La più grande cantonata di Einstein

Paolo Ciafaloni *INFN & Dipartimento "Ennio De Giorgi" - Lecce*

Nel 1917 Einstein introduce nelle equazioni della relatività generale, che descrivono le interazioni di gravità, un termine denominato costante cosmologica. Dopo la scoperta dell'espansione dell'Universo ad opera di Hubble nel 1929, Einstein stesso ritratta la propria modifica etichettandola come il proprio errore più madornale. Per 70 anni il termine introdotto da Einstein viene ignorato dalla comunità scientifica, ma nel 1998 la costante cosmologica risorge in maniera drammatica grazie ad una serie di osservazioni su supernovae distanti 6 miliardi di anni luce da noi. Le attuali osservazioni astrofisiche indicano che la dinamica dell'Universo è dominata dalla moderna reincarnazione della costante cosmologia, denominata energia oscura, che compone il 70% dell'energia totale. L'energia oscura agisce come una sorta di antigravità a distanze cosmologiche. Le teorie delle interazioni fondamentali indicano valori della densità di energia oscura 120 ordini di grandezza superiori a quelli osservati: alcuni considerano questa come la peggior predizione nella storia della fisica.

Prologo

Su grandi scale di distanza, la dinamica dell'Universo è dominata dalle interazioni gravitazionali. In effetti, le interazioni debole e forte sono confinate all'interno dei nuclei, quindi su scale di distanze microscopiche. Quanto all'interazione elettromagnetica, cariche positive e negative tendono a compensarsi, e l'interazione elettromagnetica è totalmente trascurabile già su distanze dell'ordine della distanza terra-luna. La teoria della gravità migliore che abbiamo è la teoria della relatività generale di Einstein, che ad oggi è compatibile con tutte le verifiche sperimentali. In questa teoria, un "oggetto" produce una curvatura nello spazio-tempo, la quale a sua volta produce un effetto fisico, determinando il moto di un altro "oggetto". Per "oggetto" si intende "qualunque forma di energia", quindi non solo la massa* ma anche, ad esempio, l'energia connessa con un campo elettromagnetico (cioè fotoni nella teoria quantistica dei campi).

Non è facile intuire cosa significhi "curvatura dello spazio-tempo", anche perché è ovviamente impossibile avere una immagine mentale di un oggetto a 4 dimensioni. Possiamo capire però che cosa sia la curvatura in uno spazio bidimensionale quale è, sostanzialmente, quello in cui viviamo sulla superficie della Terra. Fintanto che ci muoviamo su distanze piccole, tale superficie è

*La massa è una forma di energia, secondo la celebrata formula $E = mc^2$.

Figura 1: *La terra è curva! Nell'immagine possiamo vedere la curvatura globale determinata dal raggio della Terra e la curvatura locale prodotta dalle montagne. Per analogia l'Universo è caratterizzato da una curvatura globale e da curvature locali collegate ad esempio alle galassie.*

sostanzialmente piatta e ci possiamo muovere di moto rettilineo uniforme. Quando ci muoviamo su distanze grandi, cioè paragonabili al raggio della Terra, il moto rettilineo è impossibile e la curvatura ci obbliga a deviare da esso. In questa analogia possiamo comprendere come la curvatura faccia deviare gli oggetti dal moto rettilineo uniforme. A un livello di dettaglio maggiore, esistono sulla Terra delle piccole regioni con curvatura quali le montagne, che anch'esse influenzano il nostro moto. Per analogia possiamo dire che l'Universo è caratterizzato da curvature "locali", determinate ad esempio da una galassia, e da un raggio di curvatura "globale" che determina la deviazione dal moto rettilineo anche di oggetti lontani da qualsiasi curvatura locale. Sono curvature locali anche quelle prodotte dal nostro sole ad esempio, che determinano il moto dei pianeti. Possiamo distinguere la curvatura spaziale, che è quella discussa fino ad ora, da quella temporale, che determina una accelerazione come vedremo più in dettaglio nel prossimo paragrafo.

