

---

# La convezione nelle stelle

**Michaël Bazot**    *Center for Space Science – New York University Abu Dhabi*

---

**N**elle stelle si verificano fenomeni convettivi. Tuttavia, prima di illustrare le loro principali caratteristiche ed i modelli usati dai fisici per descriverli, è necessario soffermarsi sui principi della fisica stellare per capire quali cause li innescano.

Ad un primo sguardo, una stella non è altro che una gigantesca sfera di gas. Sembrerebbe una affermazione banale, ma non lo è. Infatti, se prendiamo in considerazione del gas contenuto in una stanza, è ben noto che esso si espanderà fino a riempire tutto lo spazio disponibile. Ma, nel caso di una stella, il gas si trova nel mezzo interstellare (che, per i nostri fini, può essere considerato come un alto vuoto di estensione infinita), e, tuttavia, mantiene una forma sferica. Il concetto chiave, in questo caso, è quello di “gigantesco”: la quantità di materia che stiamo prendendo in considerazione implica che una stella sia un sistema auto-gravitante (da cui la simmetria sferica). È il suo stesso peso ad impedire al gas di espandersi senza limiti. Infatti, se supponiamo che una stella si trovi in una configurazione stabile, il richiamo della gravità deve essere bilanciato. Un’ipotesi ragionevole è quella che la stella sia in equilibrio idrodinamico, e che la stabilità risulti da forze di pressione che controbilanciano la gravità. Tramite questa ipotesi è possibile ottenere delle stime rozze ma realistiche per i valori delle variabili termodinamiche vicino al centro di una stella. Nel caso del Sole, considerando

**C**onvection occurs in stars. Yet before expanding on its main characteristics and how physicists model it, we need to look into the principles of stellar physics to understand why it does set in the first place.

At first glance, a star is nothing but a gigantic sphere of gas. This statement might seem trivial, it is not. Suffice to consider some gas in a room. It is canon knowledge that it will expand and fill all the available space. However, we are talking here about gas in the interstellar medium (which will be considered, for any practical purpose, as a good vacuum of infinite extent), and yet it possesses a spherical structure. A key word here is of course “gigantic”. Indeed the amount of matter considered here implies that the star is a self-gravitating system (hence the sphere). Its own weight prevent the gas particles to escape to infinity. In fact this gravitational pull has to be balanced for the star to be in a stable configuration. A very reasonable assumption is that the star is in hydrodynamical equilibrium and that stability is a product of pressure forces counteracting gravity. Using this assumption, one could get crude but realistic estimates of the thermodynamic variables near the centre of a star. In the solar case, when considering the average pressure gradient, mass and radius, one find that the central pressure is  $P_c \simeq 2GM_\odot^2/\pi R_\odot^4$ , with  $M_\odot$  and  $R_\odot$  the solar mass and radius. Typical

un gradiente di pressione medio, la massa ed il raggio, si ottiene che la pressione nel centro è  $P_c \simeq 2GM_\odot^2/\pi R_\odot^4$ , dove  $M_\odot$  e  $R_\odot$  indicano, rispettivamente la massa ed il raggio del Sole. Sostituendo i valori numerici ritenuti corretti per la nostra stella si ottiene  $P_c \simeq 7 \times 10^{14}$  Pa. Con l'ulteriore ipotesi che il gas stellare sia un gas perfetto composto da idrogeno, si può dedurre un grossolano limite superiore alla temperatura centrale pari a  $T_c \lesssim 3 \times 10^7$  K.

Sorprendentemente, queste stime grossolane hanno già fornito una risposta alla nostra prima domanda. Ricordando che le temperature superficiali delle stelle spaziano fra alcune migliaia ed alcune decine di migliaia di gradi, diventa immediatamente chiaro che il loro interno è stratificato e presenta un gradiente di temperatura orientato verso il basso. Pertanto, all'interno di una stella, ad una determinata distanza dal centro, si può affermare che il gas sia riscaldato dal basso. Questo è la tipica situazione che si trova nella convezione di Rayleigh-Bénard, in cui il gradiente di gravità che tenderebbe a rendere stabile il fluido è posto in competizione con il gradiente di temperatura, che, invece, tenderebbe a destabilizzarlo. Questa è, ovviamente, una rappresentazione semplicistica, e moltri altri fattori possono modificare più o meno profondamente questo quadro. Tuttavia, si tratta di un buon punto di partenza, e ci aiuterà a capire molti aspetti della convezione stellare.

Per finire queste osservazioni preliminari riguardo alla struttura stellare, procediamo precisando qualche fatto elementare riguardo al bilancio energetico delle stelle. Finora abbiamo capito come una massa di gas possa mantenere da sola una forma sferica, e che cosa ciò implichi in termini di stratificazione della struttura interna. Tuttavia non abbiamo ancora discusso la caratteristica più ovvia delle stelle: quella di emettere luce. Che debba essere così, è una conseguenza del teorema del viriale, che pone in relazione l'ammontare di energia cinetica ( $E_k$ ) e di energia potenziale gravitazionale<sup>1</sup> ( $E_g$ ) di una stella. Un semplice calcolo fornisce  $E_k = -\frac{1}{2}E_g$ . Prendiamo in considerazione l'energia totale  $E_k + E_g$ . Al tempo iniziale, quando la nebulosa protostellare

<sup>1</sup>Questa è l'energia necessaria per allontanare fino ad una distanza infinita tutta la massa stellare, strato dopo strato.

values for the Sun give us  $P_c \simeq 7 \times 10^{14}$  Pa. Making the additional assumption that the stellar gas is a perfect gas of hydrogen, one may derive a rough upper bound on the central temperature  $T_c \lesssim 3 \times 10^7$  K.

Remarkably enough, these rough estimates have already answered our first question. Recalling that the temperature at the stellar surface is of the order of a few thousands or ten of thousands degrees, we immediately see that their interior is stratified with a downward temperature gradient. Conversely, at a given radius in the interior, one could say that the gas is heated from below. This is the typical setup for Rayleigh-Bénard convection, in which a stabilizing gravity gradient is competing with a destabilizing temperature gradient. Of course, this is a simplistic view, and many additional effects can change this picture more or less dramatically. Yet it is a good starting point and will help us to understand much about stellar convection.

To complete these preliminary remarks on stellar structure, let us make precise some further basic facts about the energy balance in stars. So far, we just got to understand how a mass of gas could maintain itself into a spherical structure and what it implies in terms of the stratification of the interior. However, we have not discussed yet what might be the most obvious characteristics of stars: they emit light. That it shall be so can be understood simply by invoking the virial theorem, which tells how to relate the reservoirs of kinetic energy ( $E_k$ ) and gravitational potential energy<sup>1</sup> ( $E_g$ ) in the star. A simple calculus gives  $E_k = -\frac{1}{2}E_g$ . Consider now the total energy  $E_k + E_g$ . At an initial time, when contraction starts in the protostellar cloud, the gas is diluted in space and there is no gravitational field act-

<sup>1</sup>This can be viewed as the energy one needs to bring to infinity all the stellar mass shells.

inizia a contrarsi, il è gas diluito nello spazio e non c'è un apprezzabile campo gravitazionale che agisce su di esso, quindi  $E_g = 0$ . Analogamente, l'energia cinetica dovuta all'agitazione molecolare è trascurabile, se teniamo conto che la temperatura di queste nebulose è di pochi gradi, e quindi è ordini di grandezza più piccola che quella osservata nelle stelle. Quindi, per tutti i fini pratici, l'energia cinetica iniziale è trascurabile. D'altra parte, secondo il teorema del viriale, l'energia della stella a tempi successivi è  $\frac{1}{2}E_g$ , il che vuol dire che  $-\frac{1}{2}E_g$  è stata persa nel mezzo interstellare. Nel caso del Sole, un calcolo di ordini di grandezza suggerisce  $|E_g| \approx 2 \times 10^{41}$  J, e di conseguenza  $E_k \approx 1 \times 10^{41}$  J. Questo è l'ammontare dell'energia persa dalla stella sotto forma di luce irradiata.

