi non tipici che hanno probabilità molto piccola (che diventa zero per  $N \rightarrow \infty$ ).

Richiamiamo l'aspetto forse più importante del calcolo della probabilità:

*Tutto il valore epistemologico della teoria delle probabilità è basato su questo: i fenomeni aleatori, considerati nella loro azione collettiva a grande scala, generano una regolarità non aleatoria.* (B.V. Gnedenko e A.N. Kolmogorov)

Il caso più semplice (e più rilevante) di regolarità statistica è senza dubbio la legge dei grandi numeri:

*Sotto opportune ipotesi (ad esempio varianza finita), la media "empirica" di  $N$  variabili casuali indipendenti  $\{x_n\}$ , distribuite con la stessa densità di probabilità  $p(x)$ , nel limite di  $N$  grande è "vicina" alla media:*

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \rightarrow \langle x \rangle$$

La legge dei grandi numeri vale anche per variabili correlate (ma non troppo).

## Il punto di vista di Khinchin sull'ergodicità

Khinchin ha avuto il grande merito di andare oltre l'aspetto strettamente matematico dell'ergodicità, utilizzando la legge dei grandi numeri ha fatto un passo significativo per formalizzare l'idea di tipicità. Ha notato come l'ergodicità intesa in senso strettamente matematico, per

la meccanica statistica non è necessaria, infatti (usando una barra per denotare la media temporale):

- a) nei sistemi termodinamici il numero di costituenti microscopici è molto grande;
- b) la questione interessante per la meccanica statistica non è la validità della relazione

$$\bar{A} = \langle A \rangle$$

ove  $\langle A \rangle$  è calcolata con la distribuzione di probabilità microcanonica, per osservabili generiche, bensì per le poche grandezze rilevanti nella termodinamica, come ad esempio l'energia cinetica, la pressione e la densità.

- c) è accettabile che la media temporale  $\bar{A}(\mathbf{X})$  a partire da  $\mathbf{X}$  non coincida con  $\langle A \rangle$  per condizioni iniziali  $\mathbf{X}$  contenute in regioni di misura complessivamente piccola (tendente a zero se  $N \rightarrow \infty$ )
- d) è accettabile un'ergodicità non perfetta, cioè

$$|\bar{A}(\mathbf{X}) - \langle A \rangle| < \epsilon$$

con  $\epsilon \rightarrow 0$  se  $N \rightarrow \infty$ .

Khinchin, con un uso magistrale della legge dei grandi numeri, ha mostrato che in un sistema Hamiltoniano con interazioni a corto raggio (e.g. potenziali di Lennard-Jones nel continuo e/o interazioni a primi vicini nel discreto, purchè lontano dai punti critici), per la classe di funzioni della forma

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\mathbf{x}^{(n)}),$$

ove  $\mathbf{x}^{(n)}$  è il vettore che contiene le coordinate e gli impulsi dell' $n$ -ma particella e  $g(\mathbf{x}) = O(1)$ , si ha

$$Prob\left(|\bar{f} - \langle f \rangle| < c_1 N^{-1/4}\right) < c_2 N^{-1/4},$$

ove  $c_1$  e  $c_2$  sono  $O(1)$  e la probabilità è calcolata con la misura microcanonica.

Abbiamo quindi che per  $N \gg 1$  su quasi tutta la superficie ad energia costante, cioè a parte una regione di misura  $O(N^{-1/4})$ , si ha  $\bar{A} = \langle A \rangle + O(N^{-1/4})$ . Possiamo dire che, anche se da un punto di vista matematico l'ergodicità non vale, siamo autorizzati ad assumerla nello studio di una certa classe fisicamente rilevante di osservabili in corpi macroscopici.

## Il metodo Monte Carlo

I Metodi Monte Carlo sono un'ampia classe di metodi computazionali basati sul campionamento casuale per ottenere risultati numerici inerentemente sistemi fisici (e non solo). Le loro origini risalgono alla metà degli anni quaranta ed i loro formalizzatori salienti sono stati Fermi, von Neumann e Ulam (il nome Monte Carlo fu attribuito a queste tecniche in seguito da Metropolis, proprio in riferimento al noto casinò di Monte Carlo, al fine di esaltarne le caratteristiche squisitamente probabilistiche). In estrema sintesi, e semplificando oltremodo, dato un esperimento, possiamo effettuare una serie di misure inerentemente una data osservabile: come conseguenza di queste misure ricaviamo una sequenza di numeri casuali ed è lecito chiederci come questi numeri siano distribuiti: lo spazio degli eventi associato alla variabile fisica -che è all'atto pratico una variabile aleatoria definita su tale spazio- ha una sua distribuzione di probabilità che possiamo riprodurre numericamente, mediante il metodo Monte Carlo. I processi fisici che possiamo modellizzare mediante tale approccio sono molteplici, dai decadimenti radioattivi ai tempi di arrivo di raggi cosmici, dal discernere in quale fase viva un materiale ferromagnetico alla simulazione delle proprietà conduttrici degli stati condensati, etc.

Chiudiamo questa breve parentesi sul contributo di Khinchin con un'osservazione sulle simulazioni numeriche. Notiamo che, sia nella dinamica molecolare che nel Monte Carlo, si assume l'ergodicità (per il Monte Carlo questa assunzione è matematicamente provata) e si calcolano medie temporali. Ma la traiettoria non può essere tanto lunga da visitare tutto lo spazio delle fasi (il tempo necessario cresce esponenzialmente con il numero di particelle). Nonostante questo c'è un'impressionante evidenza della validità pratica dei due metodi, ed è naturale domandarsi quale sia il segreto di questa efficacia. Alla luce dei risultati di Khinchin viene da pensare che il

## La Dinamica Molecolare

Le prime simulazioni di dinamica molecolare risalgono agli anni 50 e 60 ad opera di Alder, Rahman e Verlet (per quanto concerne sistemi molto grandi come proteine e polimeri, invece, si dovette attendere la seconda metà degli anni ottanta, a dire l'avvento di macchine calcolatrici considerevolmente più efficienti e performanti rispetto a quelle a disposizione agli Scienziati negli anni Sessanta). Si identifica in generale con il termine Dinamica Molecolare quell'insieme di tecniche computazionali di simulazione che, mediante la risoluzione delle equazioni del moto, permette di studiare l'evoluzione temporale di un sistema fisico a livello atomico e molecolare: l'attuazione pratica consta *semplicemente* nell'integrazione numerica delle equazioni del moto di tutti i gradi di libertà microscopici coinvolti. Mediando sull'opportuna scala di tempo le osservabili consone si possono ottenere le proprietà termodinamiche del sistema in esame (e.g. la velocità quadratica media delle particelle è linearmente legata alla temperatura in cui vive il sistema che queste compongono).

punto di forza della dinamica molecolare e del Monte Carlo è nel fatto che vengono calcolate medie temporali di quantità non troppo strane, diciamo moralmente (per tutti gli scopi pratici) del tipo di quelle individuate da Khinchin.

### Oltre la media

Come passo successivo alla legge dei grandi numeri è naturale chiedersi quanto sono rilevanti le fluttuazioni di  $y_N$  intorno al valor medio. La risposta è data dal teorema del limite centrale (TLC). Sotto le ipotesi di varianza finita e di debole correlazione delle  $\{x_n\}$  si ha

$$P(y_N) \simeq \sqrt{\frac{N}{2\pi\sigma^2}} e^{-N\frac{(y_N - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4)$$

Notiamo che il TLC descrive le fluttuazioni non troppo grandi di  $y_N$ . Per valori molto lontani

dalla media, diciamo  $|y_N - \langle x \rangle| \gg \sigma/\sqrt{N}$ , si deve ricorrere alla teoria delle grandi deviazioni: la (4) è rimpiazzata da

$$P(y_N) \sim e^{-NC(y_N)}.$$

La  $C(y)$  è chiamata funzione di Cramér e dipende esplicitamente dalla  $p(x)$  e ha le seguenti proprietà:

- $C(y) > 0$  per  $y \neq \langle y \rangle = \langle x \rangle$  e  $C(\langle y \rangle) = 0$ ;
- $C(y) \simeq (y - \langle y \rangle)^2 / 2\sigma^2$  per  $y$  vicino a  $\langle y \rangle$ ;
- $d^2C(y)/dy^2 > 0$ .

Notiamo che nel TLC appaiono solo la media e la varianza della  $p(x)$ , inoltre la funzione di Cramér è approssimata da una parabola intorno a  $\langle y \rangle$ , mentre per valori di  $y$  più lontani è rilevante la forma esplicita della  $p(x)$ .

### Un cenno al non equilibrio

Consideriamo ora brevemente il problema dell'irreversibilità. Boltzmann capì che nella conciliazione tra meccanica e termodinamica un ruolo importante è giocato dalle condizioni iniziali (cioè posizioni e velocità delle particelle del gas): quelle che portano ad un comportamento irreversibile sono molto più numerose di quelle dalle quali si ha un comportamento reversibile:

*Il secondo principio è una sorta di risultato probabilistico, che per i corpi macroscopici (a causa dell'enorme numero di particelle che contengono) è praticamente certo.*

Piccola nota tecnica su sviluppi recenti: ora possiamo studiare sistemi piccoli ( $N \sim 10^2$ ) e misurare la probabilità della violazione del secondo principio (relazione di Gallavotti-Cohen).

Anche se spesso si ricorre ad una spiegazione probabilistica, ad esempio nel teorema  $H$ , rimane il fatto che quando parliamo del secondo principio della termodinamica intendiamo che una pentola di acqua calda lasciata a sé stessa si raffredda; si tratta di una singola pentola (quella nella nostra cucina) e non di un ensemble di tante pentole. Su questo punto c'è una certa confusione, in particolare sul ruolo del caos deterministico, che spesso viene associato all'irreversibilità (scuola di Prigogine).

Consideriamo un sistema con una densità di probabilità iniziale  $\rho(\mathbf{X}, 0)$ . Possiamo calcolare, in linea di principio,  $\rho(\mathbf{X}, t)$  per  $t > 0$ , e domandarci cosa succede nel limite  $t \rightarrow \infty$ . Sotto certe

condizioni (cioè se il sistema è mescolante, una proprietà più forte dell'ergodicità) per  $t \rightarrow \infty$  la densità di probabilità tende ad una densità invariante

$$\rho(\mathbf{x}, t) \rightarrow \rho_{inv}(\mathbf{x}) . \quad (5)$$

Questa è una proprietà importante ed interessante, nell'ambito dei sistemi dinamici, ma non ha niente a che vedere con l'irreversibilità della fisica: la (5) infatti descrive l'evoluzione di un ensemble di condizioni iniziali e non il comportamento del singolo sistema. Per capire questo punto basta considerare una mappa caotica e mescolante, ad esempio il famoso *gatto di Arnold*:

$$x_{t+1} = x_t + y_t \text{ mod } 1 , \quad y_{t+1} = y_t + x_{t+1} \text{ mod } 1 ,$$

ed osservare una singola realizzazione seguendo l'evoluzione diretta

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_t \quad (6)$$

e quella inversa (cioè proiettata al contrario)

$$\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0 . \quad (7)$$

Nonostante il gatto di Arnold sia caotico e le successioni (6) e (7) appaiono irregolari, non si noterà, a differenza di quanto accade nei sistemi macroscopici, niente di strano nell'evoluzione inversa.

## Un tentativo di conclusione

- Ha perfettamente senso parlare di probabilità anche in sistemi deterministici. In questo caso la probabilità è di tipo epistemico, non ha un carattere soggettivo. Questo accade se ci sono tanti gradi di libertà (meccanica statistica), e anche in quelli a bassa dimensione se c'è caos.
- In sistemi intrinsecamente stocastici si possono avere comportamenti certi (determinismo statistico) se sono coinvolte tante variabili (teoremi limite).
- L'ipotesi ergodica è tecnicamente equivalente ad un'interpretazione frequentistica. Tuttavia nasce in modo naturale in quanto connessa alla dinamica del sistema.
- In meccanica statistica la probabilità è usata per calcolare valori medi e capire che, per  $N \gg 1$ , la singola misura è vicina al valore medio. In que-

sto caso l'interpretazione della probabilità non è affatto un aspetto fondamentale, basta avere un'idea del significato di eventi con probabilità molto piccola.

• Possiamo affermare con una certa sicurezza che in meccanica statistica le stime probabilistiche sono perfettamente falsificabili e concludere che l'opinione di Popper *Le stime probabilistiche non sono falsificabili. E, naturalmente non sono neppure verificabili* è errata. Ad esempio la distribuzione di Maxwell-Boltzmann prevede che la probabilità che il modulo della velocità  $v$  di una particella sia compreso tra  $v_1$  e  $v_2$  è:

$$Prob(v_1 < v < v_2) = B \int_{v_1}^{v_2} 4\pi v^2 e^{-v^2/\alpha} dv$$

$B = (m/2\pi k_B T)^{3/2}$ ,  $\alpha = 2\pi k_B T/m$ . Si può fare una misura sperimentale e confrontare il risultato delle osservazioni con la teoria: l'esperimento (tecnicamente difficile, effettuato molto tempo dopo la previsione teorica) è in perfetto accordo con il risultato teorico. Notare che (da un punto di vista logico) la previsione teorica poteva essere falsificata.

Ringrazio Marco Baldovin per i preziosi suggerimenti e un'attenta lettura di una prima stesura.



- [1] G. BOFFETTA E A. VULPIANI: "Probabilità in Fisica: un'introduzione", *Springer Italia* (2012).
- [2] P. CASTIGLIONE, M. FALCIONI, A. LESNE AND A. VULPIANI: "Chaos and coarse graining in statistical mechanics", *Cambridge University Press* (1998).
- [3] M. CENCINI, F. CECCONI E A. VULPIANI: "Chaos: From Simple Models to Complex Systems", *World Scientific Singapore* (2009).
- [4] C. CERCIGNANI: "Ludwig Boltzmann: the man who trusted atoms", *Oxford University Press* (2006).
- [5] L. CERINO, F. CECCONI, M. CENCINI E A. VULPIANI: "The role of the number of degrees of freedom and chaos in macroscopic irreversibility", *Physica A* **442** (486) 2016.
- [6] S. CHIBBARO, L. RONDONI E A. VULPIANI: "Reductionism, Emergence and Levels of Reality", *Springer-Verlag* (2014).
- [7] D. COSTANTINI: "I fondamenti storico-filosofici delle discipline statistico-probabilistiche", *Bollati Boringhieri* (2004).

- [8] B. DE FINETTI: "L'invenzione della verità", *Raffaale Cortina Editore* (2006).
- [9] P. EHRENFEST AND T. EHRENFEST: "The conceptual foundation of the statistical approach in mechanics", *Dover* (1956).
- [10] D. GILLIES: "Philosophical Theories of Probability", *Routledge* (2000).
- [11] S. GOLDSTEIN: "Typicality and notions of probability in physics", in *Y. Ben-Menahem, M. Hemmo (Eds.) Probability in physics* (Springer-Verlag) 2012.
- [12] S. GOLDSTEIN: "Boltzmann's approach to statistical mechanics", in *J. Bricmont et al. (Eds.) Chance in physics* (Springer-Verlag) 2001.
- [13] M. FALCIONI E A. VULPIANI: "Ludwig Boltzmann: un tributo per i suoi 170 anni", *Lettera Matematica* **91** (16) 2014.
- [14] M. FALCIONI E A. VULPIANI: "Meccanica statistica elementare: i fondamenti", *Springer Italia* (2014).
- [15] G. GALLAVOTTI E E.G.D. COHEN: "Dynamical ensembles in nonequilibrium statistical mechanics", *Physical Review Letters* **74** (14) 2694.1995
- [16] H. HOSNI: "Probabilità: come smettere di preoccuparsi e imparare ad amare l'incertezza", *Carocci Editore* (2018).
- [17] M. KAC: "Probability and related topics in physical sciences", *American Mathematical Soc.* **1** (1957).
- [18] A.I. KHINCHIN: "Mathematical Foundations of Information Theory", *Dover* (1957).
- [19] R. KLAGES, W. JUST AND C. JARZYNSKI (EDS.): "Non equilibrium statistical mechanics of small systems", *Wiley-VCH* (2013).
- [20] A.N. KOLMOGOROV: "Foundations of the theory of probability", *Chelsea Publishing Company* (1956).
- [21] J. L. LEBOWITZ: "Boltzmann's entropy and time's arrow", *Physics Today* **46** (32) 1993.
- [22] H. POINCARÉ: "Geometria e caso", *Bollati Boringhieri* (1995).
- [23] K. POMIAN (ED.): "Sul determinismo", *Il Saggiatore* (1991).
- [24] D. RUELLE: "Caso e caos", *Bollati Boringhieri* (1992).
- [25] N. ZANGHÌ: "I fondamenti concettuali dell'approccio statistico in fisica", *La Natura delle Cose* **Ed. V. Allori, M. Dorato, F. Laudisa e N. Zanghì** (Carocci Editore) 2005.

l'Università dell'Aquila e Borsista CNR. È stato visiting professor presso diversi istituti di ricerca e Università in Francia, Belgio, Svezia, Danimarca e Stati Uniti.

Oltre a articoli su riviste specialistiche e testi avanzati in inglese ha pubblicato alcuni libri non specialistici: *Determinismo e Caos* (Nuova Italia Scientifica, 1994, Carocci 2004) e *Caso, Probabilità e Complessità* (Ediesse, 2014, Corriere della Sera 2018).

Per ulteriori dettagli sulla sua attività si veda <http://tnt.phys.uniroma1.it/twiki/bin/view/TNTgroup/AngeloVulpiani>

---

**Vulpiani Angelo:** è professore ordinario di Fisica Teorica presso il Dipartimento di Fisica di Sapienza Università di Roma dove svolge la sua attività sul caos nei sistemi dinamici, la meccanica statistica di non equilibrio, la turbolenza, i fenomeni di trasporto e reazione-diffusione. In precedenza è stato professore associato presso



# Modelli di occupazione

Carlo Sempi

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi"  
Università del Salento, Lecce

**Il termine "occupazione" del titolo non si riferisce, naturalmente, a quella della quale parlano i politici e alla quale aspirano i giovani che cercano un lavoro. Cosa si intenda apparirà chiaro piuttosto dalle considerazioni che seguono.**

Consideriamo il caso piú semplice di modello d'occupazione: si hanno  $N$  urne nelle quali vogliamo disporre  $n$  palline con  $n \leq N$  con la sola condizione che ogni urna possa contenere al piú una sola pallina; supporremo, inoltre che le urne siano numerate da 1 a  $N$  e che pure le palline siano numerate da 1 a  $n$ . Il risultato dell'assegnazione delle  $n$  palline nelle  $N$  urne può essere rappresentato mediante la  $n$ -pla  $(x_1, \dots, x_n)$ , nella quale  $x_k$  indica il numero dell'urna nella quale è stata collocata la  $k$ -esima pallina. Ovviamente, si deve imporre la condizione che le componenti siano diverse tra loro,  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$ . Sia  $\Omega$  l'insieme di tali  $n$ -ple; formalmente

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{1, \dots, N\}, \\ x_i \neq x_j \quad (i \neq j)\}.$$

Quante sono le  $n$ -ple di  $\Omega$ ? o, equivalentemente, qual è la numerosità ( $\Omega$ ) di  $\Omega$ ? La risposta è facile e è data da

$$N(N-1) \dots (N-n+1),$$

perché la prima pallina può essere collocata in una qualsiasi delle  $N$  urne, e, perciò  $x_1$  può assumere  $N$  valori, la seconda pallina in una qualsiasi delle rimanenti  $N-1$  urne e, quindi per  $x_2$  sono possibili  $N-1$  valori, e così via. Il numero appena trovato si

può scrivere in maniera leggermente diversa

$$D_{N,n} = N(N-1) \dots (N-n+1) \\ = \frac{N!}{(N-n)!}, \quad (1)$$

ove

$$k! = 1 \cdot 2 \dots (k-1) \cdot k$$

è il numero delle *permutazioni semplici* di  $k$  oggetti; alla quantità  $D_{N,n}$  dell'eq. (1) si dà il nome di numero delle *disposizioni semplici* di  $N$  oggetti a  $n$  a  $n$ .