La gravità è un'interazione attrattiva, e agisce su qualunque tipo di energia o materia. Questo implica che se osserviamo un insieme di oggetti in una data configurazione iniziale, nel tempo le distanze fra gli oggetti tendono a diminuire e alla fine il sistema collassa su se stesso. Un universo statico è quindi instabile a causa delle interazioni gravitazionali, e non può esistere. Nel 1917 Einstein, nel tentativo di risolvere questa difficoltà, introduce un termine aggiuntivo nelle equazioni che descrivono la gravità. Tale termine, che è caratterizzato da quella che oggi chiamiamo costante cosmologica, agisce come una sorta di antigravità, equilibrando su grandi distanze l'interazione attrattiva di gravità e stabilizzando l'Universo statico. Naturalmente la costante deve essere sufficientemente piccola da produrre effetti trascurabili su distanze dell'ordine del sistema solare o inferiori, ma sufficientemente grande da ottenere l'effetto voluto.

La legge di Hubble

Saltiamo di 12 anni e arriviamo al 1929. L'astronomo E. Hubble osserva una alterazione sistematica delle righe spettrali nella luce proveniente dalle galassie. Le righe spettrali sono una sorta di firma digitale degli elementi presenti in natura. In effetti un dato elemento, ad esempio l'idrogeno, non emette luce a tutte le lunghezze d'onda, ma solo a determinate lunghezze d'onda raffigurate in Fig. 2. Nella figura osserviamo anche l'alterazione delle righe (dette anche spettro di emissione) verso lunghezze d'onda più grandi (frequenze più basse) detto redshift, e verso lunghezze d'onda più piccole (frequenze più grandi) detto blueshift.

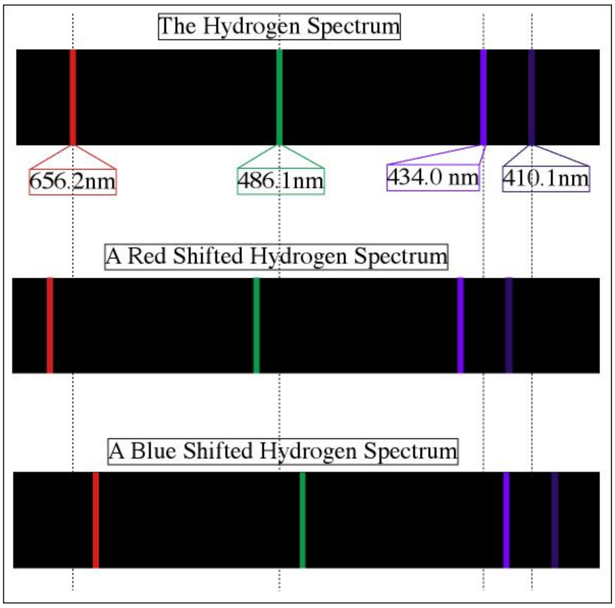

Figura 2: *Righe di emissione (o spettro di emissione) dell'idrogeno molecolare, H_2. In figura anche lo spostamento dello spettro verso il rosso (redshift) e verso il blu (blueshift)*

Il redshift si quantifica tramite la variabile $z = \Delta\lambda/\lambda = -\Delta\nu/\nu$, dove λ (ν) è la lunghezza d'onda (frequenza) naturale e $\Delta\lambda = \lambda_{\rm mis} - \lambda$, $\lambda_{\rm mis}$ essendo la lunghezza d'onda misurata. Hubble non osserva nessun tipo di blueshift, ma misura un redshift in tutte le galassie osservate. Inoltre ricava una relazione sistematica fra il redshift z e la distanza dalla terra d della galassia osservata, la legge di Hubble:

$$z = \frac{H_0}{c} d \qquad (1)$$

dove c è la velocità della luce e H_0 la costante di Hubble, il cui valore misurato odierno è $H_0 = 73 \pm 1.75$ (km/s)/Mpc*. Quindi il redshift aumenta linearmente con la distanza. Tale legge è valida per distanze superiori a circa 10 Mpc, che è la distanza tipica dello spazio extragalattico.