Abbiamo quindi capito che dell'energia fluisce all'esterno di una stella, e questo è importante per la convezione. Infatti, l'esistenza di un gradiente di temperatura verso il basso suggerisce che sono proprio le regioni più interne quelle da cui l'energia fluisce verso la superficie. In tal caso la convezione gioca un ruolo importante per la fisica stellare in qualità di meccanismo di trasporto, e, pertanto, il nostro interesse principale sarà quello di calcolare il flusso di energia. È proprio il soffermarsi su questo ambito limitato ciò che ha permesso finora ai fisici stellari di descrivere i processi convettivi senza conoscerne in dettaglio le proprietà.

A questo punto, abbiamo tutto ciò che è necessario per una discussione sulla convezione? Quasi. Ci si potrebbe chiedere se l'interazione fra la contrazione del gas e l'equilibrio idrostatico è tutto ciò che è necessario per dare energia alla radiazione stellare. In alcuni casi è così. Ma un classico ragionamento consiste nell'osservare che, data la luminosità corrente del Sole,  $L_\odot = 3.828 \times 10^{26}$  W ed in assenza di ulteriori sorgenti di energia, la sua durata di vita sarebbe  $-E_g/L_\odot \sim 1.6 \times 10^7$  yr. Questa stima diminutiva creerebbe enormi problemi e paradossi se confrontata con ciò che sappiamo riguardo alla Terra ed al Sistema Solare.

Grazie alle alte temperature e pressioni nel loro centro, le reazioni di fusione nucleare sono la sorgente di energia dei nuclei stellari. La tipica argomentazione si riconduce all'equivalenza massa-energia, ed implica che l'energia liberata

ing on the particles, thus  $E_g = 0$ . Likewise, the kinetic energy due to molecular agitation is negligible, keeping in mind that the temperature of these clouds is of the order of a few degrees, i.e. orders of magnitude lower than those observed in stars. Thus, the initial energy of the gas is negligible for any practical purpose. On the other hand, by the virial theorem, the energy of the star at a further time is  $\frac{1}{2}E_g$ , meaning that  $-\frac{1}{2}E_g$  has been lost to the interstellar medium. For the Sun, an order-of-magnitude calculation gives  $|E_g| \approx 2 \times 10^{41}$  J and consequently  $E_k \approx 1 \times 10^{41}$  J. This is also the amount of energy that has left the star as radiated light.

We have established that energy flows out of a star, and this is an important statement when dealing with convection. Indeed, the downward temperature gradient suggests that the innermost regions will be those from which energy flows to the surface. In that case convection becomes important for stellar physics as a transport mechanism and, accordingly, we will be mostly interested in computing energy fluxes. It is this rather restrictive scope that has allowed stellar physicists to handle convection so far without knowing its detailed properties.

Do we now have all we need to discuss convection? Almost. But one could wonder if the interplay between gas contraction and hydrostatic equilibrium is all there is to power stellar radiation. In some cases yes, but a classical argument is that given the current luminosity of the Sun,  $L_\odot = 3.828 \times 10^{26}$  W, then a characteristic lifetime, if no additional source exists, would be  $-E_g/L_\odot \sim 1.6 \times 10^7$  yr. This is problematic and would lead to many problems and paradoxes regarding our knowledge on Earth and the Solar System.

Given the high temperature and pressure at their centre, a source of energy in the stellar core is nuclear fusion reactions. A classical justification relies on the mass-energy equivalence and implies that the energy liberated as radiation was

come radiazione fosse in precedenza massa atomica del gas che costituisce la stella. Un limite superiore alla riserva totale di energia, risulterebbe allora essere  $M_{\odot}c^2 \approx 1.5 \times 10^{47}$  J. Poiché le stelle sono per lo più costituite da idrogeno, esso deve anche esserne il combustibile principale. La prima ovvia reazione da tenere presente è quella che trasforma quattro atomi di idrogeno in uno di elio, vista l'alta energia di legame di quest'ultimo. In una di tali reazioni circa lo 0.7% della massa atomica si libera sotto forma di energia. Pertanto, in totale, la riserva di energia del Sole grazie alla conversione idrogeno-elio è di circa  $1 \times 10^{45}$  J. In rapporto alla luminosità del Sole, questa reazione da sola permetterebbe di sostenere la struttura in equilibrio per almeno  $10^{11}$  anni, una cifra maggiore dell'età dell'universo di un ordine di grandezza. Ciò rimane vero anche limitando al nucleo della stella la portata delle reazioni nucleari. Pertanto la perdita di energia sotto forma di radiazione delle stelle è compensata da reazioni di fusione nucleare ed esse non continuano a contrarsi globalmente fino a quando non scarseggia il combustibile nella regione centrale<sup>2</sup>.

In teoria esistono molti modi di trasformare idrogeno in elio. Tuttavia, in pratica due sono quelli importanti per la fisica stellare. Il primo è la cosiddetta catena protone-protone, in cui l'idrogeno forma deuterio e successivamente elio<sup>3</sup>. Essa è responsabile della maggior parte dell'energia generata a basse temperature ( $T \lesssim 15 \times 10^6$  K). Si tratta del processo dominante nel Sole. A temperature più alte il principale meccanismo di

previously atomic mass constitutive of the stellar gas. The total energy reservoir, to be used as an upper bound, would then be  $M_{\odot}c^2 \approx 1.5 \times 10^{47}$  J. Stars being mostly made of hydrogen, it should be the main fuel. The first obvious reaction to take into account is the the transformation of four hydrogen atoms in one helium atom, due to the high binding energy of the latter. During each such transformation, approximately 0.7% of the atomic mass is liberated as energy. There fore in total, the energy reservoir for the Sun out of hydrogen-to-helium conversion is roughly  $1 \times 10^{45}$  J. Reported to the luminosity of the Sun, this reaction alone would allow to sustain the equilibrium structure for at most  $10^{11}$  years, which is more than the age of the Universe by orders of magnitude. This is true even if nuclear burning is confined to the core of stars. Thus radiative energy losses of stars are compensated by nuclear fusion reactions and they do not contract as a whole until the fuel in the central regions is depleted<sup>2</sup>.

In theory, there may be a lot of processes leading from hydrogen to helium, in practice however two are relevant for stellar physics. The first is the so call proton-proton chain, in which hydrogen forms deuterium and then helium<sup>3</sup>. It is responsible for most of the energy generation at low temperatures ( $T \lesssim 15 \times 10^6$  K). It is for instance the dominant process in the Sun. At higher temperatures, the main nuclear burning mechanism is the carbon-nitrogen-oxygen (CNO) cycle. It involves hydrogen reacting with

<sup>2</sup>Ovviamente la questione non è così semplice come questa breve spiegazione potrebbe lasciar intendere. Diversi problemi devono essere superati prima di poter accettare la fusione nucleare come possibile fonte di energia. In particolare si deve ricorrere ad effetti di tunnel quantistico per superare la barriera coulombiana fra le cariche positive dei nuclei di idrogeno. Analogamente, non tutto l'idrogeno brucia contemporaneamente, e talvolta reagiscono anche l'elio o elementi più pesanti. Quando il combustibile del nucleo stellare è esaurito, le parti centrali della stella cominciano a contrarsi sotto l'azione della gravità. La vita di una stella è, dunque, una successione di lunghe fasi di combustione intervallate a rapide fasi di contrazione del nucleo.