Abbiamo in definitiva trovato che le  $n$  palline numerate possono essere collocate nelle  $N$  urne in  $D_{N,n}$  modi differenti, se vale la condizione che ogni urna possa contenere al piú una pallina.

Possiamo pensare che non esista la restrizione che ogni urna possa contenere una sola pallina. In questo caso, il risultato dell'assegnazione delle  $n$  palline tra le  $N$  urne sarà rappresentato ancora dall' $n$ -pla  $(x_1, \dots, x_n)$ , ma senza la restrizione  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$ ; di conseguenza, ora avremo

$$\Omega_1 = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{1, \dots, N\}\},$$

insieme la numerosità del quale è

$$N(\Omega_1) = N^n \quad (2)$$

perché vi sono ora  $N$  possibili valori per ognuna delle  $n$  componenti del vettore  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Supponiamo ora che le palline siano *indistinguibili*, vale a dire che esse non sono piú numerate da 1 a  $n$ ; sappiamo solo che sono  $n$ . Domandiamoci come occorra modificare le considerazioni svolte sopra.

Poiché le palline hanno perso la loro individualità, non siamo in grado di distinguere due collocazioni nelle quali semplicemente si scambiano le palline tra le urne occupate; e poiché le  $n$  palline si possono permutare in  $n!$  maniere differenti, le configurazioni possibili sono ora

$$\frac{D_{N,n}}{n!} = \frac{N!}{(N-n)!n!}. \quad (3)$$

Questo numero si indica mediante il *coefficiente binomiale*

$$\binom{N}{n} \quad (4)$$

che dà il numero delle *combinazioni semplici* di  $N$  a  $n$  a  $n$ , che è pure il numero di modi nei quali si possono scegliere  $n$  oggetti tra a  $N$  possibili; in inglese il coefficiente binomiale (4) è chiamato, assai efficacemente “ $N$  choose  $n$ ”.

Prima di procedere converrà introdurre le *combinazioni con ripetizione*.

Si supponga di estrarre palline da un’urna; le estrazioni possono avvenire in modi differenti. Dopo ogni estrazione di una pallina dall’urna, questa può essere reintrodotta, oppure no, nell’urna; parleremo allora, rispettivamente, di un’ estrazione con o senza restituzione. Le palline potranno essere estratte in sequenza, in modo da poter parlare di una prima, di una seconda, ... pallina estratta. Oppure possiamo pensare che più palline possano essere estratte contemporaneamente dall’urna; si parlerà allora di un’ estrazione *in blocco*.

Mentre è facile vedere come si realizzi un’ estrazione in blocco nel caso dell’ estrazione senza restituzione, è più delicato raffigurare un’ estrazione in blocco con restituzione. Si può pensare di realizzare un’ estrazione di questo tipo estraendo le palline ad una ad una, senza tuttavia registrare in quale ordine le palline siano state estratte.

Il risultato di un’ estrazione sarà rappresentato da  $n$ -ple  $(x_1, \dots, x_n)$  con  $x_i = 1, \dots, N$ ,  $n$ -ple che si possono pensare ordinate in modo che risulti  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  (tale ordinamento è solo opportuno, ma non necessario; altri sono possibili); la condizione  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$  sarà, o no, richiesta, secondo che si tratti di un’ estrazione senza o con restituzione. Formalmente, posto

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\}$$

ci si domanda, innanzi tutto, quante siano le  $n$ -ple che

compongono  $\Omega$ . In altre parole vogliamo conoscere la numerosità dell’insieme

$$A(k, n) := \{(j_1, \dots, j_n) : j_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ j \in \{1, \dots, n\} \sum_{i=1}^n j_i = k\},$$

che denoteremo con  $V(k, n)$ .

Nell’ estrazione senza restituzione di palline da un’urna, è  $N(\Omega) = \binom{N}{n}$  che è, come abbiamo visto sopra, il numero delle combinazioni semplici di  $N$  oggetti a  $n$  a  $n$ . Se, invece, l’ estrazione è con restituzione, è

$$N(\Omega) = \binom{N+n-1}{n}. \quad (5)$$

È questo il numero delle *combinazioni con ripetizione* di  $N$  oggetti a  $n$  a  $n$ . La dimostrazione si svolge per induzione su  $n$ . Se  $n = 1$  è, evidentemente,  $N(\Omega) = N = \binom{N}{1}$ . Si supponga ora che, per ogni  $k \leq N$ , sia

$$N(\Omega) = V(k, n) := \binom{k+n-1}{n};$$

si vuole dimostrare che il risultato è valido anche per  $n + 1$ . Ordinate le  $(n + 1)$ -ple nel modo indicato sopra, si osservi che vi sono  $V(N, n)$   $(n + 1)$ -ple con il primo numero eguale a 1, ve ne sono  $V(N - 1, n)$  con il primo numero eguale a 2 e così via. Vi saranno, infine,  $V(1, n)$   $(n + 1)$ -ple con la prima componente eguale a  $N$ . Pertanto

$$V(N, n + 1) = V(N, n) + V(N - 1, n) + \\ \dots + V(1, n) \\ = \sum_{i=1}^N V(i, n);$$

ma, ricorrendo al triangolo di Pascal o di Tartaglia, che dir si voglia,

$$V(k, n) = \binom{k+n-1}{n} \\ = \binom{k+n}{n+1} - \binom{k+n-1}{n+1},$$

sicché

$$\begin{aligned}
 V(N, n+1) &= \binom{N+n}{n+1} - \binom{N+n-1}{n+1} \\
 &\quad + \binom{N-1+n}{n+1} \\
 &\quad - \binom{N+n-2}{n+1} + \dots - \binom{n+1}{n+1} + \binom{n}{n} \\
 &= \binom{N+n}{n+1},
 \end{aligned}$$

che coincide con la (5) quando a  $N$  si sostituisca  $N+1$ .

Così, per esempio, la probabilità dell'evento  $B_j$  "nell'estrazione di un campione non ordinato (o a blocchi) di  $n$  palline da un'urna che ne contiene  $N$  delle quali  $b$  sono bianche e  $c$  colorate, si estraggono esattamente  $j$  palline bianche" è

$$\mathbb{P}(B_j) = \frac{\binom{b+j-1}{j} \binom{c+n-j-1}{n-j}}{\binom{N+n-1}{n}}.$$

**Esempio 1.** Si pensi ora di rovesciare il punto di vista, e, anziché estrarre palline da un'urna, si disponga di  $N$  urne e di  $n$  palline, identiche tra loro, da collocare nelle  $N$  urne, senza che vi siano limitazioni al numero di palline che si possono collocare in ogni urna. Il numero di maniere nelle quali ciò si può effettuare è

$$\binom{N+n-1}{n} \quad (6)$$

il risultato che si è già ottenuto sopra. ■

**Esempio 2.** Un albergo con  $N$  piani e con ricettività illimitata si trova a dover distribuire  $n$  clienti tra gli  $N$  piani; si tratta, evidentemente, dello stesso dello stesso problema dell'esempio precedente, con l'identificazione "piano=urna" e "cliente=pallina". Il numero dei modi di sistemare i clienti è, dunque, ancora quello dato dalla (6). ■

Buona parte dei libri di probabilità, a incominciare da quello fondamentale di Feller [4], chiama la (6) *statistica di Bose-Einstein* e la (4) *statistica di Fermi-Dirac*, perché impone che ogni urna possa contenere al più una sola pallina equivale all'introduzione del *principio d'esclusione* di Pauli.

**Esempio 3.** Se  $n$  particelle indistinguibili possono occupare  $N$  stati energetici, senza che vi sia una limitazione al numero di palline che possono occupare uno stato, i modi di occupazione sono nuovamente dati dalla (6). ■

Sinora abbiamo solo parlato di quanti siano i possibili modi di sistemare  $n$  palline, rispettivamente particelle, in  $N$  urne, rispettivamente stati, giungendo alla (6); come si direbbe in un corso di probabilità, abbiamo solo calcolato la numerosità dello spazio dei campioni  $\Omega$ ; si tratta ora di introdurre in questo spazio una probabilità. La soluzione più semplice, ma si tratta di un passo logico, per niente scontato, è di adottare la distribuzione uniforme su tutti i modi contati sopra, cioè sui punti di  $\Omega$ : ognuno di questi avrà, così, probabilità

$$\frac{1}{\binom{N+n-1}{n}}. \quad (7)$$

La (7) porta a risultati che possono sembrare paradossali. Come esempio, si consideri la distribuzione, già incontrata sopra, di  $n$  palline da collocare in  $N$  urne; allora l'assegnazione

$$\underbrace{(n, 0, \dots, 0)}_{N-1}$$

nella quale tutte le palline sono state collocate nell'urna 1 ha la stessa probabilità, data dalla (7), dell'assegnazione

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ urne}}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{N-n \text{ urne}}$$

anche se, a prima vista, sembrerebbe che quest'ultima dovrebbe avere una probabilità maggiore. Anche le assegnazioni

$$\begin{aligned}
 &(k, 0, \dots, 0, n-k) \\
 &(1, 0, 1, 0, n-2, 0, \dots, 0)
 \end{aligned}$$

hanno la stessa probabilità data dalla (7).

Il fenomeno appena adombrato è una conseguenza della supposta indistinguibilità delle palline.

Avvertiamo il lettore che qui le considerazioni svolte si allontanano da quelle che in Meccanica Statistica portano alla distribuzione di probabilità di

Bose–Einstein; questa è data da una legge geometrica

$$p_{n_s} = (1 - q) q^{n_s} \quad (n_s = 0, 1, \dots), \quad (8)$$

con

$$q = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_s}{kT}\right)$$

ove  $T$  è la temperatura,  $k$  la costante di Boltzmann,  $\mu$  il potenziale chimico,  $\varepsilon_s$  l'energia dell' $s$ -esimo stato e  $n_s$  il numero delle particelle nello stesso stato; si veda un libro di Meccanica Statistica, per esempio [5]. Se si calcola la speranza della legge (8) si ottiene il numero medio di particelle per stato

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(n_s) &= (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} n q^n = \frac{q}{1 - q} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_s}{kT}\right)}{1 - \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_s}{kT}\right)}, \end{aligned}$$

che è l'espressione che si incontra nei testi di Meccanica Statistica. La distribuzione di Bose–Einstein fu introdotta da Bose [1] nel 1924 e studiata e ampliata da Einstein in due articoli [2, 3] del 1924 e 1925.

Ci si deve domandare perché nei testi di probabilità si chiami statistica di Bose–Einstein un'espressione che è ben differente da quella alla quale i fisici danno questo nome. È intanto evidente che sia nei libri di probabilità sia in quelli di Meccanica Statistica si parte da un fenomeno comune: l'assegnazione di oggetti, palline o particelle, *indistinguibili* tra vari stati, urne o livelli d'energia, senza che siano presenti restrizioni al numero di oggetti che possono occupare un'urna o uno stato. Qui però le somiglianze hanno termine; in primo luogo, tanto le urne, quanto le palline sono in numero finito, mentre nel caso della Meccanica Statistica sia le palline sia i livelli d'energia sono potenzialmente infiniti. Ma assai più notevole è una seconda differenza: mentre le urne sono di fatto anch'esse indistinguibili, i livelli d'energia, vale a dire i vari stati che le particelle possono occupare, non lo sono affatto, anzi essi sono ordinati con energie  $e_0 < e_1 < \dots$ .

Credo che si possa concludere che lo stesso nome è attribuito, a parere di chi scrive erroneamente, a due fenomeni distinti e che sarebbe più corretto che i libri di probabilità in futuro indicassero con un nome differente la distribuzione di probabilità dell'eq. (7).



- [1] S.N. Bose, Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese, *Zeitschrift für Physik* **26** 178-181 (1924).
- [2] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse*, **2** 261-267 (1924).
- [3] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. 2. Abhandlung, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Physikalisch-mathematische Klasse*, **1** 314 (1925).
- [4] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, New York, 1950 (3rd ed. 1968).
- [5] G.H. Wannier, *Statistical physics*, Wiley, New York, 1966.



---

# Problemi epistemologici in meccanica quantistica

**Claudio Garola**

Dipartimento di Matematica e Fisica Ennio De Giorgi  
Università del Salento, Lecce

---

**I**l dibattito sulle possibili interpretazioni della meccanica quantistica (MQ) è vivace ancora oggi, benché sia trascorso quasi un secolo dalla nascita della teoria. Le ragioni che hanno impedito finora di raggiungere soluzioni condivise possono essere comprese più a fondo se si analizza il linguaggio della MQ utilizzando nozioni di logica matematica per chiarirne gli aspetti sintattici e semantici. Questo punto di vista, insolito negli studi sui fondamenti della MQ, permette sia di suggerire una scelta fra posizioni diverse proposte in letteratura, sia di proporre alternative a tesi largamente condivise ma problematiche. Si analizzano in particolare nel presente lavoro, facendo riferimento a ricerche precedenti, i temi cruciali della *logica quantistica*, della *probabilità quantistica* e della *contestualità* (dipendenza dei risultati di una misura dal contesto di osservazione) della MQ. Tale analisi dimostra che la logica quantistica non è necessariamente associata a una nozione di verità quantistica incompatibile con la nozione classica di verità, che la probabilità quantistica ammette un'interpretazione epistemica se la nozione di contestualità è introdotta come primitiva nel linguaggio della MQ, e, infine, che l'asserzione stessa che la MQ è una

teoria contestuale può essere messa in discussione se si modificano le premesse epistemologiche implicite nei teoremi che dovrebbero dimostrarla.

## 1. Introduzione

Quando si analizza una teoria scientifica è opportuno distinguere fra lo studio della sua evoluzione storica (sia in senso tecnico che in senso metodologico ed epistemologico) e la *ricostruzione razionale* che è possibile effettuare in un dato momento, con gli strumenti di analisi che in quel momento sono disponibili. Lasciando agli storici della scienza il primo di questi compiti, ci occuperemo in questo articolo di alcuni problemi epistemologici che emergono in meccanica quantistica (MQ), nello stadio attuale della sua evoluzione, quando se ne ricostruiscono razionalmente gli aspetti fondamentali. Il nostro studio sarà effettuato adottando una prospettiva originariamente proposta dal gruppo di ricerca in fondamenti della MQ del Dipartimento di Fisica dell'Università del Salento. In sintesi, si tratta di utilizzare strumenti di logica matematica per analizzare la struttura sintattica e le proprietà semantiche del linguaggio della MQ, individuandone gli aspetti caratteristici e i nuclei problematici. Come vedremo, uno studio di questo tipo conduce a risultati interessanti, alcuni dei quali smentiscono credenze diffuse che impediscono di individuare possibili alternative alle interpretazioni esistenti (e controverse) della MQ. Esso richiede tut-

tavia una serie di premesse, poiché la MQ è una teoria complessa che poggia su teorie precedenti per differenziarsene poi in modo radicale. Discuteremo pertanto nella Sezione 2 alcune regole e principi del linguaggio naturale che sfuggono in genere all'attenzione critica dei parlanti perché impliciti e apparentemente ovvi: in particolare, un principio di *oggettività delle proprietà* che assume l'indipendenza dall'osservazione delle proprietà degli oggetti fisici. La rilevanza di tali aspetti per i nostri scopi è dovuta al fatto che la meccanica classica (MC) li fa propri nel suo linguaggio, che costituisce poi a sua volta la base del successivo (e antagonistico) linguaggio della MQ. Nella Sezione 3 presenteremo poi la *concezione epistemologica standard*, che ricostruisce razionalmente quali siano le parti costitutive di una teoria fisica evoluta. Tenendo conto di questi preliminari, prenderemo in considerazione nella Sezione 4 il linguaggio della MC, osservando come anch'esso sottenda il principio di oggettività e come, di conseguenza, la MC possa offrire una descrizione della realtà fisica intuitivamente accettabile anche se non immediata. Nella Sezione 5 mostreremo invece come la MQ neghi il principio di oggettività e come questa negazione abbia conseguenze profonde: in particolare, l'impossibilità di creare modelli intuitivi della realtà fisica, la proposta di un nuovo linguaggio (la *logica quantistica*) che alcuni ricercatori ritengono sottendere una nozione di *verità quantistica* diversa dalla nozione classica di verità e con essa incompatibile, l'introduzione di una nozione non classica di probabilità (la *probabilità quantistica*) che non sarebbe interpretabile come misura (indiretta) delle limitazioni della nostra conoscenza (probabilità *epistemica*) ma che rifletterebe invece la struttura fondamentale del mondo fisico (probabilità *ontica*). Le Sezioni 6 e 7 saranno allora dedicate a discutere brevemente la logica quantistica e la probabilità quantistica, rispettivamente, allo scopo di mostrare come esse possano essere connesse con le corrispondenti nozioni classiche in modi usualmente non riconosciuti. Nella Sezione 8, infine, si mostrerà che l'interpretazione stessa della MQ come teoria contestuale può essere messa in discussione, poiché poggia su teoremi la cui dimostrazione richiede un'assunzione epistemologica legittima ma non logicamente necessaria.

## 2. Il ruolo delle proprietà nel linguaggio naturale

Come accennato nella Sezione 1, l'uso del linguaggio naturale comporta processi mentali complessi di cui usualmente non ci rendiamo conto, avendo appreso ad attuarli in modo automatico fin dalla prima infanzia. L'analisi di questi processi è importante da molti punti di vista: in particolare, perché porta a comprendere meglio quale visione intuitiva del mondo si celi dietro le nostre parole. L'umanità si è interrogata su questi temi, direttamente o indirettamente, fin dall'antichità, e la letteratura sull'argomento è vastissima. A noi interessa, in questa sede, solo una breve ed elementare analisi di alcuni aspetti della nozione di proprietà, che ricorre frequentemente nel parlare quotidiano.

Quando parliamo di oggetti individuali che appartengono al mondo materiale, o a un modello mentale, o a un sistema di credenze, ecc., utilizzando l'articolo indeterminativo (*una* lavagna, *un* numero, *un'*anima, ...) intendiamo indicare un oggetto generico appartenente a una classe, che è predefinita (rispetto all'oggetto) da una o più proprietà caratterizzanti, all'interno della quale i singoli oggetti particolari sono caratterizzati da ulteriori proprietà specifiche. Dato allora un oggetto individuale  $a$  e una proprietà  $P$ , un tipico enunciato elementare del linguaggio naturale sarà " $a$  ha la proprietà  $P$ ": ad esempio, "questa lavagna è bianca" o "il numero 7 è dispari" o "la mia anima è immortale". Un enunciato di questo tipo (brevemente,  $P(a)$  nel seguito) può avere una *interpretazione semantica* che gli assegna un valore di verità ( $V = \text{vero}$ ,  $F = \text{falso}$ ) il quale, tuttavia, non è necessariamente noto o prevedibile. Occorre allora introdurre una distinzione fondamentale. Nel primo esempio proposto sopra, il termine "lavagna" ha interpretazione empirica, e il valore di verità assegnato all'enunciato "questa lavagna è bianca" può essere controllato empiricamente mediante un'osservazione diretta o strumentale che *verifichi* o *falsifichi* l'enunciato (cioè fornisca una prova empirica della sua verità o della sua falsità). Negli altri esempi, invece, i termini "numero 7" e "anima" non hanno interpretazione empirica, e il valore di verità può essere assegnato in base a una nozione di verità matematica (nel secondo esempio) o in base a credenze religiose (nel terzo esempio), ma non può essere controllato empiricamente.

