
Onde anomale

Petr Georgievich Grinevich

*L.D. Landau Institute for Theoretical Physics,
Russian Academy of Science, e
Lomonosov Moscow State University,
Department of Mechanics and Mathematics
Russia*

Paolo Maria Santini

*Dipartimento di Fisica, Università di Roma La Sapienza, e
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma*

L'equazione di Schrödinger non lineare (NLS) di tipo “focusing” è il modello universale più semplice nella descrizione della modulazione in ampiezza di onde quasi monocromatiche in mezzi debolmente non lineari, il meccanismo fisico principale per l'insorgenza di onde anomale in Natura. Di recente è stato risolto il problema di Cauchy per tale equazione sul segmento, con condizioni periodiche al bordo, il cui dato iniziale è una piccola perturbazione della soluzione di background instabile. Nel caso più semplice di un solo modo instabile, la dinamica è caratterizzata da una ricorrenza esatta di onde anomale descritte dal solitone di Akhmediev, i cui parametri, che variano ad ogni apparizione, sono legati in modo semplice alle condizioni iniziali. Tale ricorrenza esatta diventa una ricorrenza del tipo Fermi-Pasta-Ulam nei contesti fisici ai quali si applica la teoria NLS, come già confermato da alcuni esperimenti di ottica non lineare.

Introduzione

L'equazione di Schrödinger non lineare (NLS)

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + 2\eta|u|^2u &= 0, \\ u = u(x, t) \in \mathbb{C}, \quad \eta &= \pm 1 \end{aligned} \quad (1)$$

è il modello universale nella descrizione della propagazione di un'onda quasi monocromatica in un mezzo debolmente non lineare; in particolare, è rilevante nella teoria delle onde d'acqua [1], in ottica non lineare [2, 3, 4], nelle onde di Langmuir in un plasma [5], e nella teoria dei condensati di Bose-Einstein [6]. Il potenziale auto-indotto $V(x, t) = -\eta|u(x, t)|^2$ è attrattivo se $\eta = 1$ (la cosiddetta “focusing NLS”), e repulsivo se $\eta = -1$ (la cosiddetta “defocusing NLS”), e i due casi danno luogo a due dinamiche completamente diverse.

In modo qualitativo, se l'oscillatore armonico per equazioni differenziali ordinarie e l'onda monocromatica per equazioni differenziali alle derivate parziali (EDDP) giocano un ruolo rilevante nella descrizione delle piccole oscillazioni in una buca di potenziale, quando le oscillazioni non sono così piccole da poter trascurare le prime correzioni non lineari, siamo nel cosiddetto “regime debolmente non lineare”, nel quale l'equazione NLS ed altre EDDP nonlineari della fisica matematica giocano un ruolo rilevante. Sul nostro pianeta, ad esempio, dove le energie

coinvolte nei fenomeni fisici sono spesso piccole rispetto alle energie di legame della materia, tale regime è piuttosto frequente, e piccoli effetti non lineari giocano un ruolo rilevante su scale spazio-temporali lunghe.

Per fissare le idee principali, si consideri, ad esempio, la seguente famiglia di EDDP non lineari dispersive

$$[\partial_t + i\omega(-i\partial_x)]q = \mathcal{N}(q, q_x), \quad q(x, t) \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

dove $\mathcal{N}(q, q_x)$ è una funzione non lineare tale che $\mathcal{N}(\delta, \delta) \ll \mathcal{O}(\delta)$, con $0 \leq \delta \ll 1$, e $\omega(k)$ è la relazione di dispersione: $\omega(k) \in \mathbb{R}$, $\omega''(k) \neq 0$.

Se si cercano soluzioni della (2) nella forma di onde di "piccola ampiezza" e "quasi monocromatiche", esse possono approssimativamente essere descritte, per tempi finiti, attraverso la rappresentazione di Fourier

$$q(x, t) \sim \int_{\mathbb{R}} a(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + c.c., \quad (3)$$

dove $a(k)$ è una funzione piccata intorno al numero d'onda k_0 ($a(k)$ è sensibilmente diversa da 0 in un piccolo intervallo di lunghezza ϵ intorno a k_0). Cambiando variabile: $k = k_0 + \delta k'$, e sviluppando ω intorno a k_0 , si ottiene l'onda quasi monocromatica

$$\begin{aligned} q(x, t) &\sim \delta A(x_1 - \omega'(k_0)t_1, t_2) e^{i\theta(x, t)} + c.c., \\ \theta(x, t) &= k_0 x - \omega(k_0)t, \\ x_1 = \delta x, \quad t_1 = \delta t, \quad t_2 = \delta^2 t, \end{aligned} \quad (4)$$

dove l'ampiezza lentamente variabile A è definita da

$$A(\xi, t_2) = \int_{\mathbb{R}} a(k_0 + \delta k') e^{i(k'\xi - \frac{1}{2}\omega''(k_0)k'^2 t_2)} dk', \quad (5)$$

e soddisfa all'equazione di Schrödinger per la particella libera

$$iA_{t_2} + \frac{\omega''(k_0)}{2} A_{\xi\xi} = 0. \quad (6)$$

L'equazione (4), combinando le due ipotesi fisiche del problema: **non linearità debole**, poichè l'ampiezza è piccola, e **quasi-monocromaticità**, a causa della lenta dipendenza dell'ampiezza A dalle variabili spazio-temporali, viene presa come il termine principale di uno sviluppo multiscale della soluzione dell'EDDP

non lineare (2). La non linearità ha due effetti importanti sullo sviluppo agli ordini successivi: generando i) armoniche di ordine superiore $\exp(\pm in\theta(x, t))$, $n \in \mathbb{N}$ e ii) secolarità, che vanno soppresse per garantire che la serie perturbativa sia asintotica [7]. La condizione per sopprimere la prima secolarità è che l'ampiezza dipenda dalle variabili lente attraverso la NLS

$$iA_{t_2} + \frac{\omega''(k_0)}{2} A_{\xi\xi} + b(k_0)|A|^2 A = 0, \quad (7)$$

dove il coefficiente $b(k)$ contiene le informazioni più rilevanti sulla struttura della non linearità in (2). Si veda, ad esempio, [8], per una derivazione dettagliata del risultato, e per mostrare che le condizioni per poter sopprimere secolarità di ordine superiore introducono la dipendenza dell'ampiezza da tempi più lunghi:

$$A((x_1 - \omega'(k_0)t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots)), \quad t_n = \epsilon^n t, \quad (8)$$

descritta da altrettanti flussi di simmetria che commutano con la NLS. Se $b(k_0) \in \mathbb{R}$, e se $b(k_0)\omega''(k_0) > 0$, allora siamo nel caso focusing; se $b(k_0)\omega''(k_0) < 0$, siamo nel caso defocusing. È infine un semplice esercizio ridefinire le variabili dipendenti e indipendenti per riscrivere l'equazione (7) nella forma standard (1). Quindi le equazioni (4),(7) ci dicono che **l'equazione NLS descrive la modulazione lenta dell'ampiezza di un'onda monocromatica in un regime debolmente non lineare.**