<sup>3</sup>A questo punto esistono in realtà tre principali sottocategorie nella catena p-p. Due nuclei  $^3\text{He}$  possono reagire per formare un  $^4\text{He}$  e dei protoni, oppure  $^3\text{He}$  può fondersi con  $^4\text{He}$  per formare un  $^7\text{Be}$  e successivamente nuclei più pesanti che reagiscono con un protone oppure decadono fornendo due  $^4\text{He}$ .

<sup>2</sup>Things are of course not as straightforward as this quick explanation let it appears. Several problems had to be overcome before accepting nuclear fusion as a viable energy source, in particular one has to invoke quantum tunnelling effects in order to overcome the Coulomb barrier between positively charged H nuclei. Likewise, not all hydrogen is burned at the same time, and sometimes helium or heavier elements are reacting. When the fuel is depleted at the core, then the star will contract under the action of gravity (in its inner regions). The life of a star is thus a succession of long nuclear-burning phases and rapid core-contraction sequences.

<sup>3</sup>At this stage, there are actually three main subchains in the p-p chain. Two  $^3\text{He}$  nuclei can react to form a  $^4\text{He}$  and protons, or  $^3\text{He}$  can fuse with  $^4\text{He}$  to give a  $^7\text{Be}$  and then heavier nuclei that will either react with a proton or decay to give two  $^4\text{He}$ .

combustione è il ciclo carbonio–azoto–ossigeno (CNO). Esso coinvolge idrogeno che reagisce con questi elementi fino a che è prodotto<sup>4</sup> un nucleo di  ${}^4\text{He}$ . La distinzione è importante quando si ha a che fare con la convezione, in quanto il processo CNO è molto più sensibile alla temperatura e può portare a tassi di produzione di energia nel centro molto più alti, il che, a sua volta, favorisce la convezione.

Questi sono i principi elementari necessari a comprendere che cosa innesca la convezione nell'interno delle stelle, ed il suo ruolo come meccanismo di trasporto dell'energia potenziale. Nel seguito spiegheremo perché e come può svilupparsi, e quale forma essa prende.

## Stabilità dinamica

Supponiamo che, ad un certo istante  $t = 0$ , l'interno stellare sia in una configurazione stabile, e che sia stratificato con un certo gradiente di temperatura, definito da  $\nabla = \partial \ln T / \partial \ln P$ , positivo (cioè sia la temperatura che la pressione aumentano in direzione radiale verso il centro). Consideriamo ora un elemento di fluido posto ad un raggio  $r$ , con temperatura  $T$  e pressione  $P$ . La densità dell'elemento è nota grazie all'equazione di stato  $\rho = \rho(T, P)$ . Al tempo  $t$  questo elemento è spostato dalla sua posizione di equilibrio. Al tempo  $t + \Delta t$  si trova a  $r + \Delta r$ . L'elemento di fluido subisce una trasformazione termodinamica il cui risultato determina la stabilità dell'interno stellare rispetto a perturbazioni dinamiche.

Innanzitutto assumiamo che la pressione all'interno dell'elemento diventi istantaneamente uguale a quella dell'ambiente circostante<sup>5</sup>. Per semplicità discuteremo il caso in cui  $\Delta r > 0$  (il ragionamento è del tutto simmetrico nel caso  $\Delta r < 0$ ). Quando l'elemento di fluido giunge a  $r + \Delta r$  la sua pressione sarà diminuita, e perciò si sarà espanso e la sua temperatura sarà decresciuta. A questo punto ci sono solo due possibilità: se l'elemento si raffredda più velocemente dell'interno stellare allora risulterà più pesante

<sup>4</sup>Il processo lascia immutate le componenti CNO di questo ciclo, che si comportano quindi come catalizzatori della conversione  $4\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$ .

<sup>5</sup>Questa è una ipotesi plausibile poiché la bolla si espande alla velocità del suono, che è solitamente dell'ordine di  $10^6$  m/s, ma si sposta con una velocità dell'ordine di 100 m/s.

these elements until a  ${}^4\text{He}$  nucleus is produced<sup>4</sup>. The distinction is important when dealing with convection because the CNO process is much more sensitive to temperature and can lead to much higher energy generation rates at the centre of the star, which might in turn favour convection.

These are basic principles necessary to understand why convection onsets in stellar interiors, i.e. as a potential energy transport mechanism. In the following, we will explain when and how it might develop, and which form it takes.

## Dynamical stability

Let us assume that, at a given instant  $t = 0$ , the stellar interior is in a stable configuration. It is stratified with a temperature gradient, defined as  $\nabla = \partial \ln T / \partial \ln P$  and that is positive (radial temperature and pressure gradients both being inwards). Now consider an element of fluid located at radius  $r$ , with temperature  $T$  and pressure  $P$ . The density of the element is known through the equation of state  $\rho = \rho(T, P)$ . At time  $t$ , this element is displaced from its equilibrium position. At time  $t + \Delta t$  it is at  $r + \Delta r$ . The element of fluid undergoes a thermodynamical transformation whose outcome will determine the stability of the stellar interior to dynamical perturbations.

First let us assume that the pressure inside the element instantaneously adjusts to the surroundings<sup>5</sup>. For the sake of exposition we will now consider the case for which  $\Delta r > 0$  (our argument is perfectly symmetric for the case  $\Delta r < 0$ ). When the fluid element arrives at  $r + \Delta r$  its pressure will have decreased, and accordingly it will have expanded and its temperature decreased. We are thus left with two possibilities: either the element cools down faster than the stellar interior, in that case it will be heavier than its sur-

<sup>4</sup>The CNO components of the cycle are left unchanged by the process and are thus catalysts to the  $4\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$  conversion.

<sup>5</sup>This is a plausible assumption if the bubble expands at sound speed, which is typically of the order  $10^6$  m/s, whereas the displacement of the bubble is of the order of 100 m/s.

del fluido che lo circonda all'altezza  $r + \Delta r$  e ricadrà in basso verso la sua posizione di equilibrio (intorno alla quale potrebbe compiere delle oscillazioni). Oppure, al contrario, se si raffredda più lentamente, allora continuerà a muoversi verso l'alto, e parleremo di una configurazione dinamicamente instabile. Indicando il gradiente di temperatura dell'elemento con  $\nabla_e$  e quello dell'interno stellare con  $\nabla$ , allora possiamo così riassumere il ragionamento

$$\nabla \geq \nabla_e \Rightarrow \text{instabilità dinamica.}$$

Questo è il famoso criterio di Schwarzschild per la stabilità dinamica. È da notare che questa relazione è valida indipendentemente dal segno di  $\Delta r$ . Se la disuguaglianza è soddisfatta allora la convezione può innescarsi, invece se  $\nabla_e \geq \nabla$  lo strato è stabile. La parola "strato" ha una certa importanza in questo contesto. Traduce il fatto che il criterio di Schwarzschild ha una natura differenziale. Pertanto esso dà una informazione locale riguardo alla stabilità. Ciò è legato a delle difficoltà nella formulazione di modelli dell'interno delle stelle di cui parleremo brevemente più avanti.