Gli enunciati *elementari* (o *atomici*) della forma  $P(a)$  che ammettono un controllo empirico sono ele-

menti di una classe di enunciati elementari detti *osservativi*, cioè di enunciati che descrivono i risultati di una procedura osservativa possibile [1]. Questa classe comprende anche enunciati che stabiliscono *relazioni* empiricamente controllabili, come “Aldo è più alto di Andrea” e costituisce un nucleo linguistico fondamentale per ogni teoria scientifica nel cui linguaggio compaiano oggetti individuali (è opportuno notare tuttavia che anche nelle teorie scientifiche possono esistere enunciati il cui valore di verità è definito ma non empiricamente controllabile: verità e conoscenza della verità sono infatti nozioni diverse, che non dovrebbero essere identificate).

Considerando ora l'insieme degli enunciati osservativi, si assume implicitamente nel linguaggio naturale il seguente principio, che chiameremo *principio di oggettività*.

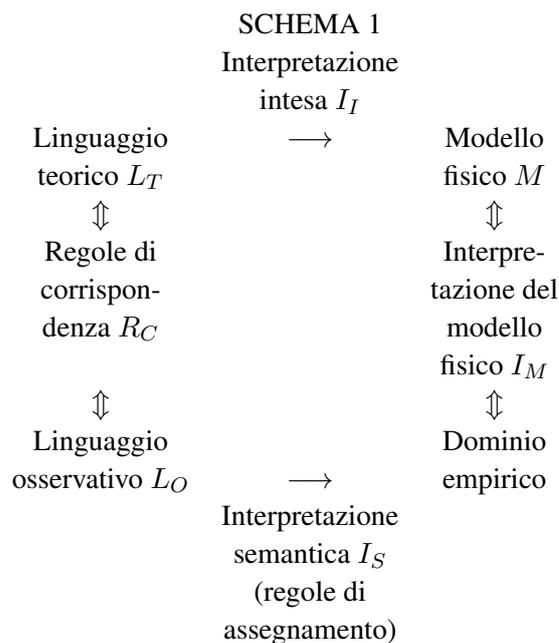
O. I valori di verità degli enunciati osservativi preesistono a un eventuale controllo empirico (brevemente, osservazione).

Nel caso di enunciati osservativi della forma  $P(a)$  il principio O stabilisce l'*oggettività delle proprietà* (o il *realismo delle proprietà*), da intendersi non in senso ontologico ma in senso semantico (cioè relativo ai valori di verità). Il ruolo dell'osservazione non è perciò quello di definire la nozione di verità, che resta distinta da quella di *verificazione*, ma quello di portare a nostra conoscenza valori di verità ignoti o di confermare/disconfermare valori di verità ipotizzati. L'osservazione stessa mostra poi che i valori di verità degli enunciati osservativi sono spesso collegati fra loro. Ad esempio, se “Il cielo è coperto” è vero, in genere “il sole splende” è falso, mentre se “Carlo è influenzato” è vero, in genere “Carlo è febbricitante” è falso. Da questo punto di vista il ruolo della scienza è perciò quello di studiare i valori di verità degli enunciati osservativi e le loro relazioni. L'impresa, tuttavia, è difficile, e richiede la costruzione di strutture linguistiche e concettuali molto complesse. Inoltre, evolvendosi, mette in discussione, con la meccanica quantistica e con la nozione di *contestualità*, le premesse stesse da cui è partita. Dedicheremo pertanto la prossima sezione a illustrare brevemente le articolazioni concettuali e linguistiche di teorie scientifiche evolute (come le attuali teorie fisiche) secondo un punto di vista epistemologico largamente diffuso.

### 3. La concezione epistemologica standard

Si ritiene abitualmente che la fisica moderna nasca quando il ruolo dell'osservazione e della misura nella comprensione dei fenomeni naturali è pienamente riconosciuto, in opposizione al medioevale principio di autorità. La necessità di correlare i risultati numerici ottenuti conduce in seguito allo sviluppo e all'uso estensivo dell'apparato matematico, con la costruzione di modelli matematici e geometrici. Questi ultimi evolvono poi in teorie complesse in cui sono introdotte leggi generali ed entità teoriche solo indirettamente connesse con enunciati osservativi.

Secondo la *concezione epistemologica standard*, o *punto di vista ricevuto*, (e.g., [2], [3], [4]) una teoria fisica evoluta è esprimibile in un metalinguaggio in cui sono riconoscibili diversi elementi correlati fra loro. Lo Schema 1 riassume tali elementi e le loro correlazioni (nello schema le frecce orizzontali rappresentano applicazioni e quelle verticali relazioni complesse e variabili con la teoria).



Commentiamo brevemente lo Schema 1. Il *linguaggio teorico*  $L_T$  comprende l'apparato matematico della teoria, e la sua *interpretazione empirica*  $I_E$  avviene tramite *regole di corrispondenza*  $R_C$  che connettono  $L_T$  con un *linguaggio osservativo*  $L_O$ . Quest'ultimo è interpretato su un dominio empirico tramite *regole di assegnamento*, che ne forniscono un' *interpretazione semantica*  $I_S$ , e la composizione di  $I_S$  e  $R_C$  fornisce l'interpretazione empirica richiesta (è importante osservare che  $I_E$  è in genere

*indiretta e incompleta*: indiretta perché esistono in genere in  $L_T$  termini teorici che sono interpretati via  $R_C$  solo indirettamente, tramite l'interpretazione di termini teorici derivati; incompleta perché i valori possibili delle entità teoriche, spesso infiniti, sono in genere solo parzialmente interpretati su domini finiti).  $L_T$  ha inoltre spesso un' *interpretazione intesa*  $I_I$  su un *modello fisico*  $M$ , che non è indispensabile in linea di principio ma che gioca un ruolo fondamentale per la comprensione intuitiva, la giustificazione e lo sviluppo della teoria (con lo svantaggio, peraltro, che l'esistenza stessa di  $M$  conduce spesso a vederlo come rappresentativo di una realtà ontologica sottostante ai fatti empirici, trasformandolo in un ostacolo alla formulazione di teorie diverse e alternative). Tale interpretazione può essere *diretta e completa*, a differenza di quanto accade nel caso di  $I_E$ . Infine, anche il modello  $M$  può avere un'interpretazione  $I_M$  sul dominio empirico, in modo da completare lo Schema 1 coerentemente con  $I_E$ .

Il punto di vista ricevuto è stato criticato da diversi punti di vista (e.g., [5], [6]). In particolare, le regole di corrispondenza  $R_C$  (e quindi l'interpretazione  $I_M$  di  $M$ ) dipendono dall'interpretazione globale della teoria e possono essere controverse. Tuttavia le distinzioni nello Schema 1 restano, a nostro parere, fondamentali, e di esse terremo conto nel seguito.

## 4. Il linguaggio della meccanica classica

Come si è detto nella Sezione 1, il linguaggio della MC fa propri alcune regole e principi del linguaggio naturale che sono rilevanti da un punto di vista epistemologico ma che sono usualmente applicati in modo automatico dai parlanti poiché sono appresi per imitazione fin dalla prima infanzia. In particolare, l'esistenza di oggetti individuali, il ruolo delle proprietà nel caratterizzare classi e individui specifici e, soprattutto, il principio di oggettività O. Nel quadro dello Schema 1 quest'ultimo ha una funzione fondamentale, perché permette di costruire un'interpretazione intesa diretta e completa del linguaggio teorico della MC su un modello fisico  $M$  (costituito da punti materiali, traiettorie, corpi rigidi, ecc.), indipendentemente dalle problematiche relative a  $R_C$  e a  $I_M$ , che sarebbero invece rilevanti se i valori di verità degli enunciati osservativi dipendessero anche dal controllo empirico che ne viene eventualmente effettuato. Si

ottiene così un supporto importante per l'intuizione fisica, e quindi per l'evoluzione della teoria.

Da un punto di vista formale, gli aspetti più elementari del linguaggio della MC possono essere schematizzati come segue.

Innanzitutto, nel linguaggio teorico della MC le nozioni di *sistema fisico* e *grandezza fisica* sono introdotte come primitive. Una proprietà può essere allora definita come una coppia  $P = (A, \Delta)$ , dove  $A$  è una grandezza fisica e  $\Delta$  un intervallo dell'asse reale, e la formula  $P(a)$  rappresenta formalmente l'enunciato "la grandezza fisica  $A$  assume valore in  $\Delta$  sul sistema fisico  $a$ ", o, brevemente, " $a$  possiede la proprietà  $P$ ". Uno stato  $S$  può essere poi definito come un insieme di proprietà, e la formula  $S(a)$  rappresenta formalmente l'enunciato "il sistema fisico  $a$  possiede tutte le proprietà in  $S$ " o, brevemente, " $a$  è nello stato  $S$ ".

È ben noto, poi, che in MC ogni sistema fisico è associato a uno spazio delle fasi  $\mathcal{F}$  i cui punti rappresentano univocamente tutti e soli i possibili stati (puri) del sistema. Si tratta di uno spazio euclideo di dimensione  $2n$ , se  $n$  è il numero delle variabili di posizione del sistema, e in esso ogni proprietà è rappresentata da un sottoinsieme di punti. Questa rappresentazione di stati e proprietà è fondamentale per chiarire quali condizioni di verità siano implicitamente adottate nel linguaggio della MC. Consideriamo infatti la formula  $P(a)$ . Al sistema fisico  $a$  è associato (univocamente) uno stato  $S_a$ , e quindi un punto di  $\mathcal{F}$ , che per brevità denoteremo ancora con  $S_a$ . Alla proprietà  $P$  è associato invece un sottoinsieme  $\mathcal{F}_P$  di  $\mathcal{F}$ . L'enunciato rappresentato da  $P(a)$  è vero (brevemente, l'enunciato  $P(a)$  è vero) se e solo se  $S_a \in \mathcal{F}_P$ . Questa definizione di verità è conforme alla definizione classica di verità [7] e sottende il principio O perché non vi compare alcuna dipendenza dall'osservazione (cfr. Sezione 2). Inoltre  $P(a)$  appartiene sia al linguaggio teorico che al linguaggio osservativo della MC (via regole di corrispondenza), ed è un enunciato osservativo: infatti in MC ogni grandezza fisica, e quindi ogni proprietà, è associata, tramite regole di assegnamento (cfr. Sezione 3), a procedure osservative (o *misure*) empiricamente possibili che rivelano il valore che essa assume su un dato sistema fisico. Nel caso di una proprietà  $P$ , una misura di  $P$  sul sistema fisico  $a$  stabilisce se  $a$  possiede o non possiede la proprietà  $P$ , e quindi verifica o falsifica  $P(a)$ , fornendo una prova empirica del suo valore di verità.

A partire da quanto precede si può formalizzare un sottolinguaggio elementare  $L(x)$  del linguaggio

della MC considerando una variabile  $x$  che rappresenta un generico esemplare di un sistema fisico, e poi introducendo connettivi classici  $\neg, \wedge, \vee$ , (interpretati come *non, e, o*, rispettivamente) e regole ricorsive per ottenere *formule ben formate (fbf) molecolari* connettendo fra loro formule elementari della forma  $P(x)$  (ad esempio,  $\neg P(x)$  e  $P(x) \wedge Q(x)$  sono fbf, mentre  $\wedge \vee P(x)$  non lo è). Si possono poi introdurre le regole semantiche della logica classica (ad esempio, tabelle di verità) che definiscono un' *assegnazione di verità* sull'insieme  $\Phi(x)$  di tutte le fbf per ogni interpretazione di  $x$  su un sistema fisico specifico. L'insieme delle assegnazioni di verità definisce su  $\Phi(x)$  una relazione di (*pre*)ordine logico  $<$  (definito ponendo, per ogni coppia  $(P(x), Q(x))$  di fbf di  $\Phi(x)$ ,  $P(x) < Q(x)$  sse per ogni interpretazione di  $x$  per cui  $P(x)$  è vero anche  $Q(x)$  è vero) e una relazione di *equivalenza logica*  $\equiv$  (definita ponendo, per ogni coppia  $(P(x), Q(x))$  di fbf di  $\Phi(x)$ ,  $P(x) \equiv Q(x)$ , sse  $P(x) < Q(x)$  e  $Q(x) < P(x)$ ). La struttura d'ordine  $(\Phi(x), <)$  possiede allora alcune proprietà algebriche che la caratterizzano: in particolare, la *distributività* (per ogni terna  $(P(x), Q(x), R(x))$  di fbf di  $\Phi(x)$ , si ha  $(P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x) \equiv (P(x) \vee R(x)) \wedge (Q(x) \vee R(x))$ ), che è un attributo fondamentale della logica classica. Inoltre, se si considerano l'insieme quoziente  $\Phi(x)/ \equiv$  e l'ordine  $<'$  canonicamente indotto su di esso dall'ordine  $<$ , la struttura d'ordine  $(\Phi(x)/ \equiv, <')$  è un reticolo Booleano, matematicamente equivalente a un'algebra di Boole  $(\Phi(x)/ \equiv, \neg', \wedge', \vee')$  (dove  $\neg', \wedge', \vee'$  rappresentano le operazioni indotte canonicamente su  $\Phi(x)/ \equiv$  dai connettivi  $\neg, \wedge, \vee$ , rispettivamente). Questa algebra è detta *algebra delle proposizioni* (o *algebra di Lindenbaum-Tarski*) di  $L(x)$ .

Concludiamo questa sezione osservando che in MC tutte le proprietà sono *compatibili*, nel senso che esse possono essere misurate congiuntamente, e quindi i valori di verità degli enunciati osservativi in cui esse compaiono possono essere controllati congiuntamente. Ne segue che il valore di verità di ogni enunciato molecolare è empiricamente controllabile, poiché un controllo congiunto dei valori di verità degli enunciati osservativi che lo compongono permette di controllare il valore di verità dell'enunciato stesso. Inoltre, si può dimostrare che ogni enunciato molecolare è logicamente equivalente, in MC, a un enunciato osservativo, e in questo senso può essere ritenuto anch'esso osservativo.

## 5. La meccanica quantistica

Nelle opere che trattano le difficoltà concettuali della MQ è frequente trovare la citazione di una famosa asserzione di Feynmann: "... I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics" [8]. Tuttavia da un punto di vista semantico questa affermazione è ambigua. Che cosa significa in realtà "capire"? In che senso non capiamo una teoria che utilizziamo ogni giorno con enorme successo? Cercheremo in questa sezione di rispondere a queste domande analizzando il linguaggio della MQ nel quadro dell'*interpretazione standard* (o di *Copenhagen*) di questa teoria.

Come primo passo osserviamo che anche nel linguaggio teorico della MQ, come in quello della MC, compare la nozione primitiva di sistema fisico, mentre la nozione di grandezza fisica è sostituita dalla nozione di *osservabile*. Una proprietà è allora definita come una coppia  $P = (A, \Delta)$ , dove  $A$  è un'osservabile e  $\Delta$  un intervallo dell'asse reale, e la formula  $P(a)$  rappresenta formalmente l'enunciato "l'osservabile  $A$  assume valore in  $\Delta$  sul sistema fisico  $a$ " (che è osservativo, come nel caso della fisica classica, perché è associato a una possibile misura di  $P$ ). La nozione di stato, tuttavia, non può essere introdotta in analogia con la definizione classica, e quindi compare come primitiva, perché la MQ compie ora un passo epistemologico fondamentale: la negazione del principio di oggettività O. Questa negazione è introdotta nel corso della costruzione e interpretazione della teoria (Bohr: inseparabilità del sistema fisico microscopico dall'apparato di misura [9]; Heisenberg: le proprietà dei sistemi microscopici prima di una misura sono *potenziali* e divengono *attuali* solo dopo una misura [10]). In questa fase, tuttavia, la negazione del principio O appare come una scelta decisiva ma non ha una giustificazione che la renda inevitabile (l'argomentazione basata sull'analisi dell'esperimento delle due fenditure, che si ritrova ancora oggi nei manuali di MQ elementare, è discutibile da vari punti di vista [11]). Per avere un supporto (apparentemente) definitivo alla negazione del principio O occorre attendere fino agli anni sessanta del secolo scorso, quando un primo lavoro di Bell, nel 1964 [12], un secondo lavoro di Bell, nel 1966 [13], e un lavoro di Kochen e Specker, nel 1967 [14], dimostrano che l'introduzione nella MQ del principio di oggettività implicherebbe contraddizioni con le leggi della MQ. Più precisamente, il lavoro di Bell del 1966

e quello di Kochen e Specker del 1967 dimostrano che il valore di verità di un enunciato che attribuisce una proprietà a un sistema fisico dato non può sussistere a priori rispetto a una misura della proprietà, perché dipende dal contesto adottato per controllare se il sistema possiede la proprietà in questione. In altre parole, essi dimostrano che la MQ è una teoria contestuale (teorema di Bell-Kochen-Specker). Il lavoro di Bell del 1964 considera invece sistemi fisici composti da sottosistemi e dimostra che misure diverse di proprietà effettuate su un sottosistema possono attualizzare proprietà diverse sull'altro sottosistema, indipendentemente dalla distanza fra i due sottosistemi. In altre parole, esso dimostra la *contestualità a distanza*, o *nonlocalità*, della MQ (teorema di Bell). A causa di questi teoremi si ritiene comunemente che l'impossibilità di assumere il principio O in MQ non possa essere messa in discussione, perché "matematicamente dimostrata" come conseguenza ovvia della contestualità.

Le implicazioni della negazione del principio O sono in genere controintuitive. È da questa negazione, infatti, che seguono famosi paradossi (cioè contraddizioni con le aspettative intuitive, da non confondere con antinomie della teoria), come quelli di Einstein Podolski-Rosen, del gatto di Schrödinger e dell'amico di Wigner. Il primo di essi consiste nel fatto che la scelta e l'effettuazione di una misura da parte dell'osservatore può selezionare istantaneamente a distanza le proprietà che vengono attualizzate (la "spooky action at a distance", criticata da Einstein). Gli altri mettono in evidenza il fatto che l'ipotesi che le MQ sia una teoria universale (quindi applicabile anche agli apparati di misura) implica l'intervento della coscienza dell'osservatore nell'attualizzazione delle proprietà del sistema osservato.

Più in generale, la negazione del principio O impedisce la costruzione di un'interpretazione intesa della MQ su un modello  $M$  che sia diretta e completa, al contrario di quanto accade in MC (cfr. Sezione 4), poiché un'interpretazione di questo tipo assegnerebbe, tramite l'interpretazione di  $M$  sul dominio fisico (cfr. Sezione 3) un valore di verità ad ogni enunciato osservativo, indipendentemente dall'osservazione. Viene meno così un importante supporto all'intuizione fisica. Se "capire" significa costruire un modello, ed eventualmente ipostatizzarlo, allora si spiega l'asserzione di Feynmann citata all'inizio di questa sezione.

La negazione del principio O ha inoltre conseguen-

ze in logica. Infatti enunciati osservativi della forma  $P(a)$  non sono dotati di valore di verità, e lo acquistano solo quando si effettua una misura della proprietà  $P$ . In questo senso la nozione di verità si identifica con la nozione di verificaione: l'enunciato  $P(a)$  è vero *se e solo se* (*sse*) è verificato da una misura, falso se e solo se è falsificato. Un linguaggio con connettivi classici costruito a partire da enunciati elementari di questo tipo non ammette un'interpretazione semantica che attribuisca ad ogni enunciato (atomico o molecolare) un valore di verità: sono possibili solo assegnazioni parziali dipendenti dai processi di misura effettuati. Da queste considerazioni nasce la logica quantistica, di cui tratteremo nella prossima sezione.

Infine, la negazione del principio O ha conseguenze in teoria della probabilità. Essa implica infatti che sia impossibile un'interpretazione *epistemica* (o *di ignoranza*) delle probabilità quantistiche: la probabilità non può essere una misura (indiretta) della nostra ignoranza dei valori di verità degli enunciati considerati, poiché tali valori non preesistono all'osservazione. La probabilità quantistica sarebbe quindi *ontica*. Inoltre essa non soddisfa gli assiomi della probabilità classica, come vedremo nella Sezione 7.