L'interpretazione più naturale della legge di Hubble è che il redshift sia collegato a una velocità di allontanamento delle galassie, per via di un effetto fisico chiamato effetto Doppler. Ognuno di noi ha esperienza dell'effetto Doppler nel caso delle onde sonore: la sirena di una ambulanza che si sta avvicinando ha un suono più acuto della stessa sirena quando l'ambulanza è ferma, mentre quando l'ambulanza si allontana la tonalità è più grave†. Nel caso del redshift, la teoria dell'effetto Doppler prevede che la velocità di recessione di una galassia sia data da $v = zc$. Indicando con il punto la derivata temporale si ottiene quindi la relazione (detta anch'essa legge di Hubble):

$$v = \dot{d} = H_0\, d \qquad (2)$$

Se si assume che l'universo sia omogeneo (cioè con uguali proprietà in tutti i punti) ed isotropo (cioè senza direzioni privilegiate), la legge di Hubble comporta l'espansione dell'universo, che descrivo più in dettaglio nel prossimo paragrafo.

Un universo in espansione non necessita di alcuna costante cosmologica, per cui Einstein stesso dopo le osservazioni di Hubble abbandona la costante cosmologica, qualificando la sua introduzione come un errore madornale‡.

*1 Mpc (Megaparsec) equivale a circa $3.3\,10^6$ anni luce, ovvero circa $3.1\,10^{19}$ km

†La stessa cosa succede nel caso di un jet che ci passi sopra la testa ad esempio.

‡È curioso notare come Hubble invece sia rimasto scettico per tutta la vita sulla interpretazione della relazione redshift-distanza in termini di espansione dell'universo, attribuendo tale relazione a 'un ignoto effetto fisico' [2]

La costante cosmologica diventa una curiosità accademica, e la comunità scientifica la mette nel cassetto per 70 anni. Ma una serie di osservazioni effettuate nel 1998 causano una rivoluzione nella comunità dei cosmologi. Le misure effettuate su una serie di oggetti astrofisici denominate Supernovae di tipo Ia indicano che l'espansione dell'Universo stia accelerando[1]. La cantonata più grande di Einstein non è affatto una cantonata, e l'antigravità esiste davvero.

Espansione e accelerazione

Per comprendere cosa significhi l'espansione dell'Universo, è utile una analogia con un panettone in lievitazione. In questa analogia un chicco di uvetta rappresenta una singola galassia, e la pasta fra un chicco e l'altro rappresenta lo spazio vuoto intergalattico. supponiamo che la pasta in lievitazione abbia forma sferica e rappresentiamo il suo raggio ad un certo istante con $R(t)$. Possiamo sempre scrivere:

$$\dot{R}(t) \equiv \frac{dR(t)}{dt} = H(t)R(t) \qquad (3)$$

dove $H(t)$ dipende dall'istante t di osservazione.

Figura 3: *L'Universo in un panettone. Ogni chicco di uvetta rappresenta una galassia, mentre la pasta del panettone rappresenta lo spazio "vuoto", che poi tanto vuoto non è (vedi testo). La lievitazione del panettone corrisponde alla osservata espansione dell'Universo.*

Il punto cruciale adesso è supporre che il panettone che lievita sia omogeneo e isotropo. Ovviamente su scale dell'ordine delle dimensione dei chicchi di uvetta ci sono disomogeneità dovute ai chicchi stessi, ma su scale più grandi possiamo supporre che il numero di chicchi in un dato volume sia circa lo stesso in ogni porzione di panettone, che non esistano strutture con una direzione privilegiata, che l'agente lievitante sia distribuito in maniera uniforme. È facile allora rendersi conto che la (3) vale per *qualunque* scala di distanza. Cioè, data qualsiasi coppia di chicchi ad una distanza d, la variazione col tempo della distanza è data dalla legge di Hubble (2). Poiché tutte le distanze variano in maniera uniforme, possiamo definire un fattore di scala comune $a(t)$ adimensionale, tale che $d(t) = a(t)d_0$, dove d_0 è la distanza fra una coppia di oggetti al momento t_0. Convenzionalmente si pone $a(0) = 1$ all'istante $t_0 = 0$ in cui il panettone (l'Universo) viene osservato nel presente.