Il criterio di Schwarzschild non è specifico della fisica stellare, e lo si ritrova esposto in molti libri riguardanti fluidi stratificati dalla temperatura. Tuttavia, abbiamo fatto una semplificazione implicita che non è sempre giustificabile nel caso delle stelle, e cioè che l'equazione di stato dipenda solo da  $T$  and  $P$ . In effetti dovremmo piuttosto scrivere  $\rho = \rho(T, P, \mu)$ , dove  $\mu$  è il peso molecolare della mistura. È ragionevole ipotizzare che il peso molecolare medio di un elemento spostato non cambi <sup>6</sup>. Pertanto solo l'ambiente circostante può essere soggetto ad un gradiente non nullo di peso molecolare  $\nabla_\mu = \partial \ln \mu / \partial \ln P$ . Ciò può essere dovuto ad una interazione fra le reazioni nucleari e la convezione, oppure alla diffusione atomica. L'effetto di un tale gradiente è facile da spiegare. Se  $\nabla_\mu$  è positivo, allora il peso molecolare medio aumenta con la profondità ed il gradiente di  $\mu$  è stabilizzante. All'elemento di fluido perturbato si oppongono un gradiente stabile termico ed uno chimico, rendendo difficile

<sup>6</sup>È ragionevole, ma non è sempre vero. Quando si tiene conto della diffusività molecolare e di quella termica, allora si coglie che possono determinarsi instabilità doppiamente diffusive [1, in questo numero]

roundings at  $r + \Delta r$  and will fall back towards its equilibrium position (around which it may end up oscillating). If on the contrary it cools down slower than the exterior, it will keep moving up and the configuration is said to be dynamically unstable. If we write the temperature gradients of the element and the stellar interior  $\nabla_e$  and  $\nabla$  we can sum this up as

$$\nabla \geq \nabla_e \Rightarrow \text{dynamical instability.}$$

This is the celebrated Schwarzschild criterion for dynamical stability. Note that this relation is valid regardless of the sign of  $\Delta r$ . If the inequality is true then convection might set in, conversely if  $\nabla_e \geq \nabla$  the layer is stable. The word "layer" is of some importance here. It translates the fact that the Schwarzschild criterion is differential in nature. Therefore it gives us local information about stability. This is linked to complications in modelling stellar interiors that we will briefly touched upon later.

The Schwarzschild criterion is not specific to stellar physics and can be found derived in many books dealing with thermally stratified fluids. We nevertheless made an implicit simplification that cannot always be justified in the case of stars, namely that the equation of state depends only on  $T$  and  $P$ . In fact it should rather read as  $\rho = \rho(T, P, \mu)$ , with  $\mu$  the mean molecular weight of the mixture. It is reasonable to assume that the mean molecular weight of a displaced does not change <sup>6</sup>. Thus only the surroundings may show a non-null molecular weight gradient  $\nabla_\mu = \partial \ln \mu / \partial \ln P$ . This can result from the interplay between nuclear reactions and convection or because of atomic diffusion. The effect of such a gradient is easy to explain. If  $\nabla_\mu$  is positive, then the mean molecular weight increases with depth and the  $\mu$  gradient is stabilizing. The perturbed element of fluid must then overcome the thermal and the chemical stable gradients, making harder for convection to set in. In other

<sup>6</sup>It might be reasonable but this is not always true. When molecular and thermal diffusivities are taken into account, then double-diffusive instabilities might occur [1, this issue]

l'innesco della convezione. In altre parole, e ponendo ancora una volta  $\Delta r > 0$ , un elemento di fluido sarà meno denso a  $r + \Delta r$  solo a causa delle sue trasformazioni termodinamiche, mentre la densità dell'ambiente circostante diminuisce a causa sia del cambiamento nello stato termodinamico sia del cambiamento di composizione chimica. Pertanto  $\nabla_e$  deve essere ancor più piccolo per permettere la convezione. D'altra parte, se  $\nabla_\mu < 0$ , siamo in presenza di un gradiente destabilizzante e la convezione è innescata più facilmente. Formalmente ciò si esprime con la disuguaglianza

$$\nabla - \frac{\phi}{\delta} \nabla_\mu \geq \nabla_e,$$

che è il criterio di Ledoux. Per generalità, abbiamo incluso sia il coefficiente di espansione che quello chimico  $\delta = -\partial \ln \rho / \partial \ln T$  and  $\phi = \partial \ln \rho / \partial \ln \mu$ . Per un gas ideale,  $\delta = \phi = 1$ . Il criterio di Ledoux si riduce a quello di Schwarzschild nel caso  $\nabla_\mu = 0$ , cioè per strati chimicamente omogenei.

Abbiamo un criterio locale che ci permette di determinare la stabilità di uno strato dell'interno stellare rispetto a movimenti convettivi. Quindi, noto un particolare profilo di stratificazione, possiamo dividere la stella in regioni dinamicamente stabili ed instabili. Per semplicità applicheremo solo il criterio di Schwarzschild. Il nostro primo obiettivo sarà quello di spiegare quando esso è soddisfatto, date le caratteristiche globali di una stella.

Un passo in questa direzione è quello di farsi un'idea del comportamento dei gradienti  $\nabla$  and  $\nabla_e$ . Ci si può chiedere che cosa succede quando uno strato è stabile? In tal caso l'energia è trasportata dalla radiazione (dai fotoni che sono assorbiti e riemessi in sequenza dal plasma stellare) o per conduzione (attraverso la collisione fra particelle). Se trascuriamo la seconda e descriviamo la prima approssimativamente come un processo di diffusione, si ha la seguente espressione per il gradiente di temperatura in strati dominati dal trasporto radiativo

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{4acG} \frac{\kappa r^2 |\mathbf{F}| P}{mT^4}, \quad (1)$$

dove  $a$  è la costante di Stefan-Boltzmann,  $c$  è la velocità della luce,  $G$  è la costante di gravitazione

words, and again using  $\Delta r > 0$ , an element of fluid will be lighter at  $r + \Delta r$  because of its thermodynamical transformation, whereas the density of the surroundings decreases due to both changes in the thermodynamical state and chemical composition. Thus  $\nabla_e$  has to be even smaller in order to allow for convection. Evidently, if  $\nabla_\mu < 0$ , we are dealing with a destabilizing gradient and convection will be easier to trigger. Formally this is expressed as

$$\nabla - \frac{\phi}{\delta} \nabla_\mu \geq \nabla_e,$$

which is the Ledoux criterion. For the sake of generality, we have included the expansion and chemical coefficient,  $\delta = -\partial \ln \rho / \partial \ln T$  and  $\phi = \partial \ln \rho / \partial \ln \mu$ . For an ideal gas,  $\delta = \phi = 1$ . The Ledoux criterion reduces to the Schwarzschild criterion for  $\nabla_\mu = 0$ , i.e. for chemically homogeneous layers.

We have a local criterion allowing us to assess the stability of a layer of the stellar interior against convective movements. Given a particular stratification profile we can thus partition the star into dynamically stable and unstable regions. For the sake of simplicity, we will only consider the Schwarzschild criterion. Our first goal will be to explain when it is met, given the global characteristic of the star.