Si noti che l'esistenza di un insieme numerabile di simmetrie e costanti del moto in involuzione costruibili esplicitamente sono proprietà altamente non banali di una EDDP non lineare, e caratterizzano le proprietà algebriche e geometriche di un'EDDP "integrabile" [9, 10, 11], come l'equazione NLS. La proprietà aggiuntiva dell'esistenza della cosiddetta coppia di Lax [12], che permette di esprimere l'equazione integrabile come la condizione di integrabilità di una coppia di equazioni lineari per un campo ausiliario ψ :

$$\begin{aligned} \psi_x &= X(x, t, \lambda)\psi, \\ \psi_t &= T(x, t, \lambda)\psi, \\ \psi &= \psi(x, t, \lambda) \end{aligned} \quad (9)$$

dependente da un parametro "spettrale" λ , gioca un ruolo fondamentale nella possibilità di risol-

vere problemi di Cauchy rilevanti per l'equazione integrabile attraverso tecniche di natura spettrale [13, 14, 15, 16]: il problema di Cauchy sulla retta attraverso il metodo della Trasformata Spettrale (o Inverse Scattering (Spectral) Transform (IST)), una generalizzazione non lineare del metodo della Trasformata di Fourier per EDDP lineari; il problema di Cauchy sul segmento con condizioni periodiche al bordo attraverso il metodo del "Finite Gap" [17, 18, 19, 20, 21], una generalizzazione non lineare del metodo della serie di Fourier.

L'IST, introdotto nel lavoro [22] per un'altra EDDP non lineare integrabile, la famosa equazione di Korteweg-de Vries (KdV) [23]

$$v_t + v_{xxx} + vv_x = 0, \quad v = v(x, t), \quad (10)$$

modello universale nella descrizione di onde debolmente dispersive in regime debolmente non lineare [13, 14], è stato applicato con successo all'equazione NLS nel lavoro [24], in cui la coppia di Lax della NLS (1) fu scoperta nella seguente forma

$$\begin{aligned} X(\lambda; x, t) &= -i\lambda\sigma_3 + iU(x, t), \\ T(\lambda; x, t) &= 2\lambda X(\lambda; x, t) + iV(x, t), \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ U &= \begin{pmatrix} 0 & u(x, t) \\ \eta\bar{u}(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \\ V &= \begin{pmatrix} \eta u(x, t)\bar{u}(x, t) & iu_x(x, t) \\ -i\eta\bar{u}_x(x, t) & -\eta u(x, t)\bar{u}(x, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Una descrizione accurata di questi importanti risultati è al di là delle finalità di questa presentazione.

Universalità versus integrabilità: un problema filosofico?

Una domanda sorge spontanea a questo punto. L'equazione NLS è un modello universale nella descrizione di onde quasi monocromatiche debolmente non lineari (cioè, è molto speciale dal punto di vista delle applicazioni fisiche) e, al tempo stesso, è anche un modello integrabile (cioè, è molto speciale anche dal punto di vista matematico). È una coincidenza? La risposta è no, ed è

basata sul seguente elegante argomento [25]. Come abbiamo visto, un modello universale come la NLS può essere derivato da una classe molto vasta di EDDP non lineari, che includono sistemi di equazioni rilevanti in fisica, attraverso sviluppi multiscala; inoltre, gli sviluppi multiscala preservano l'integrabilità [26], nel senso che, se si applica il multiscala ad un modello integrabile (che possiede infinite simmetrie e costanti del moto, e una coppia di Lax), il modello universale ottenuto eredita le stesse proprietà di integrabilità (infinite simmetrie e costanti del moto, e una coppia di Lax). Quindi è sufficiente che, nella classe di EDDP che generano il modello universale attraverso il multiscala, esista almeno un modello integrabile, per dedurre l'integrabilità del modello universale [25]. Ad esempio, come abbiamo visto, la NLS è ottenuta, attraverso il multiscala, da una classe molto ampia di (sistemi di) EDDP come (2), che include l'equazione integrabile di KdV (10); quindi deduciamo che anche l'equazione NLS è integrabile. Tutto questo non implica, naturalmente, che ogni modello universale sia integrabile, poichè la vasta classe di equazioni da cui è ottenibile attraverso il multiscala potrebbe non contenere nessuna equazione integrabile (ad esempio, l'equazione NLS in 2 + 1 dimensioni $iu_t + u_{xx} + u_{yy} \pm 2|u|^2u = 0$, $u = u(x, y, t) \in \mathbb{C}$ è un modello universale non integrabile). Ma si può certamente affermare che un modello universale fisicamente rilevante deve essere speciale anche dal punto di vista matematico, poichè eredita tutte le proprietà matematiche speciali delle equazioni dalle quali può essere ricavato attraverso il multiscala.

Onde anomale in Natura e l'equazione NLS

Che cos'è un'onda anomala (OA)?. Riportiamo quanto è scritto, ad esempio, in due fonti diverse di Wikipedia.

1) [27]: "In oceanografia le OA sono un fenomeno marino di cui non si conoscono ancora né le cause né l'origine. Come definizione, un'onda è considerata anomala se supera 2,2 volte l'altezza significativa del treno d'onde a cui appartiene. Sono state osservate onde anomale alte da 25 a 30 metri e che sembrano formarsi in modo

imprevedibile. La differenza principale tra tali OA e un maremoto sta nel fatto che le OA si producono anche in pieno oceano, mentre i maremoti si amplificano solo avvicinandosi verso le coste.”

2) [28]: “Rogue waves ... are large, unexpected and suddenly appearing surface waves that can be extremely dangerous, even to large ships such as ocean liners ... In oceanography, rogue waves are more precisely defined as waves whose height is more than twice the significant wave height, which is itself defined as the mean of the largest third of waves in a wave record. Therefore, rogue waves are not necessarily the biggest waves found on the water; they are, rather, unusually large waves for a given sea state. Rogue waves seem not to have a single distinct cause, but occur where physical factors such as high winds and strong currents cause waves to merge to create a single exceptionally large wave. Rogue waves can occur in media other than water. They appear to be ubiquitous in nature and have also been reported in liquid helium, in nonlinear optics and in microwave cavities. Recent research has focused on optical rogue waves which facilitate the study of the phenomenon in the laboratory ... Once considered mythical and lacking hard evidence for their existence, rogue waves are now proven to exist and known to be a natural ocean phenomenon. Eyewitness accounts from mariners and damage inflicted on ships have long suggested they occurred. The first scientific evidence of the existence of rogue waves came with the recording of a rogue wave by the Gorm platform in the central North Sea in 1984 [29]. A stand-out wave was detected with a wave height of 11 meters in a relatively low sea state. However, the wave that caught the attention of the scientific community was the digital measurement of the Draupner wave, a rogue wave at the Draupner platform in the North Sea on January 1, 1995, with a maximum wave height of 25.6 meters (peak elevation of 18.5 meters). During that event, minor damage was also inflicted on the platform, far above sea level, confirming that the reading was valid [30].”

Ma cosa causa la comparsa di onde anomale in Natura, e qual'è il collegamento con

l'equazione NLS?