L'equazione di Friedmann

Come accennato nel prologo, la dinamica dell'Universo, cioè le equazioni che dicono come il fattore di scala $a(t)$ varia nel tempo, è determinata dall'interazione di gravità. Tale interazioni sono descritte dalle equazioni di Einstein della relatività generale. Le equazioni si semplificano notevolmente per via dell'assunzione di omogeneità e isotropia, dando luogo all'equazione di Friedmann, che è l'oggetto di questo paragrafo:

$$\frac{1}{2}(\dot{d})^2 - \frac{4\pi G}{3}\,\rho\, d^2 = U \tag{4}$$

dove G è la costante di Newton e ρ la densità di energia, che come vedremo è composta di vari contributi. Curiosamente, questa equazione si può ricavare nell'ambito della descrizione Newtoniana della gravità ed ammette una interpretazione in termini di conservazione dell'energia: il primo termine del membro di destra rappresenta l'energia cinetica e il secondo l'energia potenziale; le due si sommano a dare l'energia totale U, che è costante. La gravità Newtoniana non fornisce alcuna espressione per U; invece in relatività generale U dipende in maniera precisa dalla curvatura globale dell'Universo. Nel caso del nostro Universo, tutte le osservazioni concordano con il fatto che il nostro universo è globalmente piatto (raggio di curvatura infinito); in tal caso la relatività generale prevede $U = 0$ per cui d'ora in poi ometterò questo termine. Introdotto il fattore di scala $a(t)$, l'equazione di Friedmann si riscrive:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) \tag{5}$$

Anche in questa forma, l'interpretazione fisica è abbastanza chiara: la densità di energia ρ determina una curvatura, in questo caso temporale, che a sua volta genera una accelerazione attraverso la costante di Hubble.

Se supponiamo che l'universo sia composto principalmente di materia ordinaria, quale gli atomi, i nuclei, gli elettroni che compongono i pianeti e le stelle, man mano che l'universo si espande (cioè $a(t)$ aumenta con t), la densità ρ diminuisce: questo è una ovvia conseguenza del diluirsi della materia in un volume che aumenta. Di conseguenza la costante di Hubble determinata dalla (5) diminuisce col tempo. In questo caso l'espansione dell'Universo *rallenta*, cioè decelera: questo è ciò che ci si aspetta intuitivamente dato che la gravità è un'interazione attrattiva. Ma il caso della costante cosmologica è diverso: essa è una proprietà del tessuto spaziotemporale ed è appunto costante nel tempo e nello spazio, determinando una densità di energia ρ_Λ che non diminuisce col tempo. In tal caso l'espansione è *accelerata* ed anzi di tipo esponenziale $a(t) \sim e^{\alpha t}$ con $\alpha = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda}$. La densità di energia del vuoto è connessa con la costante cosmologica Λ che compare nelle equazioni di Einstein tramite la relazione:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{6}$$

Le attuali misure indicano una densità di energia del vuoto pari a:

$$\rho_\Lambda \approx 10^{-26}\mathrm{kg/m^3} \approx 10^{-11}\mathrm{eV}^4 \tag{7}$$

che corrisponde a circa 7 atomi di idrogeno per centimetro cubo[§]. Da un punto di vista più moderno, per aprire la possibilità a piccole variazioni della densità di energia nel tempo e nello spazio, si utilizza il termine 'energia oscura'. Le attuali osservazioni implicano che la densità di energia oscura sia molto più grande di quelle della materia ordinaria e della altrettanto misteriosa

[§]Nella (7) si è espressa la densità anche in unità 'naturali' di uso comune nella fisica delle alte energie, nelle quali la massa e l'inverso della lunghezza si esprimono in unità di energia: gli elettronvolt (eV).

materia oscura, costituendo circa il 70 % della densità di energia totale dell'Universo.

L'energia del vuoto si può predire in base alle attuali teorie fisiche?

In breve, la risposta è "No, non si può". Tuttavia, ci sono buone ragioni per ritenere che la conoscenza delle teorie microscopiche fondamentali consenta quantomeno di stimare un'ordine di grandezza per l'energia del vuoto e la costante cosmologica. Intanto, cos'è il vuoto? Supponiamo di considerare una porzione di spazio che contenga energia sotto varie forme: materia, radiazione sotto forma di luce, neutrini ecc. Dal punto di vista della teoria dei campi, che unisce relatività ristretta e meccanica quantistica, tutte le forme di energia sono 'stati di eccitazione del vuoto', cioè stati con energia maggiore dello stato di energia minima, e contenenti una o più particelle. Ad esempio, la luce è costituita da un particolare tipo di particella, i fotoni. Ogni volta che aggiungo un fotone aumento l'energia del sistema, poiché i fotoni hanno energia positiva. Se supponiamo ora di poter estrarre da tale porzione di spazio tutte le forme di energia, cioè *tutte* le particelle, otteniamo lo stato di minima energia. Il vuoto è quindi uno stato in cui non ci sono particelle elementari.