A step in that direction will be to give an idea of the behaviour of the gradients  $\nabla$  and  $\nabla_e$ . One has to wonder what happens when a layer is stable? In that case, energy is transported by radiation (the photons are successively absorbed and re-emitted in the stellar plasma) or conduction (through particle collisions). If we neglect the latter and treat the former in the framework of a diffusive approximation, we can write the temperature gradient for radiation-dominated layers

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{4acG} \frac{\kappa r^2 |\mathbf{F}| P}{mT^4}, \quad (1)$$

with  $a$  the Stefan-Boltzmann constant,  $c$  the speed of light,  $G$  the universal gravitational constant,  $\kappa$  the opacity and  $|\mathbf{F}|$  the energy flux. It is also noteworthy that, since  $|\mathbf{F}| = 4\pi r^2 l$ , with  $l$  the lumi-

universale,  $\kappa$  è l'opacità e  $|F|$  è il flusso di energia. È da sottolineare che, poiché è  $|F| = 4\pi r^2 l$ , dove  $l$  è la luminosità, allora la stabilità dipende dal rapporto  $l/m$ . Naturalmente, in assenza di convezione, il gradiente di temperatura è  $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ , e quindi vale la relazione  $\nabla_e \geq \nabla_{\text{rad}}$ . Infine notiamo che il gradiente radiativo può aumentare o perché aumenta il flusso di energia o perché aumenta l'opacità. Se  $\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \nabla_e$  allora lo strato diventa convettivamente instabile, ed una parte dell'energia comincia ad essere trasportata dai moti convettivi. A questo punto il flusso di energia cessa di essere proporzionale a  $\nabla_{\text{rad}}$ . Tuttavia la radiazione non scompare ed il flusso radiativo rimane comunque proporzionale al gradiente di temperatura  $\nabla$ . Ciò semplicemente implica che  $\nabla_{\text{rad}} > \nabla$ , tenendo conto della frazione del flusso totale trasportata dalla convezione.

Infine, è anche possibile fornire una stima del flusso totale. In totale generalità, una bolla più calda dell'ambiente circostante si raffredderà a causa dell'espansione dovuta all'equilibrarsi della pressione, ma anche perché emette radiazione. Perciò il caso adiabatico è un limite inferiore per il gradiente di temperatura dell'elemento di fluido e si ha  $\nabla \geq \nabla_{\text{ad}}$ . In regioni stabili lo scostamento dall'adiabaticità è trascurabile (il che implica anche che se si sposta un elemento di fluido esso oscillerà intorno alla sua posizione di equilibrio). Le proprietà del flusso convettivo in regioni dinamicamente instabili, d'altra parte, dipendono dal particolare valore di  $\nabla$  che potrebbe differire in modo significativo da  $\nabla_{\text{ad}}$ . Per comprendere questa relazione avremo bisogno di descrivere con maggiore precisione il modello usato per descrivere la convezione stellare.

## Il trasporto convettivo di energia

La convezione può avere varie forme ed è necessario caratterizzarla almeno quantitativamente prima di scendere nei dettagli dei modelli che usiamo nella fisica stellare. Fino ad ora abbiamo descritto la nostra stella come una sfera di gas autogravitante, e siamo stati in grado di trarre delle conclusioni alquanto generiche riguardo la struttura termodinamica della stella e la possibilità dell'insorgere della convezione. Assumiamo che, in effetti, ci siano degli strati convettivi nell'interno e concentriamoci su tali regioni, restringendo

l'analisi, allora vediamo che la stabilità dipende dal rapporto  $l/m$ . Ovviamente senza convezione, il gradiente di temperatura è  $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ , e quindi vale la relazione  $\nabla_e \geq \nabla_{\text{rad}}$ . Da lì in poi, il gradiente radiativo può aumentare a causa di un aumento del flusso di energia o di un aumento dell'opacità. Quando  $\nabla = \nabla_{\text{rad}} = \nabla_e$  lo strato diventa convettivamente instabile e parte dell'energia comincia ad essere trasportata dai moti convettivi. A questo punto il flusso di energia cessa di essere proporzionale a  $\nabla_{\text{rad}}$ . Tuttavia la radiazione non scompare ed il flusso radiativo rimane comunque proporzionale al gradiente di temperatura  $\nabla$ . Ciò semplicemente implica che  $\nabla_{\text{rad}} > \nabla$ , tenendo conto della frazione del flusso totale trasportata dalla convezione.

Finalmente, è anche possibile fornire una stima del flusso totale. In generale, una bolla più calda del suo ambiente circostante si raffredderà a causa dell'espansione risultante dall'aggiustamento della pressione e anche perché emette radiazione. Pertanto il caso adiabatico è un limite inferiore per il gradiente di temperatura dell'elemento di fluido e si ha  $\nabla \geq \nabla_{\text{ad}}$ . In regioni stabili lo scostamento dall'adiabaticità è trascurabile (il che implica anche che se si sposta un elemento di fluido esso oscillerà intorno alla sua posizione di equilibrio). Le proprietà del flusso convettivo in regioni dinamicamente instabili, d'altra parte, dipendono dal particolare valore di  $\nabla$  che potrebbe differire in modo significativo da  $\nabla_{\text{ad}}$ . Per comprendere questa relazione avremo bisogno di descrivere con maggiore precisione il modello usato per descrivere la convezione stellare.

## Convective energy transport

Convection can have many forms and it is necessary to characterize it at least quantitatively before going into the details of the model we use in stellar physics. So far we have described our star as a self-gravitating gaseous sphere and we were able to draw very generic conclusions about the stellar thermodynamical structure and the possibility of convective onset. Let us assume that there are indeed convective layers in the interior and focus on such a region, narrowing our perspective so that we can consider a

la nostra prospettiva in modo da poter prendere in considerazione una porzione confinata fra piani paralleli. Il gas sarà allora soggetto ad un gradiente di pressione stabilizzante, come implicato dall'equilibrio idrostatico, ed ad un gradiente di temperatura instabile. Questo è il classico schema della convezione di Rayleigh-Bénard.

Con questa immagine possiamo procedere ulteriormente nella comprensione della convezione stellare usando i classici risultati della stabilità idrodinamica. Innanzitutto dobbiamo notare che finora non abbiamo parlato molto degli effetti diffusivi nei gas stellari. Quando li si prende in considerazione in modo completo si sa che l'inesco della convezione dipende dal valore del numero di Rayleigh, che è

$$\text{Ra} = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu},$$

dove  $\alpha = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_{P,\mu}$  è il coefficiente di dilatazione della miscela gassosa,  $g$  l'accelerazione di gravità locale,  $\Delta T$  la differenza di temperatura fra i bordi inferiore e superiore della zona convettiva (quindi un numero positivo),  $d$  la scala di lunghezza caratteristica del problema,  $\kappa$  la conduttività termica e  $\nu$  la viscosità del fluido.

Prima di stimare gli ordini di grandezza di queste quantità, riassumiamo brevemente come si ottengono i risultati riguardo alla stabilità della convezione di Rayleigh-Bénard. Ipotizziamo che una configurazione inizialmente in equilibrio sia disturbata da perturbazioni di ampiezza minuscola. Le considereremo oscillatorie, propagantisi in un piano perpendicolare alla verticale. Ciascuna di esse sarà caratterizzata da un certo numero d'onda  $k$  e da una pulsazione che, nel caso generico, è un numero complesso. Senza entrare nei dettagli della teoria, è sufficiente menzionare che nel caso di strati limite liberi (ovvero quando non esistono vincoli tangenziali sul fluido ai bordi della zona convettiva, ovviamente questo è il caso delle zone convettive stellari) le perturbazioni possono essere quantificate e per ciascuna di esse esiste un numero di Rayleigh critico  $\text{Ra}_c^{(n)}$  al di sopra del quale quella perturbazione è instabile, ovvero ha una ampiezza che cresce esponenzialmente.