Si ritiene che la causa fisica principale siano gli effetti non lineari della instabilità della modulazione dell'ampiezza (Modulation Instability (MI)) [31, 32, 33, 34, 35, 36], e ora si vuole spiegare perchè **l'equazione integrabile NLS di tipo focusing giochi un ruolo essenziale nella descrizione della MI che causa l'apparizione delle OA in Natura.**

Come si è visto, la NLS è un modello universale nella descrizione della lenta modulazione dell'ampiezza di onde quasi monocromatiche debolmente non lineari. Inoltre la NLS (1) possiede la soluzione elementare costante

$$u_0(x, t) = \exp(2i\eta t), \quad (11)$$

ed è immediato mostrare che, se si perturba tale soluzione con un'onda monocromatica di piccola ampiezza:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{2i\eta t} + u_1(x, t), \\ u_1(x, t) &= \gamma_1(t)e^{ikx} + \gamma_{-1}(t)e^{-ikx}, \\ k &\in \mathbb{R}, \quad |\gamma_1|, |\gamma_{-1}| \ll 1, \end{aligned}$$

allora u_1 soddisfa all'equazione NLS linearizzata intorno alla soluzione u_0 :

$$iu_{1t} + u_{1xx} + 4\eta u_1 + 2\eta e^{4i\eta t} \bar{u}_1 = 0, \quad (12)$$

e si verifica facilmente che la dipendenza temporale della soluzione della (12) è descritta da una combinazione lineare di esponenziali del tipo $\exp[(\pm\Omega(k, \eta) + 2i\eta)t]$, dove

$$\Omega(k, \eta) = k\sqrt{4\eta - k^2}. \quad (13)$$

Ne segue che, nel caso defocusing $\eta = -1$, questa soluzione descrive piccole oscillazioni temporali del tipo $\exp(\pm i\tilde{\omega}(k)t)$, dove $\tilde{\omega}(k) = k\sqrt{4 + k^2}$; quindi la soluzione di fondo (11) è linearmente stabile. Nel caso focusing $\eta = 1$, la situazione è più interessante dal nostro punto di vista: per $|k| > 2$, abbiamo ancora piccole oscillazioni del tipo $\exp[\pm i\omega(k)t]$, where $\omega(k) = k\sqrt{k^2 - 4}$ e il background (11) è linearmente stabile; ma, per $|k| < 2$, abbiamo crescita e decrescita esponenziale del tipo $\exp(\pm\sigma(k)t)$, dove la velocità di crescita $\sigma(k)$ è definita da

$$\sigma(k) = k\sqrt{4 - k^2}, \quad |k| < 2. \quad (14)$$

Quindi la soluzione di background $\exp(2it)$ dell'equazione NLS di tipo focusing è linearmente instabile sotto perturbazioni monocromatiche di lunghezza d'onda sufficientemente grande ($|k| < 2$) [1, 37, 38, 40, 41, 42].

Si noti che, grazie alle proprietà di universalità della NLS di tipo focusing, la soluzione di background (11) describe, ad esempio, i) la prima correzione non lineare delle famose onde di Stokes [43] (non lineari e periodiche), rilevanti nella teoria delle onde d'acqua, ii) uno stato di intensità luminosa costante nell'ottica non lineare di una fibra ottica o di un cristallo fotorifrangente [4], e iii) uno stato a densità costante di bosoni attrattivi. Questi stati naturali di background sono quindi instabili rispetto ad opportune perturbazioni, e OA possono essere generate attraverso la dinamica descritta dalla NLS. Il nostro scopo ora è quello di mostrare, almeno per un numero finito di modi instabili, e grazie al ruolo giocato dall'integrabilità della NLS, il carattere deterministico delle apparizioni di OA: la loro apparizione può essere prevista in funzione dei dati iniziali e, viceversa, le proprietà dell'OA permettono di ricostruire informazioni dettagliate sulla perturbazione che l'ha generata.

La natura integrabile della NLS [24] permette di costruire molte soluzioni esatte della NLS corrispondenti a perturbazioni del background attraverso la degenerazione di soluzioni del tipo finite-gap [21, 44, 45, 46], quando la curva spettrale diventa razionale, o, più direttamente, usando tecniche classiche di tipo Darboux [47, 48] - Dressing [39, 49]. Tutti questi metodi fanno uso, in un modo o nell'altro, dello schema di integrabilità (11) dell'equazione, e rimandiamo alla corrispondente letteratura per i dettagli tecnici, che sono al di là degli scopi di questa presentazione.

Tra queste soluzioni esatte, citiamo il solitone di Peregrine [50], localizzato razionalmente nello spazio-tempo sul background (11), il cosiddetto solitone di Kuznetsov [51] - Kawata - Inoue [52] - Ma [53], esponenzialmente localizzato in x sul background e periodico nel tempo, ed il solitone trovato da Akhmediev, Eleonskii e Kulagin in [54], periodico in x e esponenzialmente localizzato nel tempo sul background (11), conosciuto come l' "Akhmediev breather". Queste soluzioni sono state generalizzate al caso di soluzioni "multi-solitoniche", che descrivono la

loro interazione non lineare (si veda, ad esempio, [44, 55, 56, 57, 58]). Si osservi che i solitoni di tipo Peregrine sono "omoclini", descivendo l'apparizione di OA apparentemente dal nulla, che scompaiono poi nel futuro, mentre i solitoni di tipo Akhmediev sono "quasi omoclini", ritornando al background originale a meno di un fattore moltiplicativo di fase. Sono state trovate anche generalizzazioni di tali soluzioni al caso di equazioni del tipo NLS a più componenti, descriventi l'interazione non lineare di più onde quasi monocromatiche (si veda, ad esempio, [59, 60, 61]).

Poichè, nel resto di questa presentazione, concentreremo la nostra attenzione sul caso di soluzioni derivanti da perturbazioni periodiche del background, la più semplice soluzione di questo tipo è l'Akhmediev breather

$$A_1(x, t; \theta, X, T, \rho) = \frac{\exp(2it + i\rho) \cosh[\sigma(\theta)(t - T) + 2i\theta] + \sin \theta \cos[k(\theta)(x - X)]}{\cosh[\sigma(\theta)(t - T)] - \sin \theta \cos[k(\theta)(x - X)]}, \quad (15)$$

$$k(\theta) = 2 \cos \theta, \\ \sigma(\theta) = k(\theta) \sqrt{4 - k^2(\theta)} = 2 \sin(2\theta),$$

soluzione esatta della NLS di tipo focusing per tutti i valori dei parametri reali θ, X, T, ρ . È facile verificare che questa soluzione elementare è esponenzialmente localizzata nel tempo sul background u_0 , cambiandolo attraverso il fattore moltiplicativo $e^{4i\theta}$

$$A_1(x, t; \theta, X, T, \rho) \rightarrow e^{2it+i(\rho \pm 2\theta)}, \quad \text{per } t \rightarrow \pm\infty, \quad (16)$$

e che il suo modulo è massimo nel punto (X, T) , con $|A_1(X, T; \theta, X, T, \rho)| = 1 + 2 \sin \theta$ (si veda la Fig. 1).

La ricorrenza esatta dell'onda anomala nel caso di un solo modo instabile

Una delle questioni di maggiore importanza in relazione alle sopra citate soluzioni esatte, è se queste compaiano in modo significativo in problemi di Cauchy fisicamente rilevanti, e, se sì, quali siano i meccanismi attraverso i quali si manifestano. Per rispondere a questi quesiti,

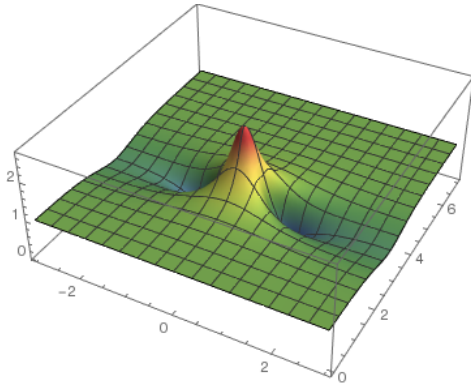


Figura 1: Il grafico 3D del modulo dell'Akhmediev breather $A_1(x,t;\theta,0,3,0)$, dove $\theta = \arccos(\pi/L)$, $L = 6$ è il periodo, e $x \in [-L/2, L/2]$, $t \in [0, 7]$.