Le conseguenze della negazione del principio O considerate sopra sono sconcertanti e contrastano fortemente con la concezione classica del mondo. Sorge quindi spontanea la domanda: la negazione di questo principio è effettivamente inevitabile? Oppure è possibile trovare un'interpretazione della MQ che, senza ritornare necessariamente a una visione tradizionale, ci fornisca una descrizione del mondo più vicina alla nostra intuizione recuperando il principio di oggettività? Come si è visto, si ritiene comunemente che i teoremi di Bell e Bell-Kochen-Specker (e numerosi teoremi "no-go" successivi) mostrino rigorosamente che non è possibile mantenere un principio di oggettività in MQ, e che quindi la risposta alle domande precedenti sia necessariamente negativa. Tuttavia un'analisi approfondita mostra che i teoremi in questione dipendono da un'assunzione epistemologica implicita. Se tale assunzione non è accettata, la dimostrazione dei teoremi non può essere completata. Non si può quindi escludere, almeno da un punto di vista logico, che un'interpretazione della MQ che mantenga il principio O (un'interpretazione, quindi, "realistica", almeno in senso semantico) sia in linea di principio possibile. La comunità dei fisici è spesso ostile a processi critici di questo tipo. Ne daremo tuttavia un breve rendiconto nella Sezione 8.

## 6. Il linguaggio della meccanica quantistica e la logica quantistica

Sia nel linguaggio della MC che in quello della MQ si considerano solo proprietà atte a formare enunciati osservativi. Tuttavia in MC tutte le proprietà sono fra loro compatibili nel senso specificato al termine della Sezione 4. In MQ, invece, esistono proprietà *incompatibili*, nel senso che esse non possono essere misurate congiuntamente, e quindi i valori di verità degli enunciati osservativi in cui esse compaiono non possono essere controllati congiuntamente. A causa di questo fatto e della negazione del principio O, non è possibile adottare le procedure utilizzate in MC per costruire un sottolinguaggio elementare del linguaggio della MQ. Si possono infatti introdurre gli stessi simboli per i connettivi e le stesse regole formali per la formazione di formule ben formate (fbf), ma la negazione del principio O impedisce di assegnare alle fbf valori di verità a priori rispetto all'osservazione, contrariamente a quanto avviene in MC, e le fbf molecolari non sono in genere osservative se contengono proprietà incompatibili. L'individuazione di un linguaggio di base per la MQ è perciò effettuata in letteratura in modo diverso, facendo ricorso alla rappresentazione matematica di sistemi fisici, stati e proprietà in MQ.

Nelle presentazioni elementari della MQ (quindi, in particolare, in assenza di regole di superselezione), ogni sistema fisico è associato a uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  sui complessi, i cui vettori rappresentano gli stati (puri) del sistema. I sottospazi chiusi di  $\mathcal{H}$  o, equivalentemente, i proiettori ortogonali su  $\mathcal{H}$ , rappresentano le proprietà del sistema. Ogni esemplare individuale  $a$  del sistema fisico considerato si trova in uno stato  $S$  rappresentato da un vettore unitario  $|\psi\rangle$  di  $\mathcal{H}$ , e un enunciato elementare della forma  $P(a)$ , dove  $P$  è una proprietà del sistema rappresentata da un proiettore  $P$ , è associato dalla regola di Born a un numero reale  $|\langle P|\psi\rangle|^2 \in [0, 1]$  rappresentante la probabilità che  $P$  sia attualizzata in una misura di  $P$  su  $a$ . Nasce così la proposta di Birkhoff e von Neumann [15]: quella di considerare le proprietà come proposizioni di una logica non classica, la logica quantistica, che costituirebbe così il linguaggio di base della MQ.

Da un punto di vista matematico, la logica quantistica si differenzia dalla logica classica per la sua struttura algebrica. L'insieme  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  dei sottospazi chiusi di  $\mathcal{H}$ , che rappresentano le proposizioni di questa lo-

gica, è infatti parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione  $\subset$ , e la struttura d'ordine  $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \subset)$  è notoriamente equivalente a una struttura algebrica di reticolo ortomodulare  $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \perp, \cap, \cup)$  (dove  $\perp$ ,  $\cap$  e  $\cup$  rappresentano operazioni di ortocomplementazione, intersezione e unione, rispettivamente, su  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ). L'insieme delle proposizioni  $\mathcal{P}$  è allora dotato di un ordine  $\prec$  indotto da  $\subset$  e di operazioni indotte da  $\perp$ ,  $\cap$  e  $\cup$  (che denoteremo ancora, per brevità, con  $\perp$ ,  $\cap$  e  $\cup$ ). Pertanto  $(\mathcal{P}, \perp, \cap, \cup)$  è un reticolo ortomodulare. Se l'ordine  $\prec$  è interpretato come ordine logico (*implicazione*) in logica quantistica, questo reticolo può essere confrontato con l'algebra delle proposizioni della MC introdotta in Sezione 4. È immediato verificare che le due strutture non sono isomorfe (tranne in casi molto particolari) e che i connettivi quantistici  $\perp$ ,  $\cap$  e  $\cup$  hanno interpretazioni che non coincidono con quelle dei connettivi classici  $\neg$ ,  $\wedge$  e  $\vee$ . Il linguaggio della MQ sarebbe quindi profondamente diverso da quello della MC.

Secondo alcuni autori (e.g., [16], [17]) la logica quantistica formalizzerebbe le proprietà di una nozione non classica di verità (che chiameremo *Q-verità* nel seguito) implicita nella MQ, e quest'ultima richiederebbe nuove modalità di ragionamento, inconciliabili con le modalità classiche. Questa posizione si presta facilmente a una generalizzazione. Infatti, i sostenitori del *pluralismo locale* ritengono che ogni teoria scientifica si costruisca una propria logica, che deve essere utilizzata nei ragionamenti interni alla teoria, e rifiutano l'idea che esista un'unica logica che presiede ai ragionamenti matematici e scientifici. Il pluralismo locale, tuttavia, può essere criticato da diversi punti di vista. Innanzitutto, infatti, esso rende difficile capire come sia possibile assegnare criteri di razionalità indipendenti dalle teorie specifiche, distinguendo teorie scientifiche e teorie non scientifiche (affrontando cioè il *problema della demarcazione*). In secondo luogo, resta da spiegare il rapporto fra il metalinguaggio in cui sono costruite le teorie, che è un frammento del linguaggio naturale che sottende la nozione classica di verità, e i linguaggi specifici di singole teorie che sottendono nozioni di verità non classiche.

Al punto di vista del pluralismo locale si contrappone il *pluralismo globale* [18]. Secondo questa posizione, strutture logiche non classiche formalizzano le proprietà di nozioni metalinguistiche diverse dalla nozione di verità, eventualmente dipendenti dalla teoria a cui ci si riferisce, non le proprietà di una

nozione di verità alternativa alla nozione classica. Aderendo a questa prospettiva, il gruppo di ricerca sui fondamenti della MQ di Lecce ha dimostrato che è possibile individuare una struttura isomorfa alla logica quantistica immersa nel linguaggio  $L(x)$  della MC introdotto nella Sezione 4 [19], [20]. La procedura seguita è complessa, ma i passi che conducono al risultato finale sono facili da descrivere. Infatti, si introduce innanzitutto su  $L(x)$  una nozione (metalinguistica) di *verità certa* (brevemente, *C-verità*), definita a partire dalla nozione classica di verità ma tale da assegnare ad ogni fbf di  $L(x)$  uno di tre possibili valori *C-vero*, *C-falso* e *C-indeterminato*. Si introduce poi sull'insieme  $\Phi(x)$  di tutte le fbf di  $L(x)$  un *ordine fisico*  $\prec$ , più forte dell'ordine logico e indotto dalla C-verità, e si seleziona un sottoinsieme  $\Phi_V(x) \subset \Phi(x)$  di fbf *verificabili* di  $\Phi(x)$ . Se la selezione di  $\Phi_V(x)$  è effettuata tenendo conto delle proprietà della nozione di verifica in MQ, la struttura d'ordine  $(\Phi_V(x), \subset)$  ammette un'operazione (unaria) di ortocomplementazione ed è isomorfa alla logica quantistica.

Il risultato descritto sopra è interessante per due motivi. Innanzitutto, esso mostra che la logica quantistica non è caratteristica della MQ, poiché una struttura isomorfa ad essa può essere ritrovata all'interno di un linguaggio classico la cui semantica, come si è visto all'inizio di questa sezione, non è compatibile con la MQ (esempi di strutture isomorfe ad una logica quantistica nel caso di sistemi macroscopici cui si applica la MC sono stati infatti proposti ripetutamente da vari autori della scuola di Bruxelles (e.g., [21])). In secondo luogo, esso suggerisce di identificare la nozione di Q-verità con la nozione di C-verità su fbf verificabili, che è derivata dalla nozione classica di verità e non si oppone ad essa, anche se ha caratteristiche diverse (in particolare, come si è visto, ha tre possibili valori). Questa identificazione è confermata dai risultati ottenuti in un successivo lavoro [22], in cui una logica classica, generalizzata introducendo una semantica solo parzialmente definita per renderla compatibile con la MQ (cfr. Sezione 5), è estesa in senso pragmatico, considerando, oltre agli enunciati della logica classica, *asserzioni* (cioè enunciati sul cui valore di verità il parlante è impegnato, e che possono quindi essere *giustificate* o *ingiustificate*, ma non vere o false) e *connettivi pragmatici* che collegano asserzioni. Infatti si può provare che questa estensione include la logica quantistica se si considerano solo enunciati verificabili e se l'asserzione di un enunciato

di questo tipo è considerata (empiricamente) giustificata quando l'enunciato risulta (certo) vero in MQ. La logica quantistica può quindi essere considerata come una struttura che formalizza le proprietà della nozione metalinguistica di giustificazione in MQ, conformemente al punto di vista del pluralismo globale, e non come il linguaggio di base della MQ.

## 7. La probabilità quantistica

La probabilità classica possiede una struttura matematica ben definita, determinata dal sistema di assiomi enunciati da Kolmogorov [23], ma ne sono state proposte molte "interpretazioni" (matematica, frequentista, soggettivista). La maggioranza degli studiosi, comunque, concorda nel considerarla come una misura (indiretta) della nostra incompleta conoscenza di tutte le condizioni che determinano l'accadere di un evento fisico: essa è cioè epistemica.

Da un punto di vista classico, la probabilità che un dato evento fisico accada equivale alla probabilità che l'enunciato che asserisce l'accadere dell'evento abbia valore di verità  $V$  (*vero*). Le distribuzioni di probabilità della MC si possono quindi tradurre immediatamente in distribuzioni di probabilità sul linguaggio della MC. In modo analogo le distribuzioni di probabilità della MQ si possono tradurre in distribuzioni di probabilità sul linguaggio della MQ, che è costituito, secondo il punto di vista standard, dalla logica quantistica. Ma questa logica non ha, come si è visto, la struttura della logica classica: in particolare, la probabilità classica è definita sull'algebra di Lindenbaum-Tarski, che è un reticolo Booleano (cfr. Sezione 4), mentre la probabilità quantistica è definita sulla logica quantistica, che ha struttura di reticolo ortomodulare, generalmente non distributivo (cfr. Sezione 6). Conseguentemente la probabilità quantistica non soddisfa gli assiomi di Kolmogorov. Inoltre essa non può costituire una misura (indiretta) della nostra ignoranza di valori di verità preesistenti a una misura, a causa della negazione del principio di oggettività: essa infatti si riferisce a valori di verità successivi a una misura, e quindi a un processo di attualizzazione determinato dall'osservatore. Secondo molti studiosi, la probabilità quantistica costituisce allora un elemento primario della nostra descrizione del mondo, e in questo senso essa è considerata ontica (cfr. Sezione 5).

La tesi che precede, comunque, è criticabile a causa della scelta della logica quantistica come linguaggio

fondamentale della MQ. Infatti, abbiamo visto nella Sezione 6 che tale logica non è caratteristica della MQ. Inoltre, essa può essere intesa come formalizzazione matematica delle proprietà di una nozione di giustificazione empirica piuttosto che di quelle di una nozione di verità. Si potrebbe tentare di superare quest'ultima obiezione accettando una teoria verificazionista della verità, secondo cui *vero* significa *verificato*, e *falso* significa *falsificato*. Ma l'identificazione di verità e verificabilità confonde la verità con la conoscenza (empirica) della verità, e non tiene conto del fatto che la nozione di verifica presuppone la nozione di verità (la verifica di un enunciato osservativo si effettua infatti determinando empiricamente il suo valore di verità). Inoltre, come abbiamo già osservato nella Sezione 2, in una teoria scientifica possono esistere enunciati il cui valore di verità è definito ma non empiricamente controllabile. Infine, non è chiaro come la logica quantistica possa tener conto della caratteristica fondamentale del linguaggio della MQ secondo l'interpretazione standard di questa teoria: la negazione del principio di oggettività, o, equivalentemente, la contestualità (cfr. Sezione 5).

Tenendo conto delle obiezioni esposte sopra è stato introdotto in un recente lavoro [24] un nuovo linguaggio per l'interpretazione standard della MQ che tiene conto fin dall'inizio della contestualità, in modo tale che su di esso si possano definire assegnazioni classiche di verità, distribuzioni di probabilità classiche, e, come probabilità derivate, probabilità quantistiche. L'idea centrale di questa proposta consiste nel considerare un linguaggio simile al linguaggio  $L(x)$  introdotto in Sezione 4, associando ad ogni proprietà  $P$  una famiglia di possibili procedure di misura macroscopiche. Ogni procedura associata a  $P$  è poi a sua volta associata a una famiglia di  $\mu$ -contesti, ognuno dei quali rappresenta una possibile configurazione microscopica della procedura. Gli enunciati elementari della forma  $P(x)$  sono allora sostituiti da enunciati della forma  $P_C(x)$ , dove  $P_C$  rappresenta una *proprietà contestuale* e  $P_C(x)$  rappresenta formalmente l'espressione "il sistema fisico  $x$  possiede la proprietà  $P$  nel  $\mu$ -contesto  $C$ ", o, brevemente, "il sistema fisico  $x$  possiede la proprietà contestuale  $P_C$ ". Utilizzando come elementari questi nuovi enunciati, si costruisce un linguaggio dotato di semantica e connettivi classici, associato quindi a una nozione classica di verità. Su questo linguaggio è allora possibile assegnare distribuzioni classiche di probabilità subordinata (*probabilità condizionali  $\mu$ -contestuali*).

Queste probabilità costituiscono tuttavia nozioni puramente teoriche e non sono empiricamente controllabili. Ma se si introduce una relazione binaria di *misurabilità congiunta* sull'insieme delle fbf si possono definire probabilità quantistiche empiricamente controllabili come medie delle probabilità condizionali  $\mu$ -contestuali su sottoinsiemi di  $\mu$ -contesti. Il procedimento è complesso e non è possibile descriverlo nei dettagli in questa sede: ma quanto precede è sufficiente per comprendere che esso permette di considerare le probabilità quantistiche come probabilità derivate a partire da probabilità classiche, e quindi di considerarle come epistemiche (con riferimento ai valori di verità assegnati a enunciati ove compaiono proprietà contestuali invece che semplici proprietà). Anche questo risultato è innovativo e mette in discussione convinzioni largamente diffuse.

## 8. Il realismo delle proprietà e i teoremi di Bell e di BKS: un'analisi critica

Nelle Sezioni 6 e 7 le considerazioni sul linguaggio della MQ, sulla logica quantistica e sulla probabilità quantistica fanno riferimento all'interpretazione standard della MQ, in cui la contestualità di questa teoria (e quindi la negazione del principio O) è accettata come un dato di fatto. Tuttavia si è osservato nella Sezione 4 che le "prove matematiche" della contestualità possono essere sottoposte a un'analisi critica che ne rivela la dipendenza da un'ipotesi epistemologica implicita senza la quale le prove stesse non possono essere completate [25]. Questa osservazione è particolarmente importante perché suggerisce che sia possibile, adottando una diversa prospettiva epistemologica, elaborare un'interpretazione della MQ che non implichi la contestualità e le sue conseguenze controintuitive. Dedicheremo perciò la presente sezione ad approfondire questo argomento, evitando per quanto possibile di entrare in dettagli tecnici.

Come punto di partenza della nostra analisi, consideriamo le dimostrazioni dei teoremi di Bell e Bell-Kochen-Specker. Esse sono costruite secondo lo schema seguente.

- (i) Sia  $L$  una legge teorica della MQ.
- (ii) Siano  $L_1, L_2, \dots$  leggi della MQ relative a un sistema fisico  $a$  dedotte da  $L$  ed *empiricamente controllabili* (brevemente, *testabili*) perché in ognuna di esse compaiono solo osservabili fra loro compatibili,

ma non *congiuntamente testabili* perché in alcune di esse compaiono osservabili non compatibili con le osservabili che compaiono nelle altre.

(iii) Si supponga che tutte le osservabili che compaiono in  $L_1, L_2, \dots$  abbiano valore predeterminato su  $a$ .

(iv) Si dimostra, scegliendo esempi opportuni, che qualunque scelta di valori delle osservabili falsifica qualcuna delle leggi.

La falsificazione ottenuta in (iv) può essere interpretata in due modi.

Secondo l'interpretazione standard essa dimostra che l'ipotesi in (iii) è incompatibile con la MQ, e che i valori delle osservabili non sono predeterminati. Scegliendo di controllare  $L_1$  su  $a$  si determina un contesto di misura che per ogni osservabile che compare in  $L_1$  attualizza uno dei valori potenziali che l'osservabile può assumere, in modo tale che  $L_1$  risulta verificata se è dedotta correttamente da  $L$ . Analogamente se si sceglie  $L_2$ , ecc. Ma se un'osservabile compare in più di una legge, il valore attualizzato dipende dalla legge scelta, perché il contesto di misura richiesto per il controllo dipende da tale legge.

Alternativamente, si può spiegare la falsificazione accettando che i valori delle osservabili siano predeterminati (ipotesi (iii)) e mettendo invece in discussione la generalità dell'apparato delle leggi teoriche, senza tuttavia rinunciare alla correttezza delle previsioni quantistiche. Si può ritenere infatti che la legge  $L$  faccia parte di un calcolo da cui sono deducibili leggi derivate. Se queste sono testabili, esistono contesti di misura atti a controllarle empiricamente, e i valori delle osservabili che in esse appaiono sono vincolati a soddisfarle in tali contesti. Se le leggi derivate non sono testabili (come, ad esempio, la congiunta di  $L_1, L_2, \dots$  o, necessariamente, la  $L$  stessa), non esiste alcun contesto in cui esse siano empiricamente controllabili e i valori delle osservabili che in esse compaiono non sono tenuti a soddisfarle.

L'interpretazione standard sottende una posizione di tipo classico per quanto riguarda le leggi della teoria, che sono considerate comunque valide (per alcuni esprimono verità ontologiche, come la concezione ontica della probabilità) anche quando non sono empiricamente controllabili, e un punto di vista non classico per quanto riguarda le assegnazioni di verità agli enunciati elementari della forma "l'osservabile  $A$  ha valore in  $\Delta$  su  $a$ ", che non hanno valore di verità predeterminato.

Inversamente, l'interpretazione alternativa esprime

una posizione classica per quanto riguarda le assegnazioni di verità, ma non ipostatizza l'apparato delle leggi teoriche e si limita ad assumere che tale apparato produca leggi testabili valide nei contesti in cui esse possono essere controllate empiricamente, ma non necessariamente valide in altri contesti. Essa sembra quindi più coerente con l'ispirazione originaria della MQ, che considerava "metafisica" ogni asserzione che non potesse essere empiricamente controllata.