Per capire quanto valga l'energia del vuoto, consideriamo per iniziare un sistema semplice: una molla, considerata ideale, in cui la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento x dalla posizione di equilibrio: $F = -kx$ dove k è una costante. Questo sistema è detto anche oscillatore armonico. Dal punto di vista della meccanica classica l'energia di un oscillatore di massa m è la somma di energia cinetica ed energia potenziale:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{8}$$

e può assumere qualunque valore maggiore o uguale 0. Ma in meccanica quantistica le cose cambiano. Non tutte le energie sono permesse, e i livelli energetici sono quantizzati, cioè assumono valori discreti e non più continui. Inoltre lo stato di energia minima non ha energia 0, bensì $E_0 = \frac{h}{4\pi}\omega$ dove $\omega = \sqrt{k/m}$ è la frequenza di risonanza dell'oscillatore e h la costante di Planck (vedi Fig. 4). Quindi l'oscillatore armonico ha una energia fondamentale (o energia minima, o energia di punto zero) diversa da 0 e ben definita in termini dei parametri che lo descrivono. Si può intuire perché questo accada tenendo presente il principio di indeterminazione di Heisenberg, che sancisce che non si possono misurare contemporaneamente posizione (in questo caso x e velocità (in questo caso $\dot{x}$). Questo significa che il sistema non può esistere nello stato in cui vale $x = \dot{x} = 0$, che corrisponderebbe a energia nulla. Invece, il sistema fondamentale è caratterizzato da *fluttuazioni quantistiche* tali che sia il valor medio dell'energia cinetica che quello dell'energia potenziale sono diversi da zero. Il sistema si assesta in modo tale da assumere il valore più piccolo possibile dell'energia, che come osservato non è 0. In Fig. 4 sono graficate le densità di probabilità, cioè le funzioni che rappresentano la probabilità di trovare il sistema nella coordinata x: in meccanica quantistica infatti non si può predire il valore della coordinata alla quale si trova il sistema, ma solo la sua probabilità. Dalla figura si capisce come lo stato di minima energia non corrisponda a $x = 0$.

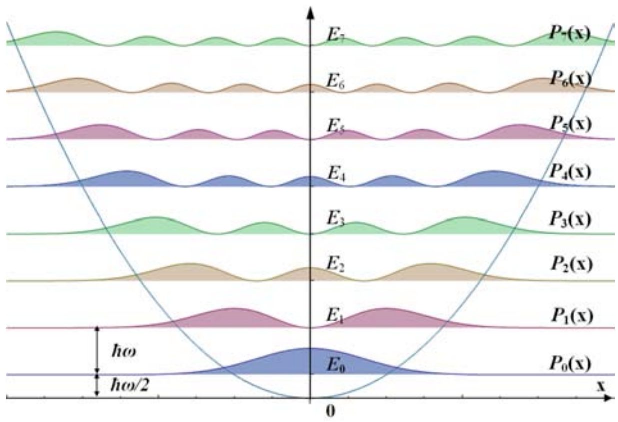

Figura 4: *Livelli energetici e densità di probabilità dell'oscillatore armonico. Il livello fondamentale corrisponde ad un'energia $E_0 = \frac{h}{4\pi}\omega$ e a fluttuazioni della coordinata intorno al valore $x = 0$.*

Passiamo ora a considerare quello che succede in teoria quantistica dei campi, che mette insieme meccanica quantistica e relatività ristretta. È possibile raffigurare un campo quantistico come un numero infinito di oscillatori armonici, ognuno definito in un punto dello spazio-tempo. Sommando le energie di punto zero di ognuno degli oscillatori otteniamo l'energia di punto zero del vuoto. La teoria dei campi fornisce una espressione precisa per l'energia minima di un volume finito di spazio V e conseguentemente anche per la densità di energia:

$$\rho_{\text{vuoto}} = \frac{1}{V} E_{\text{vuoto}} = \int_0^\infty \omega^3 d\omega \qquad (9)$$

Quindi a causa del numero infinito di gradi di libertà l'energia del vuoto quantistico è infinita!