è necessario risolvere quello che chiamiamo “il problema di Cauchy per le onde anomale”:

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u &= 0, \\ u(x, 0) &= 1 + \epsilon(x), \quad \|\epsilon(x)\|_\infty = \epsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Se limitiamo le nostre considerazioni al caso periodico in x , con periodo L , la perturbazione iniziale può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \sum_{j \geq 1} \left(c_j e^{ik_j x} + c_{-j} e^{-ik_j x} \right), \\ k_j &= \frac{2\pi}{L} j, \quad |c_j| = O(\epsilon), \end{aligned} \quad (18)$$

ed è facile mostrare, usando le precedenti considerazioni di stabilità (che conducono alla condizione di instabilità $|k| < 2$), che solo i primi N modi di Fourier $\pm k_j$, $1 \leq j \leq N$, sono instabili, dove $N \in \mathbb{N}$ è definito attraverso le disuguaglianze $\pi L - 1 < N < \pi L$, poichè danno luogo a onde esponenzialmente crescenti e decrescenti di ampiezza $O(\epsilon e^{\pm \sigma_j t})$, dove le velocità di crescita σ_j sono definite da

$$\sigma_j = \sigma(k_j) = k_j \sqrt{4 - k_j^2} > 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (19)$$

mentre i rimanenti modi danno luogo a piccole oscillazioni di ampiezza $O(\epsilon e^{\pm i\omega_j t})$, where $\omega_j = k_j \sqrt{k_j^2 - 4}$, $j > N$, e quindi sono stabili.

Il problema di Cauchy periodico (17),(18) è stato risolto, a meno di correzioni di $O(\epsilon^2)$ e per perturbazioni iniziali generiche di $O(\epsilon)$ del background (11), attraverso il metodo del “finite gap” in [62] per un modo instabile, e, più di recente,

in [63] per un numero finito di modi instabili, ottenendo una rappresentazione uniforme della soluzione nello spazio-tempo. Sebbene le soluzioni ottenute attraverso gli strumenti algebro-geometrici del finite gap siano rapporti di funzioni θ di Riemann (definite come somme infinite di opportuni esponenziali), i cui parametri sono definiti attraverso espressioni molto implicite che coinvolgono integrali su opportune superfici di Riemann [17, 18, 19, 20, 21], **la natura molto speciale del problema di Cauchy (17) per le onde anomale ha due conseguenze molto importanti.** 1) Essa permette di esprimere tutti i parametri algebro-geometrici, agli ordini rilevanti, attraverso funzioni elementari dei dati iniziali; 2) in ogni intervallo temporale dell’evoluzione, solo un numero finito di esponenziali che compaiono nella definizione delle funzioni θ di Riemann giocano un ruolo non trascurabile, implicando che la soluzione del problema di Cauchy (17),(18) può sempre essere scritta, all’ordine principale, attraverso funzioni elementari, diverse in diversi intervalli temporali [62, 63].

Poichè la soluzione è espressa attraverso funzioni elementari, diverse in diversi intervalli temporali, che si raccordano nelle regioni asintotiche intermedie, tecniche di raccordo di sviluppi asintotici (Matched Asymptotic Expansions (MAEs)) si presentano come approccio alternativo al problema, e sono state usate con successo per trattare il caso di un modo instabile, e quello di due modi instabili, in condizioni particolari [64]. MAEs coinvolgono una matematica più semplice, ma la loro applicabilità si estende al caso di più modi instabili solo per dati iniziali molto speciali [63].

Per mantenere la presentazione al livello più semplice, d’ora in avanti limiteremo le nostre considerazioni al caso di un solo modo instabile ($N=1$), il modo $k_1 = 2\pi/L$, con $\pi < L < 2\pi$, che può essere trattato con successo usando MAEs con l’aggiunta della conoscenza dell’Akhmediev breather (15) [64].

Abbiamo in mente il seguente **scenario qualitativo di ricorrenza**. Il modo instabile esponenzialmente crescente e inizialmente di $O(\epsilon)$, diventa di $O(1)$ a tempi dell’ $O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$, quando si entra nello stadio non lineare della MI e ci si aspetta la formazione di una struttura coerente

di $O(1)$, descritta da una soluzione solitonica di NLS sul background instabile (11), la cosiddetta OA. A causa ancora della MI, questa struttura coerente viene distrutta in un tempo finito, e si entra nel terzo stadio asintotico, descritto, come il primo, dal background più una perturbazione di $O(\epsilon)$. Questo secondo stadio linearizzato darà luogo, ancora a causa della MI, alla formazione di una seconda OA, e questa alternanza tra stadi lineari e non lineari di MI deve continuare per sempre, nel modello integrabile NLS, dando luogo ad una successione infinita di OA.

Dobbiamo quindi risolvere le seguenti problematiche di tipo deterministico. Per una condizione iniziale generica del tipo (17), (18), come prevedere:

- 1) il "tempo di prima apparizione" dell'OA;
- 2) il "tempo di ricorrenza", che misura l'intervallo temporale tra due apparizioni consecutive delle OA;
- 3) la forma analitica di questa sequenza deterministica di onde anomale.

Si consideri innanzitutto il caso più semplice in cui la perturbazione iniziale (18) eccita solo il modo instabile k_1 :

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= c_1 e^{ik_1 x} + c_{-1} e^{-ik_1 x}, \\ |c_1|, |c_{-1}| &= O(\epsilon), \quad 0 < \epsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Quindi, nell'intervallo $|t| \leq O(1)$, siamo nel regime linearizzato descritto dalla (12), la cui soluzione è

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{2it} \left(1 + \frac{|\alpha_1|}{\sin 2\phi_1} e^{\sigma_1 t + i\phi_1} \cos[k_1(x - X_1^+)] + \frac{|\beta_1|}{\sin 2\phi_1} e^{-\sigma_1 t - i\phi_1} \cos[k_1(x - X_1^-)] \right) \\ &+ O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (21)$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \bar{c}_1 - e^{2i\phi_1} c_{-1}, \quad \beta_1 = \bar{c}_{-1} - e^{-2i\phi_1} c_1, \\ X_1^+ &= \frac{\arg(\alpha_1) - \phi_1 + \pi/2}{k_1}, \\ X_1^- &= \frac{-\arg(\beta_1) - \phi_1 + \pi/2}{k_1}, \\ k_1 &= 2 \cos \phi_1 \Leftrightarrow \phi_1 = \arccos(k_1/2), \\ \sigma_1 &= 2 \sin(2\phi_1), \end{aligned} \quad (22)$$