Bisogna notare che per ognuna delle perturbazioni  $\text{Ra}_c^{(n)}$  dipende dal rapporto d'aspetto del

plane-parallel geometry. The gas is then stable under the pressure gradient, as implied by the hydrostatic equilibrium, and unstable under the spatial temperature gradient. This is the classical set up for Rayleigh-Bénard convection.

From that picture we can go a little further in the understanding of stellar convection using classical results of hydrodynamical stability. First, we should note that we have not so far discussed much diffusive effects in stellar gases. When fully taken into account it is known that the convective onset will depend on the value of the Rayleigh number, that is

$$\text{Ra} = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu},$$

where  $\alpha = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_{P,\mu}$  is the dilatation coefficient of the gas mixture,  $g$  the local gravity,  $\Delta T$  the temperature difference between the bottom and the top boundaries of the convective zone (and thus a positive number),  $d$  the characteristic length scale of the problem,  $\kappa$  the thermal conductivity and  $\nu$  the viscosity of the fluid.

Before giving orders of magnitude let us sum up briefly how basic stability results are obtained in Rayleigh-Bénard convection. Starting from an equilibrium configuration we assume that it is disturbed by small-amplitude perturbations. We will consider them to be oscillatory and propagating in a plane perpendicular to the vertical. The mode has a certain wave number  $k$  and a pulsation which, in all generality, is a complex number. Without entering the detailed theory, suffice to say that, in the case of free boundary layers (for which there is no tangential constraints on the fluid at the boundaries, obviously the case in stellar convective zones) the modes are quantified and for each of them there is a critical Rayleigh number  $\text{Ra}_c^{(n)}$  above which it is unstable, i.e. for which the amplitude of the perturbation grows exponentially.

One should note that for each mode  $\text{Ra}_c^{(n)}$  depends on the aspect ratio of the problem, that

problema, e cioè da  $k^{(n)}d$ , poiché la scala verticale è imposta dalla geometria del problema. Esiste un valore  $k^{(n)} = k_0^{(n)}$  per il quale  $\text{Ra}_c^{(n)}$  raggiunge un minimo. Questo valore aumenta con  $n$ . Pertanto, è evidente che esiste una soglia al di sotto della quale nessuna perturbazione produce l'innescò della convezione. Il valore della soglia può essere stimato, ed è dell'ordine di qualche centinaio. Quando  $\text{Ra}$  la raggiunge, allora la perturbazione di ordine minimo ( $n = 1$ ) innescò la convezione, con una scala caratteristica orizzontale di lunghezza pari a  $2\pi/k_c^{(1)}$ .

Ora abbiamo il giusto quadro formale per accertare un regime convettivo nelle stelle. Un aspetto critico riguarda le scale caratteristiche coinvolte nella fisica stellare. In laboratorio, è naturale porre  $d$  come la distanza fra le due piastre che delimitano l'apparato sperimentale. Nelle stelle, tuttavia, si deve generalmente scegliere l'altezza determinata dalla scala di pressione  $H_p = -Pdr/dP$ , che è di solito considerevolmente più piccola dell'estensione della zona convettiva. Ad esempio, lo strato convettivo esterno del Sole è largo approssimativamente  $2 \times 10^5$  km, mentre l'altezza della scala di pressione è dell'ordine di alcune centinaia di chilometri (che è comunque di gran lunga maggiore rispetto alle lunghezze coinvolte in un qualunque esperimento). Per fissare le idee, continueremo ad esaminare il caso del Sole. La gravità nello strato può essere calcolata usando il suo raggio medio e ipotizzando che l'intera massa solare sia distribuita sotto di esso, il che dà  $g \sim 10^2$  m/s<sup>2</sup>. Il fattore di comprimibilità può essere approssimato da  $\alpha \approx 1/T$  (a meno di una costante dimensionale dell'ordine dell'unità), ed è quindi dell'ordine di  $10^{-4} - 10^{-6}$  nel caso delle temperature tipiche dello strato convettivo solare. La differenza di temperatura attraverso la lunghezza  $d$  è dell'ordine di alcune migliaia di °K. Infine, i coefficienti di viscosità e di conducibilità richiedono dei calcoli più dettagliati per essere stimati. Qui è sufficiente dire che il loro ordine di grandezza è  $\nu \approx 10^{-1}$  m<sup>2</sup>/s and  $\kappa \approx 10^8$  m<sup>2</sup>/s. Questi valori numerici ci permettono di stimare un numero di Rayleigh per lo strato convettivo esterno del Sole dell'ordine di  $10^{11}$ . Esso è di gran lunga superiore al numero di Rayleigh critico.

La cosa importante da cogliere è che il numero di Rayleigh non solo fornisce un criterio per

is on  $k^{(n)}d$  since the vertical scale is imposed by the underlying geometry. There is a value  $k^{(n)} = k_0^{(n)}$  for which  $\text{Ra}_c^{(n)}$  reaches a minimum. This value increases with  $n$ . Therefore one can see that there is a threshold below which no perturbation will produce a convective onset. This value can be evaluated and is of the order of a few hundreds. When  $\text{Ra}$  reaches it then the mode of lower order ( $n = 1$ ) becomes convective with a characteristic horizontal length scale  $2\pi/k_c^{(1)}$ .

We now have the correct framework to determine the regime of stellar convection. A critical aspect concerns the characteristic length scales involved in stellar physics. In an experimental setting, it is natural to consider the distance between the two plates that limit the apparatus as  $d$ . In stars however one might often choose the pressure scale height  $H_p = -Pdr/dP$ , which is often considerably smaller than the extent of the convective zone. For instance the solar external convective envelope is approximately  $2 \times 10^5$  km wide, while the pressure scale height is of the order of a few hundreds of kilometres (which is still remarkably large with respect to the lengths involved in any experimental setting). To fix ideas, we will keep discussing the solar case. Gravity in the envelop can be computed by taking its average radius and assuming that the entire mass of the Sun is distributed below it, which gives  $g \sim 10^2$  m/s<sup>2</sup>. The compressibility factor can be approximated as  $\alpha \approx 1/T$  (a dimensional constant of order unity would be necessary) and is thus of the order of  $10^{-4} - 10^{-6}$  for temperatures characteristic of the solar convective envelope. The temperature difference over  $d$  is of the order of a few thousand °K. Finally the viscosity and heat conductivity coefficients require some more detailed calculations to be evaluated. Here suffice to say that they are of the order  $\nu \approx 10^{-1}$  m<sup>2</sup>/s and  $\kappa \approx 10^8$  m<sup>2</sup>/s. These numerical values allow us to estimate a Rayleigh number for the solar outer convective envelope of the order of  $10^{11}$ . This is vastly greater than the critical Rayleigh number.

The important thing to understand is that the Rayleigh number is not only a criterion for stel-

valutare l'insacco dell'instabilità nelle stelle, ma è anche un quantificatore del grado di instabilità del fluido. Infatti, non solo indica quando una certa perturbazione diventa instabile, ma anche come lo diventano molte perturbazioni, e caratterizza la parte immaginaria delle loro pulsazioni, e la dipendenza temporale delle loro ampiezze dipenderà, pertanto, da  $Ra$ .