Entrambe le prospettive incontrano comunque qualche difficoltà concettuale.

Nel caso dell'interpretazione standard la difficoltà principale è costituita dalla non-località (teorema di Bell, cfr. Sezione 5).

Nel caso dell'interpretazione alternativa si introduce una contestualità delle leggi testabili della MQ che si contrappone alla contestualità dei valori delle proprietà ipotizzata dall'interpretazione standard e che attribuisce un ruolo controintuitivo all'apparato teorico da cui le leggi stesse sono dedotte. Si deve notare, tuttavia, che questo tipo di contestualità apre nuove prospettive di sviluppo della teoria, suggerendo che possa esistere uno schema più ampio di leggi teoriche che fornisce leggi valide indipendentemente dal contesto di misura: la MQ sarebbe allora una teoria incompleta, come sosteneva Einstein. Inoltre l'interpretazione alternativa conserva le predizioni della MQ, poiché ogni predizione prende necessariamente la forma di una legge particolare testabile.

Tenendo conto di quanto precede, il gruppo di ricerca sui fondamenti della MQ di Lecce ha proposto in alcuni lavori uno schema teorico in cui le leggi della MQ sono spiegate come casi particolari di leggi più generali [25], [26], [27]. In questi lavori si accetta il principio O di Sezione 2, assumendo che tutte le proprietà predicabili per un dato sistema fisico siano, in ogni situazione fisica, possedute o non possedute dal sistema, nel senso che tutti gli enunciati osservativi della forma  $P(x)$  (cfr. Sezione 5) hanno valore di verità, indipendentemente da ogni controllo empirico (*realismo semantico*). Si introduce poi, per ogni misura di una proprietà del sistema, una probabilità di non-rivelazione dipendente dalla proprietà stessa e dallo stato del sistema (cioè dall'insieme delle proprietà possedute dal sistema). La probabilità quantistica è allora reinterpretata assumendo che essa si riferisca solo al sottoinsieme di sistemi microscopici rivelabili dalla misura (supposta "esatta", e quindi con efficienza pari ad uno) e non all'insieme di sistemi che sono stati preparati e su cui si effettua la misura.

Questa ipotesi permette, da un lato, di recuperare il formalismo della MQ, e dall'altro di reinterpretare tale formalismo evitando la contestualità. Si deve notare, tuttavia, che i fisici sperimentali sostengono attualmente di fare osservazioni in cui sono rivelati tutti i sistemi preparati. Se tale rivendicazione fosse corretta, la proposta del gruppo di Lecce, che è falsificabile, sarebbe messa in discussione (ma non necessariamente falsificata).



[1] C. Dalla Pozza e A. Negro: *Come distinguere scienza e non-scienza*. Carocci Editore, Roma (2017).

[2] R. B. Braithwaite: *Scientific Explanation*. Cambridge University Press, Cambridge (1953).

[3] C. G. Hempel: *Aspects of Scientific Explanation*. Free Press, New York (1965).

[4] R. Carnap: *Philosophical Foundations of Physics*. Basic Books Inc., New York (1966).

[5] T. S. Kuhn: *The Structure of Scientific Revolution*. Chicago University Press, Chicago (1962).

[6] F. Feysabend: *Against Method: Outline of an Anarchist Theory of Knowledge*. New Left Books, London (1975).

[7] Tarski, A.: The concept of truth in formalized languages. In J.M. Woodger (Ed.), *Logic, Semantics, Metamathematics* (pp. 152-268). Oxford University Press, Oxford (1956).

[8] R. P. Feynmann: The Messenger Lecture Series at Cornell, Lecture 6. In *The Character of Physical Laws*. The MIT Press, 1967/1917 (1964).

[9] N. Bohr: *Atomic Physics and Human Knowledge*. John Wiley and Sons, London (1958).

[10] W. Heisenberg: *Physics and Philosophy: the Revolution of Modern Science*. Harper, New York (1958).

[11] C. Garola e S. Sozzo: (2010). Realistic aspects in the standard interpretation of quantum mechanics, *Humana.mente. J. Phil. Stud.* **13**, 81-101.

[12] J. S. Bell: On the Einstein-Podolski-Rosen Paradox, *Physics* **1** (1964), 195-200.

[13] J. S. Bell: On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics, *Rev. Mod. Phys.* **38** (1966), 447-452.

[14] S. Kochen e E. P. Specker: The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics, *J. Math. Mech.* **17** (1967), 59-87.

[15] G. Birkhoff and J. von Neumann: The Logic of Quantum Mechanics, *Ann. Math.* **37** (1936), 823-843.

[16] N. Rédei: *Quantum Logic in Algebraic Approach*. Kluwer, Dordrecht (1998).

[17] M. L. Dalla Chiara, R. Giuntini e R. Greechie: *Reasoning in Quantum Theory*. Kluwer, Dordrecht (2004).

[18] S. Haack: *Philosophy of Logic*. Cambridge University Press, Cambridge (1978).

[19] C. Garola: Physical propositions and quantum languages, *Int. J. Theor. Phys.* **47** (2008), 90-103.

[20] C. Garola e S. Sozzo: Recovering quantum logic within an extended classical framework, *Erkenntnis* **78** (2013), 399-419.

[21] D. Aerts: Foundations of quantum physics: a general realistic and operational approach, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999), 289-358.

[22] C. Garola: Interpreting quantum logic as a pragmatic structure, *Int. J. Theor. Phys.* **56** (2017), 3770-3782.

[23] A. N. Kolmogorov: *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company, New York (1956).

[24] C. Garola: An epistemic interpretation of quantum probability via contextuality, *Found. Sci.* (2018), DOI 10.1007/s10699-018-9560-4.

[25] C. Garola e M. Persano: Embedding quantum mechanics into a broader noncontextual theory, *Found. Sci.* **19** (2014), 217-239.

[26] C. Garola: A survey of the ESR model for an objective interpretation of quantum mechanics, *Int. J. Theor. Phys.* **54** (2015), 4410-4422.

[27] C. Garola, S. Sozzo e J. Wu: Outline of a generalization and a reinterpretation of quantum mechanics recovering objectivity, *Int. J. Theor. Phys.* **55** (2016), 2500-2528.



**Claudio Garola:** è stato professore associato di Istituzioni di Fisica Teorica e professore ordinario di Logica e Filosofia della Scienza presso il Dipartimento di Fisica dell'Università del Salento, ed è attualmente in pensione. Durante il periodo di servizio ha tenuto corsi di Fisica Generale, Algebra, Istituzioni di Fisica Teorica e Fondamenti di Meccanica Quantistica. La sua attività di ricerca ha riguardato argomenti di fisica teorica, di elettromagnetismo, di algebra e di fondamenti della fisica. In particolare, nel settore dei fondamenti ha introdotto una metodologia non convenzionale, consistente nell'analizzare le strutture sintattiche e le proprietà semantiche dei linguaggi delle teorie fisiche per individuare i punti problematici e le assunzioni implicite che ne condizionano lo sviluppo. Dopo il pensionamento, nel 2011, ha continuato a collaborare con riviste internazionali e ha proseguito le ricerche iniziate nel periodo in cui era in servizio. I suoi lavori più recenti riguardano la logica quantistica, la probabilità quantistica e (in collaborazione) una generalizzazione della meccanica quantistica che ne modifica l'interpretazione standard, evitando noti paradossi.



# Gli spazi metrici probabilistici

Carlo Sempi

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi"  
Università del Salento, Lecce

In questo articolo cercherò di presentare brevemente gli *Spazi Metrici Probabilistici* (SMP), senza entrare nei particolari, evitando, per esempio, di parlare della Topologia e dell'Analisi funzionale che essi generano. Non posso però fare a meno di citare come essi abbiano dato origine a nuovi campi di ricerca, in primo luogo, le norme triangolari, le funzioni triangolari e le copule (di queste ultime non parlerò affatto). Chi sia interessato a proseguire oltre la succinta informazione che qui ne dò, può rivolgersi alla magistrale presentazione che ne hanno fatto Schweizer e Sklar nella loro monografia [1]. Basta solo aggiungere che l'introduzione di due argomenti nella Classificazione degli argomenti matematici (MSC) di *MathSci* e *ZbMath*, 54E70 (Probabilistic metric spaces) e 46S50 (Functional analysis in probabilistic metric linear spaces) è stata motivata dallo studio degli SMP.

## L'inizio della storia

Si può dire che la storia degli Spazi Metrici Probabilistici (in breve SMP) abbia inizio con l'articolo [2] di Karl Menger nel volume *Albert Einstein, Philosopher-Scientist* [3] di articoli di vari autori dedicati aspetti scientifici e filosofici dell'opera di

Albert Einstein. Nell'articolo citato Menger parla soprattutto della geometria della relatività e, più in generale, della geometria nelle teorie fisiche. Al termine dell'articolo Menger brevemente considera che per alcune teorie fisiche potrebbe essere opportuno sostituire all'idea di distanza tra due punti la nozione della probabilità che tale distanza possa essere inferiore a una certa quantità. Quel breve commento ha dato origine allo studio degli *Spazi Metrici Probabilistici*<sup>1</sup>; qui essi saranno brevemente indicati come SMP.

In termini più precisi, dato un insieme  $S$ , a ogni coppia  $(p, q)$  di punti di  $S$  si associa una funzione di ripartizione  $F_{pq}$  tale che sia  $F_{pq}(t) = \mathbb{P}(d(p, q) < t)$ , per  $t > 0$ . Qui  $\mathbb{P}$  indica una misura di probabilità. Ricordo che una funzione di ripartizione (in breve f.r.) è una funzione  $F$  da  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]^2$  in  $[0, 1]$  tale che

- (a) sia crescente:  $F(x) \leq F(x')$  per  $x < x'$ ;
- (b) sia continua a sinistra<sup>3</sup>;
- (c)  $F(-\infty) = 0$  e  $F(+\infty) = 1$ .

Non tutte le f.r. sono adeguate alla funzione definita sopra; infatti, poiché una distanza è necessaria-

<sup>1</sup>In realtà all'inizio essi furono chiamati Spazi Metrici Statistici; solo in un secondo momento il nome cambiò in quello attuale.

<sup>2</sup> $\overline{\mathbb{R}}$  è la retta reale ampliata con i due punti  $-\infty$  e  $+\infty$ ; questa scelta si rende necessaria perché nelle applicazioni appaiono grandezze che assumono i valori  $-\infty$  e  $+\infty$  con probabilità non nulla.

<sup>3</sup>La letteratura scientifica oscilla tra il richiedere che  $F$  sia continua a destra o a sinistra; nella teoria degli SMP vi è una certa convenienza a scegliere la continuità a sinistra.

mente positiva ( $\geq 0$ ), si considerano esclusivamente f.r.  $F$  tali che  $F(0) = 0$  e che si chiameranno *f.r. distanza*. Naturalmente si ha

$$\begin{aligned} & - \text{Se } p = q, \text{ allora } F_{pq}(t) = 1 \\ & \text{per ogni } t > 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & - \text{Se } p \neq q, \text{ allora esiste almeno} \\ & \text{un punto } t > 0 \text{ tale che } F_{pq}(t) < 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Indicheremo lo spazio delle f.r. distanza con  $\Delta_+$ .

Dalla simmetria valida per una distanza  $d(p, q) = d(q, p)$  scende immediatamente l'analoga proprietà di simmetria per le f.r. distanza

$$F_{pq} = F_{qp}, \quad (3)$$

per ogni coppia di punti  $p$  e  $q$  dello spazio.

Un problema assai piú arduo nasce invece dalla "traduzione" della diseuguaglianza triangolare per le distanze

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r), \quad (4)$$

valida per ogni terna  $p, q$  e  $r$  di punti (non necessariamente distinti) dello spazio. Sin dagli inizi della teoria, Menger e Wald dettero diverse soluzioni a questo problema.

## La proposta di Menger

Nell'articolo iniziale della teoria [4] Menger definí uno SMP come un insieme  $S$  dotato di una famiglia di f.r. che soddisfanno alle equazioni (1)–(3) e alla diseuguaglianza

$$F_{pr}(x + y) \geq T(F_{pq}(x), F_{qr}(y)) \quad (5)$$

per ogni scelta di  $p, q$  e  $r$  in  $S$  e di  $x$  e  $y$  in  $[0, +\infty]$ . Qui la funzione  $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  soddisfa alle condizioni

$$T(a, b) = T(b, a), \quad (6)$$

$$T(a, b) \leq T(c, d) \quad \text{se } a \leq c \text{ e } b \leq d, \quad (7)$$

$$T(a, 1) > 0 \quad \text{per } a > 0, \quad \text{e} \quad T(1, 1) = 1. \quad (8)$$

Queste proprietà si interpretano facilmente: la (6) assicura che la conoscenza del terzo lato di un triangolo dipenda in maniera simmetrica da quella degli altri due lati che, per la (7), tale conoscenza aumenti all'aumentare di quella degli altri due lati. Se è noto

che esiste una limitazione superiore per un lato e se si sa qualcosa sul secondo, allora si sa qualcosa anche sul terzo lato; infine, se esiste una limitazione superiore per entrambi i primi due lati, tale limitazione vale anche per il terzo lato. È importante rilevare che se esiste una funzione  $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$  tale che per ogni scelta di  $p$  e  $q$  in  $S$  e di  $t \geq 0$  valga

$$F_{pq}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq d(p, q), \\ 1, & t > d(p, q), \end{cases} \quad (9)$$

allora  $(S, d)$  è uno spazio metrico. Perciò ogni spazio metrico è un caso particolare di uno SMP.

## La proposta di Wald

Subito dopo l'articolo di Menger citato nella sezione precedente, Wald [5] propose di sostituire la diseuguaglianza (5) con la seguente

$$\begin{aligned} F_{pr}(t) & \geq (F_{pq} * F_{qr})(t) \\ & := \int_0^t F_{pq}(t-x) dF_{qr}(x). \end{aligned} \quad (10)$$

La diseuguaglianza di Wald si interpreta facilmente: la probabilità che la distanza di  $q$  e  $r$  sia minore di  $t$  è almeno eguale alla probabilità che la somma delle distanze tra  $p$  e  $q$  e tra  $q$  e  $r$ , *considerate come indipendenti*, sia minore di  $t$ . L'inconveniente maggiore della diseuguaglianza di Wald (10) consiste nella difficoltà di reperire esempi significativi.

## La soluzione di Schweizer e Sklar

Nel 1960 Schweizer e Sklar [6] supposero che la funzione di ripartizione distanza  $F$  definita su  $S \times S$  soddisfacesse non solo alle (1)–(3), ma anche alla condizione

$$\begin{aligned} & \text{Se è } F_{pq}(x) = 1 \text{ e } F_{qr}(y) = 1 \\ & \text{allora } F_{pr}(x + y) = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Quest'ultima condizione è implicata tanto dalla condizione di Menger (5) quanto da quella di Wald (10). Essi dimostrarono inoltre che

- se  $S$  ha piú di un punto e se  $T(a, b) \geq \max\{a, b\}$ , allora la diseuguaglianza (5) non può valere per ogni possibile scelta di  $p, q$  e  $r$  in  $S$ ;

- se  $F$  non è del tipo (9), vale a dire se  $S$  non è uno spazio metrico, allora esiste  $a \in ]0, 1[$  tale che  $T(a, 1) \leq a$ ;
- se  $T$  è continua allora  $T(F_{pq}(x), 1) \leq F_{pq}(x)$  per ogni scelta di  $p$  e  $q$  in  $S$  e per ogni  $x > 0$ .

Alla luce di queste considerazioni la (8) fu sostituita da quella piú forte

$$\forall a \in [0, 1] \quad T(a, 1) = a, \quad (12)$$

che, considerata insieme alle (6) e (7), dà, per  $a, b \in [0, 1]$

$$T(a, b) \leq T(a, 1) = a$$

e

$$T(a, b) \leq T(1, b) = T(b, 1) \leq 1.$$

Perciò ogni funzione  $T$  che soddisfa a queste condizioni soddisfa anche all'altra

$$\begin{aligned} \forall a, b \in [0, 1] \\ T(a, b) \leq M(a, b) := \min\{a, b\}. \end{aligned}$$

Si osservi che in uno spazio metrico vale non solo la disuguaglianza triangolare, ma anche quella polinomiale: basta scomporre una qualsiasi poligono in triangoli, per avere, per esempio, nel caso di un quadrilatero,

$$d(p, s) \leq d(p, q) + d(q, r) + d(r, s),$$

nella quale si sfrutta l'ovvia, ma implicita, associatività della funzione somma  $+$ .

Per poter estendere la disuguaglianza "triangolare" (5) al caso polinomiale, occorrerà richiedere che la funzione  $T$  sia associativa, vale a dire che per ogni scelta di  $a, b$  e  $c$  in  $S$  valga

$$T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c)). \quad (13)$$

In questo modo se  $p, q, r$  e  $s$  sono quattro punti di  $S$  e se sono dati  $F_{pq}(x), F_{qr}(y)$  e  $F_{rs}(z), F_{ps}(x+y+z)$  può essere stimata in due maniere distinte: combinando la stima di  $F_{pr}(x+y)$  con  $F_{rs}(z)$ , oppure combinando  $F_{pq}(x)$  con la stima di  $F_{qs}(y+z)$ . Richiedere che i due modi di procedere diano allo stesso risultato porta alla (13).

Si dice *norma triangolare*, o, piú brevemente *t-norma* una funzione  $T [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  che soddisfa alle (6), (7), (12) e alla (13). Si controlla subito che  $W(a, b) := \max\{0, a + b - 1\}$ ,  $\Pi(a, b) := ab$  e

$M(a, b) := \min\{a, b\}$  sono *t-norme* (di fatto sono le tre *t-norme* piú importanti). È una *t-norma* anche la funzione

$$Z(u, v) := \begin{cases} u, & u \in [0, 1], v = 1, \\ v, & u = 1, v \in [0, 1], \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

che però non è continua.

Data una *t-norma*  $T$  si dice *spazio di Menger rispetto a T* uno spazio nel quale le f.r. distanza  $F_{pq}$  soddisfacciano alle (1)–(3) e alla (5) con la data *t-norma*  $T$ . Si dirà *spazio di Wald* quello nel quale sono soddisfatte le (1)–(3) e la (10). Si dimostra che uno spazio di Wald è uno spazio di Menger rispetto alla *t-norma*  $\Pi$ .

Accanto alle *t-norme* conviene considerare anche le *t-conorme*. Data un *t-norma*  $T$  si dice *t-conorma* associata a  $T$  la funzione  $T^*$  definita in  $[0, 1] \times [0, 1]$  da

$$T^*(x, y) := 1 - T(1 - x, 1 - y).$$

## Alcuni esempi

*Gli spazi semplici.* Sia  $(S, d)$  uno spazio metrico; allora lo spazio semplice  $(S, d, G)$  è definito come l'insieme  $S$  dotato della famiglia di f.r. distanza definite da

$$\begin{aligned} F_{pp} &:= \varepsilon_0, \\ F_{pq}(t) &:= G\left(\frac{t}{d(p, q)}\right) \quad p \neq q. \end{aligned} \quad (14)$$

Qui si è definita, per  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\varepsilon_a(t) := \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 1, & t > a, \end{cases} \quad (15)$$

la f.r. di una variabile aleatoria che assume quasi certamente il valore  $a$ .