Il dato iniziale (20) si divide in onde esponenzialmente crescenti e decrescenti, rispettivamente le onde α e β , e ciascuna di queste trasporta metà dell'informazione contenuta nel dato iniziale. A $t = O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$, l'onda α , esponenzialmente crescente, diventa $O(1)$, e deve essere descritta da una soluzione esatta della NLS, che si raccorda con la formula asintotica

$$u(x, t) \sim e^{2it} \left(1 + \frac{|\alpha_1|}{\sin 2\phi_1} e^{\sigma_1 t + i\phi_1} \cos[k_1(x - X_1^+)] \right), \quad (23)$$

ottenuta valutando (21) nella regione intermedia $1 \ll t \ll O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$. Stiamo quindi cercando, nella regione non lineare $t = O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$, una soluzione esatta ad un modo della NLS, periodica in x e transiente in t , che si raccordi con (23) nella regione di sovrapposizione $1 \ll t \ll O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$. Il candidato naturale è l'Akhmediev breather (15), i cui 4 parametri reali devono essere fissati in modo univoco attraverso il raccordo. È lasciato come esercizio al lettore la verifica che il raccordo fissa univocamente i 4 parametri nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \rho &= 2\phi_1, \quad \theta = \phi_1 \Rightarrow k(\theta) = k_1 = 2 \cos \phi_1, \\ \sigma(\theta) &= \sigma_1 = 2 \sin(2\phi_1), \\ X &= X_1^+, \quad T = T_1 \equiv \frac{1}{\sigma_1} \log \left(\frac{\sigma_1^2}{2|\alpha_1|} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Quindi **la prima OA appare nell'intervallo $|t - T_1| \leq O(1)$, ed è descritta dall'Akhmediev breather:**

$$u(x, t) = A_1(x, t; \phi_1, X_1^+, T_1, 2\phi_1) + O(\epsilon), \quad (25)$$

i cui parametri sono espressi in funzione dei dati iniziali attraverso funzioni elementari. È importante notare che la prima OA contiene informazioni solo su metà dei dati iniziali (quella codificata nel parametro α_1 : nell'onda α_1), e che il modulo della prima OA prende il suo massimo a $t = T_1$, nel punto $x = X_1^+$, mod L ; e il valore di tale massimo è

$$|u(X_1^+, T_1)| = 1 + 2 \sin \phi_1 < 1 + \sqrt{3} \sim 2.732. \quad (26)$$

Questo limite superiore, conseguenza della formula $\sin \phi_1 = \sqrt{1 - (\pi/L)^2}$, $\pi < L < 2\pi$, è ottenuto quando $L \rightarrow 2\pi$. Inoltre notiamo che la

posizione $x = X_1^+$ del massimo dell'OA coincide con la posizione del massimo della sinusoidale che cresce nella regione descritta dalla teoria linearizzata; questo è dovuto all'assenza della interazione non lineare con altri modi instabili, se $N = 1$.

Per trovare la relazione tra due OA consecutive, si potrebbe procedere cercando di costruire lo stadio asintotico successivo, il secondo stadio di MI lineare, attraverso il raccordo con il primo stadio non lineare. Ma questo raccordo è piuttosto difficile per la ragione seguente. L'onda α_1 , inizialmente di $O(\epsilon)$, diventa l'OA di $O(1)$ (25) e quindi decade esponenzialmente, mentre l'onda β_1 , anch'essa inizialmente di $O(\epsilon)$, diventa di $O(\epsilon^2)$ durante il primo stadio non lineare di MI, e quindi cresce esponenzialmente, diventando il responsabile principale per la generazione della seconda OA della sequenza (questo meccanismo è anche un'importante sorgente di instabilità). Da queste considerazioni, per ottenere la descrizione analitica della seconda OA, sarebbe necessario scavare all' $O(\epsilon^2)$ quando la prima OA appare, per estrarre utili informazioni sull'onda β_1 nascosta, e questo è tecnicamente molto difficile.

Fortunatamente questa difficoltà può essere superata con un semplice trucco, che consiste nell'andare indietro nel tempo dalla condizione iniziale (20). Infatti la formula (21) descrive la dinamica NLS anche per tempi negativi; ma, in questo caso, è l'onda β a essere dominante nella regione asintotica $1 \ll |t| \ll O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$, $t < 0$:

$$u(x, t) \sim e^{2it} \left(1 + \frac{|\beta_1|}{\sin 2\phi_1} \cos[k_1(x - X_1^-)] e^{-\sigma_1 t - i\phi_1} \right). \quad (27)$$

Ne segue che, nella regione $|t| = O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$, $t < 0$, la soluzione è di nuovo descritta dall'Akhmediev breather (15), i cui parametri sono ora fissati dal raccordo con (27). Ripetendo i calcoli di prima, si ottiene che, *andando a ritroso nel tempo, la prima OA appare quando $|t + T_1^-| \leq O(1)$ e, in questa regione, è descritta di nuovo dall'Akhmediev breather, ma con*

parametri diversi:

$$u(x, t) = A_1(x, t; \phi_1, X_1^-, -T_1^-, -2\phi_1) + O(\epsilon),$$

$$T_1^- \equiv \frac{1}{\sigma_1} \log \left(\frac{\sigma_1^2}{2|\beta_1|} \right). \quad (28)$$

Confrontando le due OA consecutive (28) e (25) e, in particolare, la loro espressione rispettivamente ai tempi $t = -T_1^-$ e $t = T_1$:

$$u(x, -T_1^-) = e^{(-2iT_1^- - 2i\phi_1)}$$

$$\times \frac{\cos(2\phi_1) + \sin \phi_1 \cos[\sigma_1(x - X_1^-)]}{1 - \sin \phi_1 \cos[k_1(x - X_1^-)]} + O(\epsilon),$$

$$u(x, T_1) = e^{(2iT_1 + 2i\phi_1)}$$

$$\times \frac{\cos(2\phi_1) + \sin \phi_1 \cos[\sigma_1(x - X_1^+)]}{1 - \sin \phi_1 \cos[k(x - X_1^+)]} + O(\epsilon),$$

si osserva che le due funzioni di x coincidono, all'ordine principale, a meno di un fattore di fase moltiplicativo e a meno di una traslazione spaziale:

$$u(x, T_1) = e^{2i\Delta T + 4i\phi_1} u(x - \Delta X, -T_1^-) + O(\epsilon)$$

dove

$$\Delta T = T_1 + T_1^- = \frac{2}{\sigma_1} \log \left(\frac{\sigma_1^2}{2\sqrt{|\alpha_1 \beta_1|}} \right), \quad (29)$$

$$\Delta X = X_1^+ - X_1^- = \frac{\arg(\alpha_1 \beta_1)}{k_1}.$$

Si conclude che *il problema di Cauchy (17),(20) dà luogo a una successione infinita di OA, e l'ennesima OA della successione è descritta, nell'intervallo $|t - T_1 - (n - 1)\Delta T| \leq O(1)$, dalla formula:*

$$u(x, t) = A_1(x, t; \phi_1, x_1^{(n)}, t_1^{(n)}, \rho^{(n)}) + O(\epsilon), \quad n \geq 1, \quad (30)$$

dove

$$x_1^{(n)} = X_1^+ + (n - 1)\Delta X,$$

$$t_1^{(n)} = T_1 + (n - 1)\Delta T, \quad (31)$$

$$\rho^{(n)} = 2\phi_1 + (n - 1)4\phi_1,$$

in funzione dei dati iniziali (si veda la Fig. 2).