Occorre a questo punto fare due osservazioni. La prima è che nella stragrande maggioranza dei casi il valore dell'energia del vuoto può essere ignorato, in quanto nei processi fisici compaiono sempre differenze di energie, e in tali differenze il valore dell'energia minima si cancella. Tuttavia non possiamo assumere lo stesso atteggiamento nel caso della gravità, in quanto le interazioni gravitazionali, come abbiamo visto, hanno come sorgente *tutte* le forme di energia: una energia infinita causa una curvatura infinita, ed è pertanto impossibile da interpretare. La seconda osservazione è che in teoria dei campi gli infiniti compaiono dappertutto, appunto per via del numero infinito di gradi di libertà. Ma esiste un metodo in grado di dare un significato alle divergenze ottenendo alla fine quantità fisiche finite. Tale metodo si chiama rinormalizzazione, e provo ad accennarlo. Il primo passo consiste nel regolarizzare, cioè dare un significato, all'integrale (9), introducendo una scala di energia massima Λ_{cut}, ottenendo così $\rho_{\text{vuoto}} \sim \Lambda^4_{\text{cut}}$. La scala di energia di cutoff compare come parametro intermedio, ma le quantità osservabili fisiche non possono dipendere da tale scala. La densità di energia del vuoto riceve poi un'altro contributo direttamente come parametro presente nella teoria, ρ_0. In definitiva si ha:

$$\rho_\Lambda = \Lambda^4_{\text{cut}} + \rho_0(\Lambda_{\text{cut}}) \qquad (10)$$

Normalmente la dipendenza di ρ da Λ_{cut} viene fissata in modo che il valore fisico (in questo caso ρ_Λ) sia determinato dall'esperimento. Ad esempio la massa misurata dell'elettrone non è predetta dal Modello Standard delle interazioni fondamentali: essa è la somma del contributo 'bare' m_0 che è un parametro della teoria, e di un contributo divergente che dipende esplicitamente da Λ_{cut}. Nessuna teoria può dunque *predire* il valore di ρ_Λ. Tuttavia nel moderno modo di vedere la rinormalizzazione, la scala di cutoff introdotta in precedenza ha il significato di 'scala massima di energia alla quale la teoria è valida'. Possiamo supporre che la nostra maniera di intendere la fisica delle particelle tramite la teoria dei campi e il Modello Standard sia valida fino alla scala di Planck: $\Lambda_{\text{cut}} = \Lambda_{\text{Planck}} \approx 10^{19}$ GeV, per cui $\Lambda^4_{\text{Planck}} \approx 10^{112}\text{eV}^4$. Sappiamo infatti che oltre questa scala sono rilevanti effetti quantistici gravitazionali che non siamo capaci di descrivere. Inserendo il valore misurato (7) nella (10) otteniamo:

$$\rho_\Lambda \approx 10^{-11}\text{eV}^4 = 10^{112}\text{eV}^4 + \rho_0 \qquad (11)$$

Questa equazione implica che i due termini $\Lambda^4_{\text{Planck}}$ e ρ_0, a priori totalmente indipendenti, siano accidentalmente identici (e con segno opposto) fino alla centoventireesima cifra significativa! Potremmo richiedere un livello di cancellazione 'naturale' a livello dell'un per mille, basandoci su quello che accade normalmente nel Modello Standard per altre quantità fisiche. In questo caso la predizione 'naturale' è che i due termini di ordine 10^{112} eV si cancellino parzialmente a dare $\rho_\Lambda \approx 10^{109}$ eV. Ma questo valore 'naturale' è 120 ordini di grandezza più grande di quello osservato, una situazione descritta [3] come 'la peggior predizione nella storia della fisica'.

[1] Vedi ad esempio Accelarating expansion of the Universe su Wikipedia.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Edwin_Hubble

[3] M.P. Hobson, G.P. Efstathiou, A.N. Lasenby, *General Relativity: An introduction for physicists* (Reprint ed.). Cambridge University Press., Cambridge, (2006), p. 187.

Paolo Ciafaloni: è un ricercatore in fisica teorica presso l'INFN e l'Università del Salento; vive ad Arnesano in provincia di Lecce. Laureato a Pisa nel 1991, si occupa di fisica delle particelle e di cosmologia.