Per  $G = \varepsilon_1$  la (14) si riduce alla (9), sicché gli spazi metrici sono particolari spazi semplici. Uno spazio semplice è uno spazio di Menger rispetto a qualsiasi *t-norma*. Esistono spazi semplici che non sono spazi di Wald. ■

*Spazi  $\alpha$ -semplici.* Si scelga  $\alpha > 0$  e si sostituisca

la (14) con

$$F_{pq}(t) := G\left(\frac{t}{d^\alpha(p, q)}\right) \quad p \neq q. \quad (16)$$

per  $\alpha \in ]0, 1]$  uno spazio  $\alpha$ -semplice è uno spazio semplice, quindi uno spazio di Menger rispetto a ogni  $t$ -norma, mentre, per  $\alpha > 1$ , uno spazio  $\alpha$ -semplice è uno spazio di Menger solo rispetto a una particolare  $t$ -norma, che dipende da  $\alpha$ . ■

## Šerstnev, 1962

Nel 1962 Šerstnev introdusse una diseguaglianza che include tutte quelle precedenti come casi particolari e che costituisce la generalizzazione definitiva della diseguaglianza triangolare per gli SMP. È opportuno ricordare qui che lo spazio delle f.r. distanza può essere ordinato, parzialmente, ponendo  $F \leq G$  se si ha  $F(t) \leq G(t)$  per ogni  $t > 0$ . Poiché le funzioni  $\varepsilon_a$  definite dalla (15) sono f.r. distanza per ogni  $a \geq 0$ , si ha, in particolare  $F \leq \varepsilon_0$  per ogni f.r. distanza  $F$ .

**Definizione 1.** Si dice *funzione triangolare* ogni funzione  $\tau : \Delta_+ \times \Delta_+ \rightarrow \Delta_+$  tale che

$$\tau(F, G) = \tau(G, F), \quad (17)$$

$$\tau(F, G) \leq \tau(H, K) \quad (18)$$

$$\text{se } F \leq H \text{ e } G \leq K,$$

$$\tau(F, \varepsilon_0) = F, \quad (19)$$

$$\tau(\tau(F, G), H) = \tau(F, \tau(G, H)), \quad (20)$$

dove  $F, G, H$  e  $K$  sono f.r. distanza. ◇

Sulle funzioni triangolari si possono vedere i due articoli di rassegna [7] e [8].

Si può ora dare la definizione generale di SMP.

**Definizione 2.** Si dice *spazio metrico probabilistico*, in breve SMP, rispetto a una funzione triangolare  $\tau$  un insieme  $S$  con una famiglia di funzioni di ripartizione distanza  $F : S \times S \rightarrow \Delta_+$  tale che siano soddisfatte le (1)–(3) e la *diseguaglianza di Šerstnev*

$$F_{p,r} \geq \tau(F_{pq}, F_{q,r}) \quad (21)$$

per ogni scelta dei punti  $p, q$  e  $r$  in  $S$ . ◇

Nel passaggio dalla diseguaglianza triangolare (4) in uno spazio metrico  $(S, d)$  alla (21), si sono sostituiti i numeri reali che danno le distanze con funzioni di

ripartizione e l'operazione di somma tra numeri reali con una funzione triangolare  $\tau$ . Dato che  $\tau$  non è specificata oltre le proprietà richieste dalla Definizione 1, sono possibili molte diseguaglianze triangolari distinte, non equivalenti tra loro. Per esempio, se  $\tau$  è tale che, per  $a, b > 0$ , sia

$$\tau(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \geq \inf\{\varepsilon_c : c < a + b\},$$

allora la (21) implica la (11). Se  $\tau$  è la convoluzione, la (21) è la diseguaglianza di Wald (10). Un caso particolarmente importante di funzione triangolare si ha quando

$$\tau_T(F, G)(t) := \sup\{T(F(u), G(v)) : u + v = t\},$$

per una  $t$ -norma abbastanza regolare  $T$ . Anche in questo caso si dirà che  $(S, \tau_T)$  è uno spazio di Menger rispetto a  $T$ . È possibile estendere la definizione di  $\tau_T$  sostituendo a alla somma  $+$  un'altra operazione binaria suriettiva su  $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$  che sia crescente in ogni argomento e continua in  $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ , con la possibile eccezione dei due punti  $(0, +\infty)$  e  $(+\infty, 0)$ :

$$\begin{aligned} \tau_{T,L}(F, G)(t) \\ := \sup\{T(F(u), G(v)) : L(u, v) = t\} \end{aligned} \quad (22)$$

Vale allora

**Teorema 1.** Se  $T$  è una  $t$ -norma continua a sinistra e  $L$  è commutativa, associativa e tale che  $L(u_1, v_1) < L(u_2, v_2)$  quando  $u_1 < u_2$  e  $v_1 < v_2$ ,  $\tau_{T,L}$  è una funzione triangolare.

Si può definire una funzione triangolare anche a partire da una  $t$ -conorma  $T^*$  nel seguente modo

$$\begin{aligned} \tau_{T^*}(F, G)(t) \\ := \ell^- \inf\{T^*(F(u), G(v)) : u + v = t\}, \end{aligned}$$

dove è stata utilizzata la notazione

$$\ell^- f(t) := \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s < t}} f(s)$$

per il limite a sinistra nel punto  $t$ .

## Altri esempi.

*Spazi E.* Siano  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  uno spazio di probabilità,  $(M, d)$  uno spazio metrico e  $S$  un insieme di funzioni da  $\Omega$  in  $M$ . Si dice *Spazio E* la coppia  $(S, \mathcal{F})$  se

(a) per ogni scelta di  $p, q \in S$  e di  $t \in \mathbb{R}_+$  l'insieme

$$\{\omega \in \Omega : d(p(\omega), q(\omega)) < t\}$$

è misurabile, vale a dire, appartiene a  $\mathcal{A}$ ;

(b) per ogni scelta di  $p, q \in S$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p, q)(t) &= F_{pq}(t) \\ &:= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : d(p(\omega), q(\omega)) < t\}) . \end{aligned}$$

Si dimostra immediatamente che  $\mathcal{F}$  soddisfa alla (1) e alla (3); se è soddisfatta anche la (2), lo spazio si dice *canonico*. Si dimostra che un spazio  $E(S, \mathcal{F})$  canonico è uno spazio di Menger rispetto alla  $t$ -norma  $W$ . ■

*Spazi generati da una trasformazione.* Sia  $(S, d)$  uno spazio metrico e  $\varphi$  una funzione di  $S$  in sé, si indichi con  $\varphi^{(n)}$  l'iterata  $n$ -esima di  $\varphi$ , con  $\varphi^{(0)}p = p$ , e si definisca

$$F_{pq}^{(n)} := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{d(\varphi^{(k)}p, \varphi^{(k)}q)} .$$

Allora lo spazio  $(S, \mathcal{F}^{(n)})$ , dove  $\mathcal{F}^{(n)}(p, q) := F_{pq}^{(n)}$  è uno spazio  $E$  rispetto a  $\tau_W$ . È di particolare interesse il caso nel quale  $\varphi$  conservi la probabilità  $\mathbb{P}$ , definita sulla famiglia  $\mathcal{B}$  dei boreliani di  $(S, d)$ ; si dice che  $\varphi : S \rightarrow S$  conserva la probabilità  $\mathbb{P}$  se

$$\mathbb{P}(\varphi^{-1}B) = \mathbb{P}(B) .$$

In condizioni tecniche, ma non restrittive, che qui non riporto, risulta che la successione  $F_{pq}^{(n)}$  converge a una funzione di ripartizione distanza ben definita, che a sua volta genera uno SMP rispetto a  $\tau_W$  (si veda il Teorema 11.2.6 in [1]).

Si hanno risultati più forti se  $\varphi$  è (*fortemente*) *mescolante*:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\varphi^{-n}A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) .$$

In questo caso se  $A$  è tale che  $\mathbb{P}(A) > 0$ , vale il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam } \varphi^n A = \text{diam } S , \quad (23)$$

ove il diametro di un insieme  $A \subset S$  è definito da

$$\text{diam } A := \sup \{d(p, q) : p, q \in A\} .$$

Il significato fisico dell'eq. (23) è assai rilevante; per metterlo in luce occorre richiamare due risultati

importanti della teoria ergodica: i teoremi di Liouville e di ricorrenza di Poincaré.

Nella meccanica classica, lo stato di un sistema con  $n$  gradi di libertà è descritto dalle  $n$  coordinate generalizzate  $q = (q_1, \dots, q_n)$  e dai loro momenti coniugati  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Ogni stato di tale sistema è così rappresentato da un punto di coordinate  $(q, p)$  in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{2n}$  detto *spazio delle fasi*. Il moto di tale punto rappresentativo, e, quindi, del sistema considerato, è retto dalle equazioni di Hamilton

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) .$$

Qui  $H$  è la (funzione) Hamiltoniana del sistema, che è indipendente dal tempo  $t$  e, di solito, si esprime come la somma dell'energia cinetica  $K(p)$  e dell'energia potenziale  $V(q)$ . Detto  $P_0 = (q_0, p_0)$  lo stato iniziale del sistema, la soluzione delle equazioni di Hamilton determina lo stato del sistema per ogni istante  $t > 0$

$$(q_t, p_t) = \varphi_t(q_0, p_0) .$$

Si ottiene pertanto un semigruppone  $\{\varphi_t : t \geq 0\}$  di trasformazioni,

$$\varphi_{t+t'} = \varphi_t \varphi_{t'} ,$$

sullo spazio delle fasi. Tale semigruppone di trasformazioni si dice *flusso hamiltoniano* e gode della proprietà fondamentale espressa dal seguente teorema.

**Teorema 2** (di Liouville). *Il flusso hamiltoniano  $\{\varphi_t\}$  conserva la misura di Lebesgue  $\lambda_{2n}$  nello spazio delle fasi: se  $A$  è un sottoinsieme misurabile dello spazio delle fasi si ha, per ogni istante  $t \geq 0$ ,*

$$\lambda_{2n}(A) = \lambda_{2n}(\varphi_t A) .$$

Per il teorema di Liouville ogni trasformazione  $\varphi_t$  lascia invariata la misura di Lebesgue. In generale se  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  è uno spazio di misura e  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$  è una trasformazione di  $\Omega$  in sé, si dice che  $\varphi$  *conserva la misura* se, per ogni insieme misurabile  $A$ ,

$$\mu(\varphi^{-1}A) = \mu(A) .$$

Siano  $\varphi$  una trasformazione sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  che conserva la misura, e  $A$  un insieme di  $\mathcal{A}$ ; un punto  $\omega$  di  $A$  si dice *ricorrente*, rispetto a  $T$  e  $A$ , se  $\varphi^i \omega$  appartiene ad  $A$  per almeno un numero

naturale  $i$ ; si dice, invece, che  $\omega$  è *fortemente ricorrente* se  $\varphi^n \omega$  appartiene ad  $A$  per infiniti naturali, cioè se  $\omega \in \limsup_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{-n} A$ . Si dice infine che  $A$ , con  $\mathbb{P}(A) \in ]0, 1[$ , è *coerentemente ricorrente* se esiste  $a > 0$  tale che sia

$$\mathbb{P}(A \cap \varphi^n A) \geq (\mathbb{P}(A) + a) \mathbb{P}(\varphi^n A) \quad (24)$$

per un'infinità numerabile di numeri naturali  $n$ .

Vale il teorema di Poincaré che apparve nel suo trattato *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [9] del 1899 e fu il primo teorema a usare l'additività numerabile delle probabilità, benché tale concetto non fosse all'epoca ancora stato definito esplicitamente.

**Teorema 3** (di ricorrenza di Poincaré). *Siano  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  uno spazio di probabilità,  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$  una trasformazione che conserva la misura e  $A$  un insieme di  $\mathcal{A}$ . Allora, quasi tutti i punti di  $A$  sono ricorrenti.*

Il teorema di Poincaré sembra contraddire il secondo principio della termodinamica. Tuttavia si tenga presente che per rappresentare lo stato di un sistema fisico con un punto nello spazio delle fasi occorre che tale stato sia noto con esattezza. Poiché, di fatto, ciò non accade mai, un modello più realistico, che riflette sia le imprecisioni delle misurazioni sia l'impossibilità di conoscere *esattamente* la coppia  $(q, p)$  per ogni elemento del sistema, è che la configurazione iniziale del sistema sia descritta non da un punto nello spazio delle fasi, ma da un insieme di punti indistinguibili dal punto di vista sperimentale, ma di diametro strettamente positivo, benché possibilmente piccolo, e di probabilità non nulla, benché anche essa piccola. Inoltre una trasformazione mescolante non può essere coerentemente ricorrente [13].

**Teorema 4.** *Sia  $\varphi$  una trasformazione mescolante sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  tale che, per ogni  $B \in \mathcal{A}$ , sia  $\varphi B \in \mathcal{A}$  e  $\mathbb{P}(\varphi B) \geq \mathbb{P}(B)$ ; allora nessun insieme  $A \in \mathcal{A}$  con  $\mathbb{P}(A) \in ]0, 1[$  è coerentemente ricorrente.*

Se l'evoluzione del sistema è retta da una trasformazione mescolante dello spazio delle fasi l'equazione (23) e il Teorema 4 assicurano che l'insieme iniziale si diffonda in diametro e che non vi sia ricorrenza. Nelle parole di Schweizer e Sklar, "la (23) e il Teorema 4 costituiscono una parziale,

sebbene tardiva, rivendicazione dell'intuizione fisica di Ludwig Boltzmann". ■

## Gli spazi normati probabilistici

Dopo i tentativi di diversi autori, Alsina, Schweizer e Sklar [10] dettero la definizione "giusta" di *spazio Normato Probabilistico* (=spazio NP). Per una discussione più approfondita si veda l'articolo di rassegna [11] o la monografia [12].

**Definizione 3.** Uno Spazio NP è una quadrupla  $(V, \nu, \tau, \tau^*)$ , ove  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\tau$  e  $\tau^*$  sono funzioni triangolari continue e l'applicazione  $\nu : V \rightarrow \Delta_+$  soddisfa, per ogni scelta di  $p$  e  $q$  in  $V$ , alle condizioni

- (N1)  $\nu_p = \varepsilon_0$  se, e solo se,  $p = \theta$  ( $\theta$  è il vettore nullo di  $V$ );
- (N2)  $\forall p \in V \quad \nu_{-p} = \nu_p$ ;
- (N3)  $\nu_{p+q} \geq \tau(\nu_p, \nu_q)$ ;
- (N4)  $\forall \alpha \in [0, 1] \quad \nu_p \leq \tau^*(\nu_{\alpha p}, \nu_{(1-\alpha)p})$ .

La funzione  $\nu$  si dice *norma probabilistica*. Se  $\tau = \tau_T$  e  $\tau^* = \tau_{T^*}$  per una  $t$ -norma  $T$  e per la sua  $t$ -conorma  $T^*$ , lo spazio si dice spazio NP di Menger; se, poi,  $T = M$  e, quindi,  $\tau_M = \tau_{M^*}$  si parla di spazio NP di Šerstnev. ◇

**Esempio 1.** (Spazi NP semplici). Dato uno spazio normato  $(V, \|\cdot\|)$  e una f.r. distanza  $F$  si definisce  $\nu : V \rightarrow \Delta_+$  mediante  $\nu_\theta := \varepsilon_0$  e, per  $p \neq \theta$

$$\nu_p(t) := F\left(\frac{t}{\|p\|}\right) \quad (t > 0).$$

Si dimostra che lo spazio NP generato da  $(V, \|\cdot\|)$  e da  $F$  è uno spazio NP di Menger rispetto a  $M$  e uno spazio NP di Šerstnev.

Come nel caso degli spazi MP, anche nel per quelli NP si possono definire gli spazi  $\alpha$ -semplici, ponendo se  $p \neq \varepsilon_0$

$$\nu_p(t) := F\left(\frac{t}{\|p\|^\alpha}\right).$$

■

**Esempio 2.** (Gli spazi EN). Sia  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  uno spazio di probabilità,  $(V, \|\cdot\|)$  uno spazio normato e  $S$  uno spazio vettoriale di variabili aleatorie a valori in  $V$ ; per ogni  $p \in S$  e per ogni  $t > 0$  si definisca l'applicazione  $\nu : S \rightarrow \Delta_+$  mediante

$$\nu_p(t) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \|p(\omega)\| < t\}). \quad (25)$$

La coppia  $(S, \nu)$  si dice spazio EN. Uno spazio EN risulta essere uno spazio NP, salvo, forse, la proprietà (N1), rispetto a  $\tau_W$  e  $\tau_M$ . Si dice *canonico* se vale la (N1); in tal caso è di Šerstnev.

In uno spazio EN si può definire un relazione d'equivalenza  $\sim$  mediante

$$p \sim q \iff \nu_q = \nu_p.$$

Sia  $\tilde{S} := S / \sim$  lo spazio quoziente e si ponga  $\tilde{\nu}_p := \nu_p$  per ogni  $p$  nella classe d'equivalenza  $\tilde{p}$ . Si può allora applicare questo risultato allo spazio vettoriale  $L^0$  delle classi d'equivalenza delle variabili aleatorie  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ; in questo caso l'applicazione quoziente è

$$\nu_f(t) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| < t\}).$$

Se  $S$  è un qualsiasi sottospazio vettoriale di  $L^0$ , allora  $(S, \nu_S, \tau_W)$  è uno spazio di Šerstnev: casi particolarmente importanti si hanno quando si scelga per  $S$  uno spazio  $L^p$  con  $p \in [1, +\infty[$ : per  $f \in L^p$ ,

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}_+} t^p d\nu_f(t) \quad p \in [1, +\infty[$$

$$\|f\|_\infty = \sup \{t > 0 : \nu_f(t) < 1\} \quad p = +\infty.$$

Si vede così che le norme degli spazi  $L^p$  derivano tutte dalla stessa norma probabilistica (25), un fatto potenzialmente importante per le applicazioni all'Analisi funzionale.

Naturalmente si ha che una successione  $(f_n)$  di funzioni di  $L^p$  con  $p \in [1, +\infty[$  converge a  $\theta$  se, e solo se,

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^p d\nu_{f_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

mentre in  $L^\infty$   $(f_n)$  converge a  $\theta$  se, e solo se, la successione  $(\nu_{f_n}(t))$  è definitivamente eguale a 1. ■

Come ultima osservazione, negli spazi NP vi è una rielaborazione del concetto di insieme limitato. Mentre in uno spazio normato  $(V, \|\cdot\|)$ , un insieme  $A$  è limitato se esiste una costante  $k$  tale che risulti  $\|p\| \leq k$  per ogni  $p \in A$ , in uno spazio NP si introduce il *raggio probabilistico* di  $A$  definito da

$R_A(+\infty) = 1$  e, per  $t \in [0, +\infty[$ , da

$$R_A(t) := \ell^- \inf \{\nu_p(t) : p \in A\}.$$

Allora l'insieme  $A$  si dice

(a) *certamente limitato* se esiste  $t_0 \in ]0, +\infty[$  con  $R_A(t_0) = 1$ ;

(b) *forse limitato* se si ha  $R_A(t) < 1$  per ogni  $t \in ]0, +\infty[$ , ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_A(t) = 1;$$

(c) *forse illimitato* se esiste  $t_0 \in ]0, +\infty[$  con  $R_A(t_0) > 0$  e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_A(t) \in ]0, 1[;$$

(d) *certamente illimitato* se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_A(t) = 0$ .

Nei casi (a) e (b) l'insieme  $A$  si dice anche limitato in legge.

## Conclusioni

Ho presentato brevemente gli Spazi Metrici (e Normati) Probabilistici, evitando sia le dimostrazioni sia la giustificazione di numerose affermazioni; ho anche omesso di accennare a qualcuno degli sviluppi più tecnici dal punto di vista matematico. Mi premeva far conoscere la generalizzazione del concetto di spazio metrico, intuita e propugnata da Karl Menger e portata a compimento da Schweizer, Sklar e Šerstnev. Solo approfondendone lo studio, si possono vedere le potenzialità per le applicazioni in Matematica e in Fisica (ma ne è stata fatta almeno una anche in Psicologia). Spero solo di aver destato la curiosità del lettore.



[1] B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North Holland, New York, 1983; 2nd ed., Dover, Mineola NY, 2005.