Ricordando le proprietà asintotiche (16) dell'Akhmediev breather, si può facilmente costruire la seguente *rappresentazione uniforme nello spazio-tempo della soluzione del problema di Cauchy, attraverso funzioni elementari, che descrive le prime n*

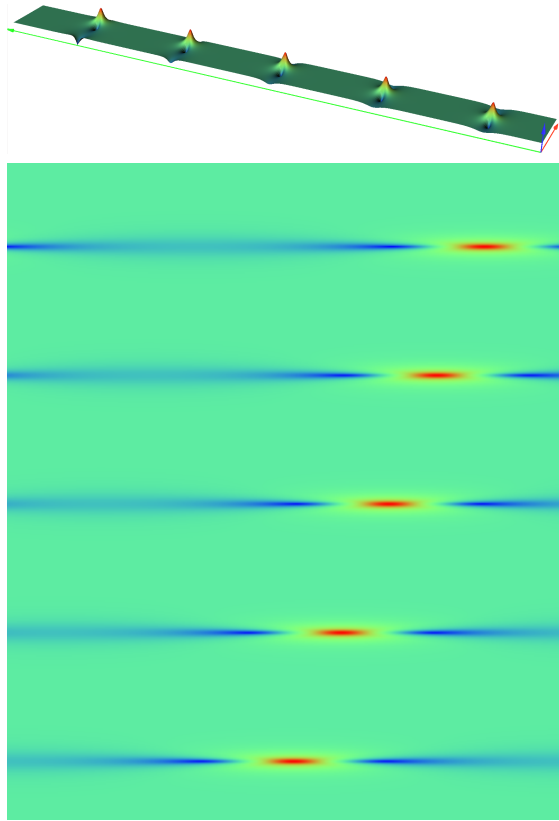


Figura 2: Il grafico 3D e quello delle superfici di livello di $|u(x, t)|$, ottenuti attraverso l'integrazione numerica della NLS col cosiddetto "Split Step Fourier Method" (SSFM) [65, 66, 67, 68], descrivono la ricorrenza di Akhmediev breathers. Qui $L = 6$ ($N = 1$), con $c_1 = \epsilon/2$, $c_{-1} = \epsilon(0.3 - 0.4i)/2$, $\epsilon = 10^{-4}$; l'asse corto è quello delle x , con $x \in [-L/2, L/2]$. L'output numerico è in accordo perfetto con le predizioni teoriche.

apparizioni delle OA, per $0 \leq t \leq t_1^{(n)} + O(1)$:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^n A_1 \left(x, t; \phi_1, x_1^{(m)}, t_1^{(m)}, \rho^{(m)} \right) - \frac{1 - e^{4in\phi_1}}{1 - e^{4i\phi_1}} e^{2it}, \quad x \in [0, L], \quad (32)$$

dove i parametri $x_1^{(m)}$, $t_1^{(m)}$, $\rho^{(m)}$, $m \geq 0$, sono definiti in (31). Questa rappresentazione è accurata con un errore dell' $O(\epsilon^2)$ nella descrizione degli stadi lineari di MI, e dell' $O(\epsilon)$ nella descrizione degli stadi non lineari di MI.

È importante osservare che, se si sostituisce la condizione iniziale (20) con la perturbazione generica (18), sempre nel caso di un solo modo instabile k_1 , la ricorrenza delle OA descritta dalla (32) non subirebbe variazioni all' $O(1)$, e le

differenze apparirebbero all' $O(\epsilon)$ [64].

Riepilogando, si ha il seguente risultato.

La soluzione del problema di Cauchy periodico descrive, nel caso semplice di un solo modo instabile, una ricorrenza esatta di Akhmediev breathers, i cui parametri, diversi ad ogni apparizione, sono espressi in funzione dei dati iniziali attraverso funzioni elementari. T_1 è il tempo di prima apparizione dell'OA (il tempo nel quale l'OA raggiunge il massimo del suo modulo), X_1 è la posizione di tale massimo, $1 + 2 \sin \phi_1$ è il valore di tale massimo, ΔT è il tempo di ricorrenza (l'intervallo di tempo tra due apparizioni successive di OA), ΔX è la traslazione spaziale della posizione del massimo nella ricorrenza. Infine, dopo ogni apparizione, l'OA cambia il background attraverso il fattore di fase moltiplicativo $\exp(4i\phi_1)$.

Il problema inverso delle onde anomale

Abbiamo appena visto che "la parte instabile" $\epsilon_{unst}(x) \equiv c_1 e^{ik_1 x} + c_{-1} e^{-ik_1 x}$ della perturbazione iniziale (18) dà il contributo dominante (quello di $O(1)$) alla ricorrenza di OA. È anche possibile risolvere il problema inverso delle OA, nel quale si ricostruisce, dalla "misura sperimentale" dei parametri $O(1)$ della ricorrenza, la parte instabile $\epsilon_{unst}(x)$ della perturbazione iniziale di $O(\epsilon)$ [64].

Dalla misura del numero d'onda k_1 , si costruisce $\phi_1 = \arccos(k_1/2)$ e $\sigma_1 = k_1 \sqrt{4 - k_1^2}$. Dalla misura dei punti $(x_1^{(1)} = X_1^+, t_1^{(1)} = T_1)$ e $(x_1^{(2)} = X_1^+ + \Delta X, t_1^{(2)} = T_1 + \Delta T)$ nei quali il modulo della prima e della seconda OA hanno i loro massimi, si costruiscono, usando le (31),(29),(22), i parametri α_1, β_1 , attraverso le formule

$$\begin{aligned} |\alpha_1| &= \frac{\sigma_1^2}{2} e^{-\sigma_1 t_1^{(1)}}, \\ \arg \alpha_1 &= k_1 x_1^{(1)} + \phi_1 - \frac{\pi}{2}, \\ |\beta_1| &= \frac{\sigma_1^2}{2} e^{-\sigma_1 (t_1^{(2)} - 2t_1^{(1)})}, \\ \arg \beta_1 &= k_1 (x_1^{(2)} - 2x_1^{(1)}) - \phi_1 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Infine, dalla conoscenza di α_1, β_1 , si costruiscono i coefficienti di Fourier c_1, c_{-1} della

perturbazione iniziale:

$$c_1 = \frac{\bar{\alpha}_1 + e^{-2i\phi_1} \beta_1}{1 - e^{-4i\phi_1}}, \quad c_{-1} = \frac{e^{2i\phi_1} \alpha_1 + \bar{\beta}_1}{1 - e^{4i\phi_1}}. \quad (34)$$

La ricorrenza di onde anomale in fisica

La ricorrenza di OA nel periodico è stata già osservata (si veda, ad esempio, [69, 70, 71, 72, 73]), e esperimenti recenti su onde d'acqua [74], in fibre ottiche [75], e in un cristallo fotorifrangente [76] riproducono accuratamente fenomeni di ricorrenza. In particolare, in [76], un interferometro a tre onde simmetriche è stato usato per generare un'onda di background con una perturbazione monocromatica del tipo (20), che si propaga in un cristallo fotorifrangente (la variabile tempo della NLS ha, qui, il significato di distanza di propagazione all'interno del cristallo).

Poichè la NLS descrive le diverse fisiche degli esperimenti di cui sopra solo in prima approssimazione, ci si deve aspettare che l'esatta ricorrenza di onde anomale precedentemente illustrata diventi una ricorrenza di tipo "Fermi-Pasta-Ulam" [77], prima che la "termalizzazione" distrugga la coerenza del fenomeno. Nell'esperimento [76] sono state infatti osservate fino a tre ricorrenze, che sono state confrontate con le formule esatte della teoria NLS, ottenendo un ottimo accordo qualitativo e quantitativo. È stato anche mostrato che la ricorrenza scompare del tutto quando il cristallo lavora in regime diverso da quello integrabile.