In più, possiamo anche prendere in considerazione il numero di Prandtl, che è definito da  $Pr = \nu/\kappa$ . Esso misura l'efficienza relativa dei processi di diffusione della quantità di moto e del calore. Ovviamente è alquanto piccolo nelle zone convettive stellari. Ciò significa che, anche se la convezione è il processo dominante, sarà più efficiente nel trasportare quantità di moto che calore, perché per quest'ultimo la diffusione compete assai meglio contro la convezione. Per citare Edward Spiegel: "La convezione a basso numero di Prandtl ha moti assai più vivaci di quella ad alto numero di Prandtl, ed è meno efficace nel trasportare il calore".

Quest'ultima osservazione ci permette di trarre una conclusione molto importante riguardo alla convezione stellare: essa è turbolenta. Le modalità di transizione alla turbolenza di fluidi molto instabili è un problema a sé stante, e non è il caso di affrontarlo in questa sede. Semplicemente faremo un richiamo all'intuito del lettore dicendo che quando molte perturbazioni sono eccitate a varie scale di lunghezza il grado di organizzazione del fluido verosimilmente risulterà essere considerevolmente ridotto. Ad ogni istante nel tempo, ogni elemento di fluido è soggetto a campi di velocità generati dalle molte perturbazioni convettive cresciute oltre il regime lineare. Il problema di identificare degli schemi deterministici di moto del fluido diventa allora intrattabile. Per la convezione stellare prendiamo in considerazione una descrizione di base, e dovremo formulare delle ipotesi aggiuntive, come vedremo nella sezione successiva.

Abbiamo appurato che la convezione stellare produce un flusso turbolento che trasporta in modo efficiente la quantità di moto. Ciò ha risvolti positivi e negativi. Cominciamo da questi ultimi. Idealmente si vorrebbe poter far ricorso a principi di similarità e riprodurre in laboratorio una convezione di tipo stellare. Ciò costituirebbe la prova cruciale per la teoria della

lar instability onset but also an marker of the degree of instability of the flow. Indeed it does not simply indicate when a given mode becomes unstable, but how many modes do and it does characterize the imaginary part of their pulsations, and their time-dependent amplitude will thus depend on  $Ra$ .

What is more, we can also consider the Prandtl number which is given by  $Pr = \nu/\kappa$ . It measures the relative efficiency of the momentum and heat diffusion process. Obviously it is very low in stellar convective zone. This means that even if convection is the dominating process, it will be more efficient at transporting momentum than heat, because for this later, diffusion will compete rather more significantly against convection. To quote Edward Spiegel: "Low-Prandtl number convection has much more lively motions than high-Prandtl number convection and is less effective at transporting heat".

This final remark allows us to draw a very important conclusion on stellar convection: it is turbulent. How highly unstable flows transit to turbulence is a problem in itself and we do not wish to discuss it here. We will simply call to the intuition of the reader by saying that when many unstable convective modes are excited at various length scales, the degree of organization of the fluid is likely to become considerably reduced. At each instant in time, each fluid element is subject to velocity fields issued from many convective modes having grown outside of the linear regime. The problem of identifying a deterministic flow pattern then becomes intractable. It is the basic picture we assume for stellar convection, although more assumptions shall be made, as will be discussed in next section.

We have established that stellar convection is a turbulent flow transporting efficiently momentum. This is a good thing and a bad thing. Let us start with the latter. Ideally one would like to invoke similarity principles and reproduce stellar-like convection in laboratory. This would be the ultimate test for stellar convection theory. However, in the foreseeable future, this is not to

convezione stellare. Tuttavia, nel futuro prevedibile, ciò non sarà possibile. Il problema non è tanto il grande numero di Rayleigh: esistono esperimenti che hanno raggiunto numeri ancor più alti. Alcuni esperimenti sono riusciti a raggiungere  $Ra \sim 5 \times 10^{12}$  usando ioni di Cu in una soluzione di  $CuSO_4$ . Ma in tal caso il numero di Prandtl è 2750. Esperimenti ad alto numero di Rayleigh sono stati condotti usando elio, con  $Ra \in [10^7, 10^{13}]$  e numeri di Prandtl dell'ordine di 1. Il problema, in effetti, è che non ostante l'alto valore di  $\kappa$  che caratterizza il mezzo stellare, è possibile raggiungere regimi ad alto numero di Rayleigh grazie alle grandi lunghezze coinvolte nella convezione stellare. Se consideriamo che gli apparati per la convezione di Rayleigh-Bénard hanno lunghezze tipiche dell'ordine di 1 m, sulla base di sole considerazioni geometriche, c'è un fattore mancante di  $\sim 10^{15}$  per poter riprodurre sperimentalmente le condizioni di un interno stellare.

Il problema risiede principalmente nel numero di Prandtl molto piccolo, che non può essere riprodotto in laboratorio. Di solito esperimenti ad alto numero di Rayleigh sono condotti con numeri di Prandtl  $\gtrsim 1$ . Per fissare le idee,  $Pr \gg 1$  per l'olio di silicone,  $Pr \sim 7$  per l'acqua,  $Pr \sim 0.7$  per l'aria,  $Pr \sim 0.025$  per il mercurio e  $Pr \sim 0.005$  per il sodio liquido. Pertanto ordini di grandezza ci separano dall'aver fluidi che possano descrivere accuratamente la convezione stellare. Al più i risultati sperimentali possono essere usati per mettere alla prova dei casi limite della teoria.

Avevamo annunciato delle notizie positive, ed eccone una. Non ostante si debba lavorare con flussi molto turbolenti che non possono essere modellati in modo del tutto appropriato da equazioni scritte in forma chiusa, esiste un modello semi-empirico che fornisce previsioni ragionevoli. Fu sviluppato per la modellizzazione dei flussi turbolenti ed è stato successivamente adattato al caso della convezione stellare, permettendo di riprodurre accuratamente molti aspetti della fisica solare e stellare. Ne parleremo ora in dettaglio, al fine di completare il nostro quadro teorico.

## Il modello della lunghezza di mescolamento

Le poche caratteristiche della turbolenza che abbiamo più sopra descritto hanno già mostrato

be. The problem is not so much the high Rayleigh number: there exist experiments that can reach even higher values of  $Ra$ . Some experiments have managed to attain  $Ra \sim 5 \times 10^{12}$  using Cu ions in a  $CuSO_4$  solution. But in that case the Prandtl number is 2750. High-Rayleigh number experiments have been performed using helium, with  $Ra \in [10^7, 10^{13}]$  and Prandtl numbers of the order of 1. The issue in fact is that even with the high value of  $\kappa$  characterizing the stellar medium, it is possible to achieve high-Reynolds number regimes because of the length scales involved in stellar convection. If we consider that apparatus for Rayleigh-Bénard convection have typical lengths of the order of 1 m, based only on geometric considerations, there is a factor  $\sim 10^{15}$  that has to be accounted for if one wishes to reproduce experimentally the conditions of stellar interiors.

The issue is thus mostly with the very low Prandtl number, which cannot be reproduced in laboratory. Usually high-Rayleigh number experiments are performed at Prandtl numbers  $\gtrsim 1$ . To fix ideas,  $Pr \gg 1$  for silicon oils,  $Pr \sim 7$  for water,  $Pr \sim 0.7$  for air,  $Pr \sim 0.025$  for mercury and  $Pr \sim 0.005$  for liquid sodium. We are thus orders of magnitude away from flows that could describe accurately stellar convection. At best experimental results can be used to test limiting cases of the theory.