[2] K. Menger, Theory of relativity and geometry in *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, the Library of Living Philosophers, vol. VII, P.A. Schilpp, ed., Evanston, IL, 1949, pp. 559–474; anche in *Karl Menger. Selecta Mathematica. Volume I*, B. Schweizer, A. Sklar, K. Sigmund, E. Hlawka, L.Reich, L.Schmetterer, eds., Springer, Wien–NewYork, 2002, pp. 551–566.

- [3] *Albert Einstein, Philosopher–Scientist*, the Library of Living Philosophers, vol. VII, P.A. Schilpp, ed., Evanston, IL, 1949; traduzione italiana, *Albert Einstein, scienziato e filosofo*, Boringhieri, Torino, 1958.
- [4] K. Menger, Statistical metrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **28**, 535–537 (1942); anche in *Karl Menger. Selecta Mathematica. Volume I*, B. Schweizer, A. Sklar, K. Sigmund, E. Hlawka, L.Reich, L.Schmetterer, eds., Springer, Wien–NewYork, 2002, pp. 433–435.
- [5] A. Wald, On a statistical generalization of metric spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **29**, 196–197 (1943).
- [6] B. Schweizer, A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math* **10**, 313–334 (1960).
- [7] S. Saminger–Platz, C. Sempì, A primer on triangle functions I, *Aequationes Math.* **76**, 201–240 (2008). DOI 10.1007/s00010-008-2936-8
- [8] S. Saminger–Platz, C. Sempì, A primer on triangle functions II, *Aequationes Math.* **80**, 239–268 (2010). DOI 10.1007/s100010-010-0038-x
- [9] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 3, Gauthier–Villars, 1899.
- [10] C. Alsina, B. Schweizer and A. Sklar, On the definition of a probabilistic normed space, *Aequationes Math.* **46** 91–98 (1993).
- [11] C. Sempì, A short and partial history of probabilistic normed spaces, *Mediterr. J. Math.*, **3**, 283–300 (2006). doi: 10.1007/s00009-006-0078-6.
- [12] B. Lafuerza Guillén, P. Harikrishnan, *Probabilistic normed spaces*, Imperial College Press, London, 2014.
- [13] R. Rice, On mixing transformations, *Aequationes Math.* **17** 104–108 (1978).



# Il Teorema di Liouville sull'integrabilità

**Luigi Martina**

Dipartimento di Matematica e Fisica Ennio De Giorgi Università del Salento,  
INFN Sezione di Lecce

---

**I**n questo contributo presenteremo e discuteremo un celebre teorema della Meccanica Analitica.

## L'enunciato

La proprietà dei sistemi dinamici detta *integrabilità per quadrature* richiede di scrivere la soluzione delle equazioni del moto tramite un numero finito di operazioni algebrico/analitiche, inclusa l'inversione di funzioni, e il calcolo di integrali di funzioni (quest'ultima è *la quadratura*). Il metodo di Hamilton-Jacobi e il teorema di Liouville ci mettono a disposizione dei metodi generali per l'integrazione. Il rovescio della medaglia riguarda il fatto che tali metodi non sono applicabili a tutti i sistemi dinamici immaginabili, ma solo a quelli che presentano dipendenza continua e differenziabile dalle condizioni iniziali, almeno in certo aperto di esse. Perturbazioni, anche piccole, di questi sistemi possono dar luogo a situazioni non più integrabili nel senso indicato appena sopra. Tuttavia, esistono teoremi (per esempio il cosiddetto Teorema KAM), che consentono di controllare entro certe condizioni, gli effetti di tali perturbazioni.

L'enunciato del teorema di Liouville è

**Teorema 1.** *Se per un sistema Hamiltoniano con  $n$*

*gradi di libertà sono noti  $n$  integrali primi del moto del moto che siano:*

1. *funzionalmente indipendenti e analitici,*
2. *in involuzione,*

*allora il problema di integrazione del sistema delle equazioni del moto si riduce alle quadrature.*

Questo Teorema va posto in stretta relazione al metodo di Hamilton-Jacobi, secondo il quale l'integrazione di un sistema hamiltoniano a  $n$  gradi di libertà va ricondotta alla determinazione di un integrale completo di una equazione alle derivate parziali in  $n + 1$  variabili indipendenti.

Nella trattazione che segue adotteremo un profilo *tradizionale* di dimostrazione, cioè che può essere rintracciato nella maggior parte dei manuali di Meccanica Analitica. Perciò, senza voler trascurare alcun autore in questa vasta manualistica, si farà riferimento solo al classico [1] Vol. II, P. II, Cap X-44. In tal modo il lettore che faccia riferimento, per esempio, al manuale [2] Cap 10, non avrà alcuna difficoltà a seguire il ragionamento condotto con metodi essenzialmente analitici. Naturalmente esistono dimostrazioni molto più moderne ed eleganti, a partire da quella che si ritrova al Cap. X di [3]. Questo contributo ha ne significativamente ampliato il significato e valore, facendo parlare di Teorema di Liouville-Arnold. Tuttavia, per seguire questa strada dovrebbe seguire l'entusiasmante, ma meno familiare strada,

della geometria симплектика. A questo proposito, non possiamo evitare di citare i magistrali Apunti di Meccanica Analitica del compianto Boris Dubrovin [4]. Un buon compromesso tra aspetti matematici e fisici, come introduzione ai metodi geometrici e algebrici in Meccanica Classica, si può ritrovare nel manuale di Gaetano Vilasi [5].

## Il metodo di Hamilton - Jacobi

Sia assegnato un sistema hamiltoniano della forma

$$\dot{p} = \{p, H\}, \quad \dot{q} = \{q, H\}, \quad (1)$$

$$(k = 1, \dots, n),$$

dove  $\{\cdot, \cdot\}$  indica le parentesi di Poisson definite sullo spazio delle fasi  $\Gamma$ , a  $2n$  dimensioni, e  $H$  è una funzione Hamiltoniana  $H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  di  $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ .

Il metodo di Hamilton-Jacobi consiste nel cercare una trasformazione canonica  $T_c : (p_k, q_k) \rightarrow (\pi_h, \chi_h)$  di  $\Gamma$  in se stesso, cioè tale che

1.  $T_c$  lasci immutate le parentesi di Poisson

$$\{\chi_h, \pi_k\} = \{q_h, p_k\}, \quad (2)$$

$$\{\chi_h, \chi_k\} = \{q_h, q_k\}$$

$$\{p_h, p_k\} = \{\pi_h, \pi_k\};$$

2. cambi la l'Hamiltoniana nella più semplice possibile cioè

$$H \rightarrow K = 0.$$

Se si riesce a trovare una tale trasformazione, le equazioni del moto si riducono al sistema

$$\dot{\pi}_k = 0, \quad \dot{\chi}_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (3)$$

l'integrazione del quale è immediata. Dalla teoria delle trasformazioni canoniche si sa che la condizione 1. è soddisfatta se esiste una funzione generatrice

$$F = F(q_1, \dots, q_n, \pi_1, \dots, \pi_n),$$

tale che

$$p_h = \partial_{q_h} F, \quad \chi_h = \partial_{\pi_h} F, \quad (4)$$

con la condizione di regolarità per  $F$

$$J = \det \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial \pi_k} \neq 0. \quad (5)$$

Inoltre, la nuova Hamiltoniana prende la forma

$$K = (H(\partial_{q_k} F, q_k, t) + \partial_t F)|_{q_h = q_h(\pi_j, \chi_j)}, \quad (6)$$

dove si è usata la seconda delle (4) per ottenere  $q_h = q_h(\pi_j, \chi_j)$ .

Chiaramente, per ottenere nulla l'Hamiltoniana  $K$ , si impone l'equazione (detta di Hamilton-Jacobi)

$$H(\partial_{q_k} F, q_k, t) + \partial_t F = 0, \quad (7)$$

alle derivate parziali nelle variabili  $(q_1, \dots, q_n, t)$ .

Di tale equazione bisogna ora trovare un *integrale completo*, cioè una soluzione dipendente da  $(q_1, \dots, q_n, t)$  e da  $n$  costanti di integrazione  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ . Quindi, fissate le condizioni iniziali  $(p_k^0, q_k^0)$  al tempo  $t_0$ , grazie alla trasformazione canonica determinata dall'eq. (7), si determinano le costanti  $\pi_1^0, \dots, \pi_n^0, \chi_1^0, \dots, \chi_n^0$ , che sono anche le soluzioni del sistema (3). In conclusione, la conoscenza di un integrale completo  $F$  dell'eq. (7) è sufficiente per determinare completamente la soluzione delle equazioni del moto (2).

D'altra parte non è nemmeno necessario essere troppo stringenti con la richiesta che la trasformazione canonica  $F$  conduca ad una Hamiltoniana nulla. Infatti è sufficiente che la nuova Hamiltoniana sia una funzione delle sole variabili  $\pi_k$ , cioè

$$K = K(\pi_1, \dots, \pi_n), \quad (8)$$

perché in tal caso le equazioni (3) diventano

$$\dot{\pi}_k = 0, \quad \dot{\chi}_k = \partial_{\pi_k} K \quad (k = 1, \dots, n).. \quad (9)$$

Anche questo sistema hamiltoniano si integra immediatamente, nella forma

$$\pi_h(t) = \pi_h^0, \quad \chi_h(t) = \chi_h^0 + \partial_{\pi_h} K|_{(\pi_1^0, \dots, \pi_n^0)} t, \quad (10)$$

dove  $(\pi_h^0, \chi_h^0)$  sono i dati iniziali per il sistema. Corrispondentemente, l'equazione di Hamilton - Jacobi, della quale occorre determinare l'integrale completo è della forma

$$H(\partial_{q_k} F, q_k, t) + \partial_t F = K(\pi_h). \quad (11)$$

Una volta determinato un integrale completo  $F = F(q_1, \dots, q_n, \pi_1, \dots, \pi_n)$  di questa equazione, usando le prime  $n$  equazioni del sistema (4), si possono esplicitamente ottenere le  $n$  funzioni  $\pi_h = \pi_h(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ . Esse sono *integrali primi* del moto per il sistema (2) in virtù delle prime  $n$  equazioni in (9). Inoltre, usando le ultime  $n$  equazioni in (4) e risolvendo per le  $q_h = q_h(\pi_1, \dots, \pi_n, \chi_1, \dots, \chi_n)$ , si ottiene una soluzione esplicita delle equazioni del moto, sostituendovi le espressioni in (10).

Le variabili  $(\pi_1, \dots, \pi_n, \chi_1, \dots, \chi_n)$  vengono chiamate *variabili azione-angolo*.

## Integrali primi del moto

Da quanto visto sopra concludiamo che se è possibile trovare un integrale completo dell'eq. di Hamilton-Jacobi (11) allora è possibile integrare le equazioni di Hamilton originarie e trovare  $n$  integrali primi del moto.

Poiché la trasformazione canonica mantiene la struttura delle parentesi di Poisson, allora se  $(p_h, q_h)$  sono variabili canoniche, lo sono anche le  $(\pi_h, \chi_h)$ . In particolare questo significa che  $\forall h, k = 1, \dots, n$  si ottiene la relazione di commutazione

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_h(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n), \\ \pi_k(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \end{array} \right\} = 0. \quad (12)$$

In altri termini l'esistenza di un integrale completo dell'eq. di Hamilton-Jacobi garantisce l'esistenza di  $n$  integrali del moto in involuzione. Il problema risolto dal teorema di Liouville, enunciato nella sezione 1, consiste nel dimostrare il viceversa.

Per procedere nella direzione indicata, dapprima consideriamo un generico sistema dinamico (non necessariamente hamiltoniano quindi) nelle variabili  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\dot{x}_i = X_i(x, t), \quad (i = 1, \dots, m), \quad (13)$$

Se esso possiede un integrale primo  $f = f(x, t)$ , cioè una funzione sullo spazio delle fasi tale che  $\dot{f} = \partial_{x_i} \dot{x}_i + \partial_t f \equiv 0$ , questo consente di eliminare un grado di libertà, risolvendo l'equazione

$$f(x, t) = f_0. \quad (14)$$

Nello spazio delle variabili  $x$  essa definisce una iper-superficie a  $m - 1$  dimensioni. Quindi, sotto le condizioni di invertibilità di  $f$ , è possibile determinare una delle  $x_i$  in termini di tutte le altre. Inoltre la traiettoria definita dalla soluzione giace completamente sulla menzionata iper-superficie. Infine, se al variare di  $f_0$  le corrispondenti iper-superfici sono regolari e preservano la loro dimensionalità. Esse si chiamano *foglie* e si dice che esse *fogliettano* lo spazio delle fasi. In conclusione

Enunciamo ora il seguente

**Teorema 2.** *L'esistenza di un integrale del moto per il sistema generico del primo ordine (13) consente di ridurre di una unità il numero di variabili dinamiche incognite.*

Di conseguenza ogni ulteriore integrale del moto riduce di una unità la complessità del problema originario e ne occorrerebbero esattamente  $m - 1$  per ricondursi ad una sola equazione differenziale, che determina il moto lungo la traiettoria definita dalla intersezione delle  $m - 1$  iper-superfici.

Tuttavia i sistemi hamiltoniani posseggono una struttura ulteriore, derivante dalle parentesi di Poisson, che potrebbe essere sfruttata per affrontare la questione della riduzione del numero di variabili dipendenti.

Facciamo allora l'ipotesi di conoscere un integrale del moto del sistema (2), indicato con  $f = f(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ , il che significa

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^n (\partial_{q_i} f \dot{q}_i + f_{p_i} \dot{p}_i) \equiv 0. \quad (15)$$

Ma dalle eq. di Hamilton, e per le proprietà delle parentesi di Poisson, si ha pure che

$$\dot{f} = \{f, H\} \equiv 0. \quad (16)$$

Se isoliamo una particolare coppia di variabili coniugate, diciamo  $(p_1, q_1)$ , l'ultima relazione si può anche scrivere nella forma

$$\{f, H\}_1 = -\{f, H\}_{\hat{1}}, \quad (17)$$

dove con  $_1$  indichiamo le parentesi sul sottospazio individuato dalla coppia di coordinate indicizzate con 1, mentre quelle che riguardano tutte le altre variabili è individuato da  $\hat{1}$ .

Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema del-

le funzioni implicite, risolviamo rispetto a  $p_1$  l'equazione

$$f(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = f_0 \quad (18)$$

$$\implies p_1 = \phi(p_{\hat{1}}, q_1, q_{\hat{1}}).$$

Inoltre, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , si ha pure che

$$\partial_{p_{\hat{1}}} \phi(p_{\hat{1}}, q_1, q_{\hat{1}}) = -\frac{\partial_{p_{\hat{1}}} f}{\partial_{p_1} f}, \quad (19)$$

$$\partial_{q_i} \phi(p_{\hat{1}}, q_1, q_{\hat{1}}) = -\frac{\partial_{q_i} f}{\partial_{p_1} f}$$

Come in precedenza, queste relazioni ci dicono che la traiettoria è confinata ad una sottovarietà di dimensione  $2n-1$  definita da (18), ma per la componente del campo vettoriale hamiltoniano lungo  $p_1$  deve risultare

$$\dot{p}_1 = -\partial_{q_1} H =$$

$$\partial_{p_{\hat{1}}} \phi \dot{p}_{\hat{1}} + \partial_{q_1} \phi \dot{q}_1 + \partial_{q_{\hat{1}}} \phi \dot{q}_{\hat{1}}. \quad (20)$$

Sostituendo le relazioni (19) in (20), si ottiene

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{\partial_{q_1} \phi} [-\partial_{q_1} H - \partial_{p_{\hat{1}}} \phi \dot{p}_{\hat{1}} - \partial_{q_{\hat{1}}} \phi \dot{q}_{\hat{1}}] =$$

$$-\frac{\partial_{p_1} f}{\partial_{q_1} f} \left[ -\partial_{q_1} H + \frac{\partial_{p_{\hat{1}}} f}{\partial_{p_1} f} \dot{p}_{\hat{1}} + \frac{\partial_{q_{\hat{1}}} f}{\partial_{p_1} f} \dot{q}_{\hat{1}} \right] =$$

$$\frac{1}{\partial_{q_1} f} [\partial_{p_1} f \partial_{q_1} H - \partial_{p_{\hat{1}}} f \dot{p}_{\hat{1}} - \partial_{q_{\hat{1}}} f \dot{q}_{\hat{1}}] =$$

$$\frac{1}{\partial_{q_1} f} [\partial_{p_1} f \partial_{q_1} H - \{f, H\}_{\hat{1}}] =$$

$$\frac{1}{\partial_{q_1} f} [\partial_{p_1} f \partial_{q_1} H + \{f, H\}_1] =$$

$$\frac{\partial_{q_1} f \partial_{p_1} H}{\partial_{q_1} f} =$$

$$\partial_{p_1} H \quad (21)$$

che è esattamente l'equazione del moto per  $q_1$ .

In altri termini anche la componente del campo hamiltoniano lungo la direzione di  $q_1$  è automaticamente definita dalla restrizione al moto imposta dall'esistenza dell'integrale del moto  $f$  e dalla corrispondente ipersuperficie definita da (18). Si arriva ad enunciare il seguente teorema di Lie sui sistemi hamiltoniani

**Teorema 3.** *Se un sistema hamiltoniano a  $n$  gradi di libertà ammette 1 integrale del moto, il problema si riduce ad integrare ancora un sistema hamiltoniano a  $n-1$  gradi di libertà, cioè un sistema di  $2(n-1)$  equazioni hamiltoniane.*

## Dimostrazione del Teorema di Liouville

Da quanto si è visto in precedenza, dobbiamo presumere che  $n$  integrali del moto per un sistema hamiltoniano siano sufficienti per ridurre la sua risoluzione alle sole quadrature. Tuttavia dobbiamo specificare meglio le condizioni sotto le quali questa riduzione possa avvenire.

Supponiamo allora di essere in possesso di  $n$  integrali primi del moto  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , che siano indipendenti ed *analitici* nelle loro variabili. Questa prima richiesta è equivalente a dire che in ogni punto dello spazio delle fasi le iper-superfici definite da equazioni della forma

$$f_r(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \pi_r \quad (22)$$

non si possano in alcun modo *sovrapporre* o ottenere le une dalle altre, anche variando le costanti  $\pi_r$ . Questa proprietà globale, si può formulare a livello infinitesimo richiedendo che i piani tangenti a tali superfici siano indipendenti. Ma i piani tangenti sono definiti univocamente dai gradienti delle funzioni  $\{f_1, \dots, f_n\}$  ad essi ortogonali. Pertanto una forma di tale condizione è che

$$I) \quad \text{rank} \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)} = n \quad (23)$$

Ora si definisca l'intersezione di tutte le superfici di livello della forma (22)

$$M_\pi = \{(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) :$$

$$f_r(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \pi_r,$$

$$r = 1, \dots, n\} \subseteq \Gamma. \quad (24)$$

Per quanto visto sopra si ha  $\dim(M_\pi) = n$ , ed è possibile trovare  $n$  coordinate su di esso.

Per fare questo bisogna invertire il sistema di equazioni definenti  $M_\pi$ , che in particolare impone una più restrittiva condizione rispetto alla I) sugli integrali del moto. Precisamente si deve verificare che

$$II) \quad \text{rank} \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} = n \quad (25)$$

che è chiaramente compatibile con la relazione (23).