Le formule esatte che descrivono la ricorrenza di OA nel modello NLS

i) dovrebbero essere confrontate con i dati sperimentali già disponibili, o ottenibili nel prossimo futuro, in tutti i contesti fisici nei quali si ritiene che la NLS dia una descrizione al prim'ordine della realtà, per testare quanto bene, appunto, la NLS descriva la fisica in esame anche in presenza di instabilità;

ii) dovrebbero anche essere usate per ricostruire, dai dati sperimentali della ricorrenza, i dati iniziali di $O(\epsilon)$ in modo teorico, confrontandoli con quelli effettivamente utilizzati negli esperimenti (si veda le formule precedenti, e i risultati [76]).

Concludiamo questa presentazione i) con la convinzione che il buon accordo tra le formule

teoriche e le osservazioni sperimentali riscontrato nel lavoro [76], sia ottenuto anche in esperimenti con fibre ottiche, e con onde d'acqua in una vasca, e ii) con l'auspicio che tale accordo si verifichi anche in condensati di bosoni attrattivi.



- [1] V. E. Zakharov: "Stability of period waves of finite amplitude on surface of a deep fluid", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **9** (1968) 190-194.
- [2] D. R. Solli, C. Ropers, P. Koonath and B. Jalali: "Optical rogue waves", *Nature* **450** (2007) 1054.
- [3] U. Bortolozzo, A. Montina, F.T. Arecchi, J.P. Huignard, S. Residori: "Spatiotemporal pulses in a liquid crystal optical oscillator", *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 3-6.
- [4] D. Pierangeli, F. Di Mei, C. Conti, A. J. Agranat and E. DelRe: "Spatial Rogue Waves in Photorefractive Ferroelectrics", *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 093901.
- [5] C. Sulem and P-L. Sulem: *The nonlinear Schrödinger equation (Self focusing and wave collapse)*. Springer, Berlin (1999).
- [6] Yu. V. Bludov, V. V. Konotop, N. Akhmediev: "Matter rogue waves", *Physical Review A* **80** (2009) 033610.
- [7] C. M. Bender and S. A. Orszag: *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer, Berlin (1999).
- [8] A. Degasperis, S. V. Manakov and P. M. Santini: "Multiple-Scale Perturbation beyond the Nonlinear Schrödinger Equation. I", *Physica D* **100** (1997) 187-211.
- [9] F. Magri: "A simple model of the integrable Hamiltonian equation", *J. Math. Phys.* **19** (1978) 1156-1162.
- [10] B. Fuchssteiner and A. S. Fokas: "Symplectic structures, their Backlund transformations and hereditary symmetries", *Physica D: Nonlinear Phenomena* **4** (1981) 47-66.
- [11] P. M. Santini, A. S. Fokas: "Recursion Operators and Bi-Hamiltonian Structures in Multidimensions. I", *Comm. Math. Phys.* **115** (1988) 375.
- [12] P. Lax: "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", *Comm. Pure Applied Math.* **21** (1968) 467-490.
- [13] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov and L. P. Pitaevsky: *Theory of solitons*. Plenum, New York (1984).
- [14] M. J. Ablowitz and H. Segur: *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, (1981).

- [15] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson: *Solitons, nonlinear evolution equations and Inverse Scattering*. London Math. Society Lecture Note Series, vol. 194, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [16] F. Calogero and A. Degasperis: *Spectral Transform and Solitons, tools to solve and investigate nonlinear evolution equations. I*. North-Holland, Amsterdam (1982).
- [17] S. P. Novikov, The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation, *Funct. Anal. Appl.*, **8:3** (1974), 236–246.
- [18] A. R. Its, and V. P. Kotljarov: “Explicit formulas for solutions of a nonlinear Schrödinger equation”, *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A* **1051** (1976) 965-968.
- [19] I. M. Krichever, Methods of algebraic Geometry in the theory on nonlinear equations, *Russian Math. Surv.* **32**, 185-213 (1977).
- [20] B. A. Dubrovin: “Theta-functions and nonlinear equations”, *Russ. Math. Surv.* **36** (1981) 11.
- [21] E.D. Belokolos, A.I. Bobenko, V.Z. Enolski, A.R. Its, V.B. Matveev: *Algebro-geometric Approach in the Theory of Integrable Equations*. Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin (1994).
- [22] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura: “Method for Solving the Korteweg-deVries Equation”, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095.
- [23] D. J. Korteweg, G. de Vries: “On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves”, *Philosophical Magazine* **39** (1895) 422-443.
- [24] V. E. Zakharov, A. B. Shabat: “Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media”, *Sov. Phys. JETP* **34** (1972) 62-69.
- [25] F. Calogero and W. Eckhaus: “Nonlinear evolution equations, rescalings, model PDEs and their integrability: I”, *Inverse Problems* **3** (1987) 229 – 62.
- [26] V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov: “Multi-scale expansions in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform”, *Physica D* **18** (1986) 455-463.
- [27] Wikipedia, the free encyclopedia, [Onde Anomale](#)
- [28] Wikipedia, the free encyclopedia, [Rogue Wave](#)
- [29] P. Müller, C. Garret and Al Osborne: “Rogue Waves”, *The Fourteenth 'Aha Huliko' A Hawaiian Winter Workshop, Meeting Report*. Soest.hawaii.edu. *Oceanography* (2005) 66-70.
- [30] S. Haver: “Freak wave event at Draupner jacket”, *January 1 1995 (Report)*, Statoil, Tech. Rep. PTT-KU-MA (2003) .
- [31] K. L. Henderson and D. H. Peregrine and J. W. Dold: “Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrödinger equation”, *Wave Motion* **29** (1999) 341.
- [32] K. B. Dysthe and K. Trulsen: “Note on Breather Type Solutions of the NLS as Models for Freak-Waves”, *Physica Scripta* **T82** (1999) 48-52.
- [33] A. Osborne, M. Onorato and M. Serio: “The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep-water gravity wave trains”, *Phys. Lett. A* **275** (2000) 386.
- [34] C. Kharif and E. Pelinovsky: “Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon”, *Eur. J. Mech. B/Fluids J. Mech.* **22** (2004) 603-634.
- [35] C. Kharif and E. Pelinovsky: “Focusing of nonlinear wave groups in deep water”, *JETP Lett.* **73** (2001) 170 - 175.
- [36] M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina, F.T. Arcelli: “Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts”, *Physics Reports* **528** (2013) 47-89.
- [37] V. I. Vespalov and V. I. Talanov: “Filamentary structure of light beams in nonlinear liquids”, *JETP Letters*. **3** (1966) 307.
- [38] T. B. Benjamin, J. E. Feir: “The disintegration of wave trains on deep water. Part I. Theory”, *Journal of Fluid Mechanics* **27** (1967) 417-430.
- [39] V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: “Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method”, *Sov. Phys. - JETP* **47** (1978) 1017-1027.
- [40] V. Zakharov, L. Ostrovsky: “Modulation instability: the beginning”, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **238** (2009) 540-548.
- [41] T. Taniuti, H. Washimi: “Self-Trapping and Instability of Hydromagnetic Waves along the Magnetic Field in a Cold Plasma”, *Phys. Rev. Lett.* **21** (1968) 209.
- [42] L. Salasnich, A. Parola, L. Reatto: “Modulational Instability and Complex Dynamics of Confined Matter-Wave Solitons”, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 080405.
- [43] G. Stokes: “On the Theory of Oscillatory Waves”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society VIII* **1847** (197-229) Supplement 314-326.
- [44] A. R. Its, A. V. Rybin and M. A. Sall: “Exact integration of nonlinear Schrödinger equation”, *Theor. Math. Phys.* **74** (1988) 20-32.
- [45] I. M. Krichever: “Spectral theory of two-dimensional periodic operators and its applications”, *Russian Math. Surveys* **44** (1989) 145-225.
- [46] I. M. Krichever: “Perturbation Theory in Periodic Problems for Two-Dimensional Integrable Systems”, *Sov. Sci. Rev., Sect. C, Math. Phys. Rev.* **9** (1992) 1-103.
- [47] V. B. Matveev and M. A. Salle: *Darboux transformations and solitons*. Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin (1991).
- [48] N. Ercolani, M. G. Forest and D. W. McLaughlin: “Geometry of the modulation instability Part III: homoclinic orbits for the periodic Sine-Gordon equation”, *Physica D* **43** (1980) 349-384.
- [49] V. E. Zakharov and A. B. Shabat: “A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering transform I”, *Funct. Anal. Appl.* **8** (1974) 226-235.

- [50] D. H. Peregrine: "Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions", *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **25** (1983) 16-43.
- [51] E. A. Kuznetsov: "Solitons in a parametrically unstable plasma", *Sov. Phys. Dokl.* **22** (1977) 507-508.
- [52] T. Kawata and H. Inoue: "Inverse scattering method for the nonlinear evolution equations under non-vanishing conditions", *J. Phys. Soc. Japan* **44** (1978) 1722-1729.
- [53] Y.-C. Ma: "The perturbed plane wave solutions of the cubic Schrödinger equation", *Stud. Appl. Math.* **60** (1979) 43 - 58.
- [54] N. N. Akhmediev, V. M. Eleonskii, and N. E. Kulagin: "Generation of periodic trains of picosecond pulses in an optical fiber: exact solutions", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **89** (1985) 1542-1551.
- [55] P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein, V. B. Matveev: "On multi-rogue wave solutions of the NLS equation and positon solutions of the KdV equation", *Eur. Phys. J. Special Topics* **185** (2010) 247.
- [56] R. Hirota: *Direct Methods for Finding Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 515, Springer, Berlin (1976).
- [57] D. J. Kedziora, A. Ankiewicz, and N. Akhmediev: "Second-order nonlinear Schrödinger equation breather solutions in the degenerate and rogue wave limits", *Phys. Rev. E* **85** (066601) 2012.
- [58] V. E. Zakharov, A. A. Gelash: "On the nonlinear stage of Modulation Instability", *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 054101.
- [59] F. Baronio, A. Degasperis, M. Conforti, S. Wabnitz: "Solutions of the vector nonlinear Schrödinger equations: evidence for deterministic rogue waves", *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 44102.
- [60] A. Degasperis and S. Lombardo: *Integrability in action: solitons, instability and rogue waves*. Rogue and Shock Waves in non linear Dispersive Waves, Lecture Notes in Physics, M. Onorato, S. Resitori, F. Baronio (Eds.), 2016 (<http://www.springer.com>)
- [61] A. Degasperis, S. Lombardo and M. Sommacal: "Integrability and linear stability of nonlinear waves", (2017) arXiv:1707.09536.
- [62] P. G. Grinevich and P. M. Santini: "The finite gap method and the analytic description of the exact rogue wave recurrence in the periodic NLS Cauchy problem. 1", (2017) arXiv:1707.05659.
- [63] P. G. Grinevich and P. M. Santini The finite gap method and the solution of the rogue wave periodic Cauchy problem in the case of a finite number of unstable modes, (2018) (in preparation).
- [64] P. G. Grinevich and P. M. Santini: "The exact rogue wave recurrence in the NLS periodic setting via matched asymptotic expansions, for 1 and 2 unstable modes", *Phys. Lett. A* **382** (2018) 973-978.
- [65] G. P. Agrawal: *Nonlinear Fiber Optics (3rd ed.)*. Academic Press, San Diego (2001).
- [66] J. A. C. Weideman and B. M. Herbst: "Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation", *SIAM Journal on Numerical Analysis* **23** (1986) 485-507.
- [67] T R Taha and X Xu: "Parallel Split-Step Fourier Methods for the coupled nonlinear Schrödinger type equations", *The Journal of Supercomputing* **5** (2005) 5-23.
- [68] J. Javanainen and J. Ruostekoski: "Split-step Fourier methods for the Gross-Pitaevskii equation", (2004). ArXiv:cond-math/0411154.
- [69] H. C. Yuen and W. E. Ferguson: "Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation", *Phys. Fluids.* **21** (1978) 1275.
- [70] B. M. Lake, H. C. Yuen, H. Rungaldier, and W. E. Ferguson: "Nonlinear deep-water waves: Theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train", *J. Fluid Mech.* **83** (1977) 49.
- [71] H. Yuen, B. Lake: "Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves", *Advances in Applied Mechanics* **22** (1982) 229.
- [72] G. Van Simaey, P. Emplit, and M. Haelterman: "Experimental Demonstration of the Fermi-Pasta-Ulam Recurrence in a Modulationally Unstable Optical Wave", *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 033902.
- [73] E. A. Kuznetsov: "Fermi-Pasta-Ulam recurrence and modulation instability", *JETP Letters* **105** (2017) 125-129.
- [74] O. Kimmoun, H. C. Hsu, H. Branger, M. S. Li, Y. Y. Chen, C. Kharif, M. Onorato, E. J. R. Kelleher, B. Kibler, N. Akhmediev, A. Chabchoub: "Modulation Instability and Phase-Shifted Fermi-Pasta-Ulam Recurrence", *Scientific Reports* **6** (2016) 28516. doi:10.1038/srep28516
- [75] A. Mussot, C. Naveau, M. Conforti, A. Kudlinski, P. Szriftgiser, F. Copie, S. Trillo: "Fibre multiwave-mixing combs reveal the broken symmetry of Fermi-Pasta-Ulam recurrence", *Nature Photonics* (in press)
- [76] D. Pierangeli, M. Flammini, L. Zhang, G. Marcucci, A. J. Agranat, P. G. Grinevich, P. M. Santini, C. Conti, and E. DelRe: "Observation of exact Fermi-Pasta-Ulam recurrence", *Preprint* (2018)
- [77] G. Gallavotti (Ed.): *The Fermi-Pasta-Ulam Problem: A Status Report*. Lecture Notes in Physics, Vol. 728, Springer, Berlin (2008).



Petr Georgievich Grinevich : è Leading Scientific Researcher del Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Science e professore del Lomonosov Moscow State University. I suoi interessi scientifici riguardano i

sistemi integrabili nella fisica matematica, problemi inversi di diffusione, Metodi geometrici in fisica.

Paolo Maria Santini: è Professore Ordinario di Fisica Teorica presso l'Università di Roma La Sapienza. I suoi interessi scientifici riguardano aspetti algebrici, geometrici ed analitici della teoria dei sistemi non lineari integrabili della fisica matematica.