Questa proprietà ci permette di definire su  $M_\pi$

il sistema di coordinate

$$\begin{aligned} p_h &= \phi_h(q_1, \dots, q_n; \pi), \\ h &= 1, \dots, n \text{ e } \pi = (\pi_1, \dots, \pi_n). \end{aligned} \quad (26)$$

Si osservi ora che sullo spazio delle  $(q_1, \dots, q_n)$  si verifica che

$$\begin{aligned} \tilde{f}_r(q_1, \dots, q_n) &= f_r(\phi_1, \dots, \phi_n; \pi) = \pi_r \\ \forall r &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (27)$$

Quindi si ha pure che

$$\partial_{q_h} \tilde{f}_r(q_1, \dots, q_n) \equiv 0 \quad \forall h = 1, \dots, n. \quad (28)$$

Esplicitamente,  $\forall h, r = 1, \dots, n$ , queste derivate prendono la forma

$$\begin{aligned} \partial_{q_h} f_r + \sum_{s=1}^n \partial_{p_s} f_r \partial_{q_h} \phi_s(q_1, \dots, q_n; \pi)|_{p_h=\phi_h} \\ \equiv 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Tenendo conto del fatto che ognuna delle  $f_r$  è un integrale del moto e che, per ogni traiettoria possibile, le  $p_s$  si possono esprimere come certe funzioni *analitiche* delle  $q_h$ , allora l'espressione precedente può essere estesa a tutto lo spazio delle fasi  $\Gamma$ , assumendo la forma

$$\partial_{q_h} f_r = \sum_{s=1}^n \partial_{p_s} f_r \partial_{q_h} [p_s - \phi_s(q_1, \dots, q_n; \pi)]. \quad (30)$$

Inoltre, usando l'identità

$$\partial_{p_h} [p_s - \phi_s(q_1, \dots, q_n; \pi)] = \delta_{h,s}, \quad (31)$$

in maniera analoga possiamo considerare vera su tutto  $\Gamma$  la relazione

$$\begin{aligned} \partial_{p_h} f_r = \\ \sum_{s=1}^n \partial_{p_s} f_r \partial_{p_h} [p_s - \phi_s(q_1, \dots, q_n; \pi)]. \end{aligned} \quad (32)$$

A questo punto è possibile esprimere i prodotti

di derivate di due  $f_r$  nelle forme equivalenti

$$\begin{aligned} \partial_{q_h} f_r \partial_{p_h} f_s = \\ \sum_{t,z=1}^n \partial_{p_t} f_r \partial_{p_z} f_s \partial_{q_h} [p_t - \phi_t] \partial_{p_h} [p_z - \phi_z] = \\ \sum_{t,z=1}^n \partial_{p_t} f_r \partial_{p_z} f_s \partial_{p_h} [p_t - \phi_t] \partial_{q_h} [p_z - \phi_z]. \end{aligned}$$

Conseguentemente, tenendo conto delle loro tipiche proprietà, le parentesi di Poisson si possono esprimere nella forma

$$\begin{aligned} \{f_r, f_s\} = \\ \sum_{t,z=1}^n \partial_{p_t} f_r \partial_{p_z} f_s \{p_t - \phi_t, p_z - \phi_z\}, \end{aligned} \quad (33)$$

che vale per ogni  $r, s = 1, \dots, n$ .

La matrice  $n \times n$  ( $\{f_r, f_s\}$ ), costituita da tutte le possibili parentesi di Poisson tra gli  $n$  integrali del moto a disposizione, sarà quindi espressa anche nella forma di prodotto tra matrici

$$\begin{aligned} (\{f_r, f_s\}) &= \left( \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \right)^T \cdot \\ &(\{p_t - \phi_t(q_1, \dots, q_n; \pi), p_z - \phi_z(q_1, \dots, q_n; \pi)\} \cdot \\ &\left( \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \right)). \end{aligned} \quad (34)$$

Considerata la condizione II) di invertibilità (25), si giunge alla particolare equivalenza

$$\begin{aligned} III) \quad (\{f_r, f_s\}) = 0 \iff \\ (\{p_t - \phi_t(q_1, \dots, q_n; \pi), \\ p_z - \phi_z(q_1, \dots, q_n; \pi)\}) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

su tutto lo spazio  $\Gamma$ . Data la rilevanza della condizione III), assumiamo l'involuntività di tutti gli  $n$  integrali del moto a ipotesi del teorema di Liouville.

Il calcolo esplicito delle parentesi di Poisson nella tesi di (35) conduce alle relazioni

$$\begin{aligned} \{p_t - \phi_t(q_1, \dots, q_n; \pi), p_z - \phi_z(q_1, \dots, q_n; \pi)\} \\ = \partial_{q_t} \phi_z - \partial_{q_z} \phi_t = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Ricordando che le  $\phi_h$  sono definite solo sulle coordinate  $q_k$ , la relazione precedente equivale ad affermare che, a meno di costanti, esiste

una funzione  $W(q_1, \dots, q_n; \pi)$  tale che

$$\phi_h = \partial_{q_h} W(q_1, \dots, q_n; \pi). \quad (37)$$

Ma allora per le (26) si ha pure

$$p_h = \partial_{q_h} W(q_1, \dots, q_n; \pi), \quad (38)$$

quindi anche

$$\partial_{q_h, \pi_k}^2 W = \partial_{\pi_k} \phi_h = \left( \{ \partial_{p_i} f_r \}^{-1} \right). \quad (39)$$

Per la condizione II) in (25), la matrice jacobiana  $(\partial_{q_h, \pi_k}^2 W)$  è sicuramente non degenera e definisce una trasformazione canonica, dove le nuove coordinate coniugate alle  $\pi_h$  sono definite da

$$\chi_h = \partial_{\pi_h} W(q_1, \dots, q_n; \pi). \quad (40)$$

Tale trasformazione canonica

$$(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \rightarrow (\pi_1, \dots, \pi_n, \chi_1, \dots, \chi_n)$$

dà luogo ad una nuova Hamiltoniana

$$K = H(p_i(\pi, \chi), q_i(\pi, \chi)). \quad (41)$$

Ma poiché già sappiamo che le  $\pi_h$  sono le  $n$  costanti del moto, in realtà la funzione  $K$  è indipendente dalle  $\chi_k$ . Pertanto le equazioni di Hamilton si riducono alla forma

$$\dot{\pi}_h = 0, \quad \dot{\chi}_h = \partial_{\pi_h} K(\pi_1, \dots, \pi_n). \quad (42)$$

Ma la loro integrazione è ovvia, cioè

$$\begin{aligned} \pi_h(t) &= \pi_h^0, \\ \chi_h(t) &= \partial_{\pi_h} K(\pi_1, \dots, \pi_n)|_{\pi_h^0} t + \chi_h^0, \end{aligned} \quad (43)$$

dove le  $\pi_h^0$  e le  $\chi_h^0$  sono costanti arbitrarie.

In questo modo si è fatto vedere che l'esistenza di  $n$  integrali del moto, che godono delle condizioni I) e III) e sono analitici, conducono allo stesso risultato ottenuto con il metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi, secondo lo schema riportato nelle relazioni (9) - (11).

Più in generale la dimostrazione può essere estesa al caso di integrali del moto dipendenti dal tempo e ad hamiltoniani nulli. Quindi le circostanze descritte dal teorema di Liouville sono equivalenti a risolvere l'equazione Hamilton - Jacobi (7).



- [1] T. LEVI-CIVITA, U. AMALDI: *Lezioni di meccanica razionale*. Nicola Zanichelli, Bologna (1974).
- [2] H. GOLSTEIN, C. POOLE: *Meccanica Classica*. Zanichelli, Bologna (2005).
- [3] V. I. ARNOLD: *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti/Mir, Mosca (1979).
- [4] B. DUBROVIN: *Appunti di Meccanica Analitica*. <https://people.sissa.it/~dubrovin/meccanica.pdf>, Trieste (2010).
- [5] G. VILASI: *Hamiltonian Dynamics*. World Scientific, Singapore (2001).



**Luigi Martina:** è professore associato di Fisica Teorica presso l'Università del Salento. La sua attività di ricerca è incentrata nello studio di sistemi fisici non lineari con metodi analitici e algebrici.

# L'ombra del buco nero in M87

**Francesco De Paolis, Gabriele Ingrosso, Achille Nucita**

*Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi", Università del Salento, & INFN, Sez. di Lecce*

---

**I**n questa comunicazione vorremmo discutere alcuni aspetti riguardanti l'identificazione di un buco nero da parte dell'Event Horizon Telescope. Questo evento ha destato grande interesse mediatico, e sono state fornite molte informazioni confuse, se non addirittura erronee, su ciò che è stato osservato.

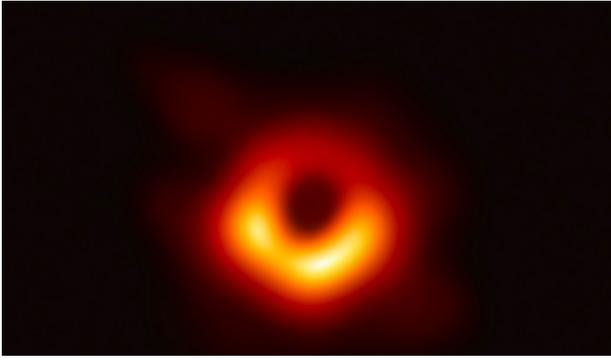
Non è mai una buona idea scommettere contro Einstein. Il compimento del primo secolo dalla Teoria della Relatività Generale (RG) ha portato a due scoperte epocali (la rivelazione delle onde gravitazionali e la prima immagine dell'ombra di un buco nero, appunto) che hanno confermato l'esistenza dei buchi neri, entità astrofisiche sulla cui reale esistenza lo stesso Einstein nutriva seri dubbi.

I buchi neri sono la predizione fondamentale della RG come formulata da Einstein nel 1915. A dire il vero, Einstein non si preoccupò di trovare una soluzione alle sue famose equazioni del campo gravitazionale, cosa che venne fatta nel 1916 da Karl Schwarzschild. Quest'ultimo dimostrò un'interessante proprietà dei buchi neri: essi sono caratterizzati da un orizzonte degli eventi, ovvero da una sorta di membrana unidirezionale dello spazio-tempo dalla quale niente, nemmeno la luce, può fuoriuscire.

In questi giorni è stato annunciato (in una serie di conferenze stampa contemporanee) il risultato dell'analisi delle osservazioni interferometriche condotte tramite l'Event Horizon Telescope (EHT) verso la galassia M87 [1]. I dati nella banda radio hanno permesso di osservare per la prima volta, direttamente ed inequivocabilmente, la regione dello spazio nelle immediate vicinanze di quello che è il buco nero super-massiccio contenuto nel centro della galassia.

Che i buchi neri esistessero nei centri delle galassie lo sapevamo già per altre osservazioni indirette, ma il risultato di EHT è importante di per sé in quanto è non solo una (ulteriore) conferma della RG ma anche la prima osservazione diretta di un buco nero. Tra l'altro, l'immagine ottenuta è anche quella con più alta risoluzione angolare mai prodotta essendo la Full Width Half Maximum (o FWHM, da intendere come un indice della capacità di risoluzione angolare di un telescopio) di EHT pari a circa 20 micro arcosecondi. Per confronto, il limite di diffrazione di un telescopio avente diametro pari alla base equivalente di EHT ( $\simeq 12000$  km) per la lunghezza d'onda di  $\simeq 1$  mm è dello stesso ordine di grandezza. La risoluzione angolare ottenuta corrisponde a riuscire a leggere i titoli di un giornale posto sulla Luna!

Cerchiamo di capire cosa è stato effettivamente



**Figura 1:** Fotografia del buco nero ricostruita dalla collaborazione EHT [1].

osservato e come.

Nel caso di un buco nero non ruotante (o buco nero di Schwarzschild), la singolarità centrale è circondata da un orizzonte degli eventi di raggio  $R_S = 2R_g$  dove il raggio gravitazionale  $R_g = GM/c^2$  è la grandezza scala caratteristica del buco nero di massa  $M$ . Quando il buco nero è osservato ad una distanza infinita appare circondato da una regione sferica avente un raggio (noto come raggio di cattura dei fotoni)  $R_c = \sqrt{27}R_g$ . Il raggio di cattura dei fotoni (che è ovviamente maggiore del raggio dell'orizzonte degli eventi del buco nero non ruotante) segna un vero punto di non ritorno per i fotoni. In particolare, i fotoni che passano ad un parametro di impatto  $b \geq R_c$  possono raggiungere l'osservatore all'infinito mentre i fotoni che impattano a  $b < R_c$  sono catturati dal buco nero. Il raggio  $R_c$  è anche detto raggio della fotosfera (per maggiori dettagli si vedano le referenze [2, 3, 4]). Nel caso di una sorgente di radiazione elettromagnetica uniformemente estesa e luminosa posta dietro il buco nero, l'osservatore vedrebbe l'ombra del buco nero di dimensioni pari a  $R_c$  [5, 6]. A partire dal 1979 sono state condotte simulazioni numeriche via via più sofisticate (culminate con quelle visibili nel film *Interstellar* prodotte dal gruppo guidato dal premio Nobel Kip Thorne) considerando che la sorgente di radiazione sia un disco di accrescimento esteso che circonda il buco nero visto da un osservatore lontano. Nel caso di un disco geometricamente spesso che circonda il buco nero la combinazione dell'ombra del buco nero e dell'immagine del disco deformato per effetto del lensing gravitazionale produce un'ombra assieme ad un anello luminoso.

Nel caso dei buchi neri rotanti (detti di Kerr

in quanto descritti dalla metrica dello spazio-tempo derivata per la prima volta da Roy Kerr), il momento angolare di spin deforma la fotosfera e quindi anche la forma dell'ombra in funzione non solo dello spin del buco nero ma anche dall'angolo sotto cui viene osservato il disco di accrescimento. Deformazioni equivalenti appaiono anche nel caso di un buco nero carico elettricamente.

Sin dagli inizi del secolo scorso è noto che M87 possiede una struttura *filiforme* associata con il suo nucleo. Oggi questa struttura è riconosciuta essere un *jet* che, emergendo dal nucleo (come dimostrato da osservazioni VLBI -Very Long Baseline Interferometry- a risoluzione via via crescente), si estende sino a svariati migliaia di anni luce di distanza. Lo scenario che si delinea per il nucleo di questa galassia è quindi quello di un buco nero centrale circondato da un disco di accrescimento (geometricamente spesso e otticamente sottile) dal quale emerge un jet relativistico. Non vi è però ancora un consenso unanime sulle modalità di formazione di questo jet ma i due modelli più accreditati sono 1) un flusso di materia dominato dal campo magnetico e alimentato dall'energia rotazionale del buco nero o 2) esso si forma dalla collimazione (dovuta sempre al campo magnetico) di un vento di materia che ha origine nel disco di accrescimento.

Le osservazioni di EHT, un insieme di otto telescopi (alcuni a loro volta costituiti da diverse antenne) che lavorano utilizzando la tecnica dell'interferometria a lunghissima base, hanno permesso di confermare brillantemente la tesi secondo la quale il nucleo di M87 contiene un buco nero centrale. Colpisce infatti la grande somiglianza tra l'immagine ottenuta da EHT e quanto aspettato in base alla RG.

La sorgente compatta osservata mostra un anello luminoso che circonda un'area meno brillante (l'ombra del buco nero). Questa struttura ricorda l'emissione predetta [6] da un disco di plasma caldo che circonda un buco nero. In particolare, i fotoni emessi all'interno del raggio della fotosfera possono ancora sfuggire e raggiungere l'osservatore. Non ci si aspetta quindi di avere una parte centrale dell'immagine caratterizzata, ad esempio, da un disco completamente nero ma un contrasto di luminosità (relativamente all'emissione circostante proveniente dal disco di

accrescimento e dal jet) che per il buco nero in questione è risultato pari a circa il 10%.

La grandezza fisica misurata sperimentalmente in questo caso è la dimensione del diametro della regione di emissione (a forma di anello) che risulta pari a  $\simeq 11\theta_g = 42$  micro arcosecondi, (con  $\theta_g = R_g/D$  e  $D = 16.8 \pm 0.8$  megaparsec) che si trova appena oltre l'ombra del buco nero di dimensione angolare  $2\sqrt{27}\theta_g \simeq 39.5$  micro arcosecondi. Per confronto l'orizzonte degli eventi del buco nero in questione ha un diametro di  $\simeq 16$  micro arcosecondi. Una volta misurato  $\theta_g$  si può stimare la massa del buco nero  $M = (6.5 \pm 0.7) \times 10^9$  masse solari.

Un buco nero può catturare materia attraverso un processo di accrescimento. La materia, cadendo verso di esso, si riscalda ed emette radiazione elettromagnetica includendo le onde radio raccolte da EHT. Nel caso specifico, le osservazioni X mostrano che il buco nero in M87 è meno luminoso rispetto a quanto atteso per un accrescimento sferico alla Bondi. Quindi, o l'efficienza di accrescimento è particolarmente (e inusualmente) bassa o l'accrescimento avviene secondo differenti modalità, ad esempio quelle descritte dal modello ADAF (advection dominated accretion flow). Le osservazioni passate hanno mostrato che la sorgente compatta emette nella regione della lunghezze d'onda dei millimetri (come osservato anche da EHT) consistentemente con quanto aspettato per un accrescimento ADAF in cui il disco *intrappola* la maggior parte della radiazione che è trasportata verso il buco nero centrale. Lo spettro osservato per un accrescimento di materia di tipo ADAF intorno ad un buco nero va dalle radio frequenze sino ai raggi Gamma dipendendo dalle particelle coinvolte. Nel caso della banda radio e dei raggi X duri (maggiori di 3 keV) la radiazione è prodotta da elettroni attraverso meccanismi di sincrotrone, bremsstrahlung e Compton inverso.

L'ultima caratteristica dell'immagine ripresa da EHT è l'asimmetria nella luminosità dell'anello che può essere spiegata dal fatto che la radiazione emessa dal plasma in rotazione (e diretta verso l'osservatore) è amplificata per effetto Doppler.

Queste osservazioni presentano uno scenario del buco nero in M87 e dell'ambiente circostante straordinariamente consistente con quan-

to predetto dalla GR e dai modelli di magnetoidrodinamica relativistica tramite i quali sono state simulate le immagini teoriche confrontate poi con le osservazioni reali.

Non possiamo concludere senza menzionare che quanto detto da alcuni "detrattori" di questa scoperta, cioè che non sarebbe una scoperta perché "era ovvio che un buco nero dovesse essere così", o che "il progresso nasce dagli esperimenti che possiamo fare nei nostri laboratori", è assolutamente fuori luogo. La cosiddetta foto del buco nero (che poi è qualcosa di molto più complesso di una semplice fotografia) ha la stessa valenza di altre scoperte epocali quali quelle del bosone di Higgs e delle onde gravitazionali (che hanno portato a due premi Nobel!). In qualche modo lo sapevamo già che dovevano esistere, ma la scoperta ha dato una prova indipendente della correttezza delle teorie alla base (il Modello Standard delle particelle elementari e la RG). È vero poi che la fisica è una scienza sperimentale, ma il concetto di "esperimento" deve essere allargato includendo l'osservazione dello spazio: l'Universo ci fornisce un laboratorio immenso in cui testare le nostre teorie.



- [1] K. Akiyama, et al. (The EHT Collaboration), *ApJ*, 875, L1 (2019).
- [2] F. De Paolis, M. Giordano, G. Ingrosso, L. Manni, A.A. Nucita, F. Strafella, *Ithaca*, N. 5, (2015).
- [3] A.F. Zakharov, F., De Paolis, G. Ingrosso, A. A. Nucita, *New Astronomy Reviews*, 56, 2 (2012).
- [4] A.F. Zakharov, F., De Paolis, G. Ingrosso, A. A. Nucita, *A&A*, 442, 795 (2005).
- [5] J. M. Bardeen, in *BlackHoles* (edited by C. De Witt & B.S. De Witt (NewYork Gordon & Breach), 215 (1973).
- [6] H. Falcke, F. Melia, E. Agol, *ApJ* 528, L13 (2000).



**Francesco De Paolis, Gabriele Ingrosso, Achille Nucita:** sono componenti del gruppo di Astrofisica del Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi" dell'Università del Salento e si occupano sia di analisi di grandi moli di dati che di problematiche legate all'astrofisica teorica.

Numero XIII Anno 2019

Viaggio nella Scienza

# Ithaca



---

Probabilità

---