We promised some good news, and there is one. In spite of having to deal with a very turbulent flow that no closed-form system of equations can properly model, and that cannot be reproduced experimentally, there exists a semi-empirical model that gives reasonable predictions. It has been developed for the modelling of other turbulent flows and was later ported to the case of stellar convection and allowed to reproduce accurately many features of solar and stellar physics. We shall now detail it with more care in order to complete our theoretical picture.

## The mixing-length model

The few characteristics of turbulence we described above might have already indicated that it is a

## Le Equazioni di Reynolds

Non è facile trasmettere il concetto di problema della chiusura senza usare la notazione tecnica ed al tempo stesso senza apparire astratto. Quindi mostriamo la procedura di base che porta ad esso.

Innanzitutto ricordiamo che l'evoluzione di un campo scalare passivo  $\theta$  in un flusso con velocità  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  è descritta da

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \chi \theta, \quad (2)$$

con  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  e  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ . Facciamo anche l'ipotesi che il fluido sia incomprimibile<sup>a</sup>, cioè  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Separeremo le variabili che descrivono il fluido in una componente media e deterministica  $\bar{\theta}$ , ed una componente fluttuante a media nulla  $\bar{\mathbf{v}'} = 0$

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \bar{\theta}(\mathbf{r}, t) + \theta'(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Sostituendo questa formalizzazione in (2) e mediando, otteniamo l'equazione di Reynolds

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\theta} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'} = \chi \bar{\theta}.$$

a cui si aggiunge l'equazione di continuità mediata per un fluido incomprimibile.

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

Diventa immediatamente chiaro che abbiamo quattro equazioni (una per ciascuna componente del campo di velocità, più l'equazione di continuità), e cinque variabili:  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$ ,  $\bar{v}_z$  e  $\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'}$ . Quest'ultimo termine può essere riscritto come  $\nabla \cdot \overline{\theta' \mathbf{v}'}$  usando  $\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$ . Poiché il fluido è incomprimibile, possiamo moltiplicare l'equazione per la densità  $\rho$ , il che porta ad una equazione per la divergenza del flusso  $\mathbf{j} = \rho \overline{\theta' \mathbf{v}'}$ , una quantità chiamata flusso turbolento di  $\theta$ .

<sup>a</sup>Grossolanamente, supporremo che questo sia il caso che stiamo trattando. In realtà questa approssimazione non è appropriata per la convezione stellare. Tuttavia è sufficiente per una prima introduzione a questi concetti chiave.

## Reynolds Equations

It is not simple to convey the idea of the closure problem while discarding technical notations and at the same time not sounding abstract. We show the basic procedure leading to it.

First let us recall that the evolution of a passive scalar  $\theta$  in a flow with velocity  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  is given by

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \chi \theta, \quad (2)$$

with  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  and  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ . It is also assumed that the fluid is incompressible<sup>a</sup>, i.e.  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

We consider that the fluid variables are made of a mean, deterministic, component  $\bar{\theta}$  and a fluctuating part of mean  $\bar{\mathbf{v}'} = 0$

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \bar{\theta}(\mathbf{r}, t) + \theta'(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Injecting this formulation in (2) and taking the average, we obtain the Reynolds equation

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\theta} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'} = \chi \bar{\theta}.$$

It is supplemented by the average continuity equation for an incompressible fluid

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

We see right away that we have four equations (one per velocity component plus the continuity equation) and five variables:  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$ ,  $\bar{v}_z$  and  $\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \theta'}$ . This latter term can be rewritten as  $\nabla \cdot \overline{\theta' \mathbf{v}'}$  using  $\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$ . The fluid being incompressible we can multiply the equation by the density  $\rho$ , which leads to an equation for the divergence of the flux  $\mathbf{j} = \rho \overline{\theta' \mathbf{v}'}$ , which is called the turbulent flux for  $\theta$ .

<sup>a</sup>Which we will loosely assume is the situation we are dealing with. This approximation is however not true for stellar convection. It suffices though at first for conveying key ideas.

che essa pone un problema particolare nell'ambi-

particular problem within fluid dynamics. In

to della meccanica dei fluidi. Nei regimi laminari si può sperare che, tramite ipotesi opportune ed una buona scelta delle condizioni al bordo, o anche con integrazioni numeriche delle equazioni di Navier-Stokes, possa essere possibile ottenere i campi di velocità che descrivono il flusso ad ogni istante  $t$  e punto  $r$ . Al contrario, quando il fluido diventa turbolento, questa speranza cade. Infatti, una descrizione della turbolenza di semplicità adeguata per i nostri scopi postula che essa sia uno stato in cui a ciascuno punto  $r$  e ciascun tempo  $t$  la velocità  $v(r, t)$  del fluido sia una realizzazione di una variabile casuale. Ciò rivela immediatamente che possiamo parlare dei fluidi turbolenti solo tramite le loro proprietà statistiche, ad esempio considerando i valori medi delle loro variabili dinamiche. Ciò sarà infatti il punto di partenza nella descrizione del nostro modello di stella. Per cominciare è necessario comprendere che operare delle medie usando le equazioni della meccanica dei fluidi presenta alcune difficoltà tecniche. Un importante problema è quello della chiusura delle equazioni di Navier-Stokes mediate.

Una volta chiarito che le equazioni mediate costituiscono un problema intrattabile, il passo successivo è quello di cercare una forma funzionale accettabile per il flusso turbolento  $\rho\overline{\theta'v'}$ . Nel nostro caso siamo interessati al flusso turbolento di energia, cioè  $\theta = c_P T$ , e quindi, ipotizzando che il calore specifico a pressione costante  $c_P$  sia costante, desideriamo valutare  $j = \rho c_P \overline{T'v'}$ .

Un procedimento semplice consiste nell'usare la cosiddetta approssimazione di lunghezza di mescolamento. Il quadro generale fu suggerito da Prandtl nel 1925 e successivamente adattato alla convezione stellare da Biermann (1932, 1937, 1942) e, nella sua forma più usata, da Böhm-Vitense (1958). Sottolineiamo che, per semplicità, ometteremo la maggior parte dei fattori numerici. Si tratta di fattori dimensionali il cui valore generalmente è vicino all'unità. Essi possono differire tra una formulazione e un'altra della teoria, ma le caratteristiche generali rimangono le stesse. Questa approssimazione postula che un flusso turbolento sia composto da elementi di fluido che si spostano per una distanza media  $\ell$  prima di dissolversi, rilasciando la loro energia nell'ambiente circostante. Questa lunghezza media è chiamata lunghezza di mescolamento.

laminar regimes, one can hope that, using adequate assumptions and proper boundary conditions, or even by numerical integration of the Navier-Stokes equations, it may be possible to obtain velocity fields describing the flow at each instant  $t$  and point  $r$ . On the opposite, when the fluid becomes turbulent, there is no such hope. In fact a simple enough definition of turbulence for our purposes postulates that it is a state in which at each point  $r$  and each time  $t$  the velocity  $v(r, t)$  of the fluid is a realization of a random variable. One can see immediately that we can only approach turbulent flows through their statistical properties, for instance by considering average values of its dynamical variables. This will indeed be the starting point of the description of our stellar model. To begin with, we need to understand that averaging of the equations of fluid dynamics some technical issues. An important problem is the closure of the averaged Navier-Stokes equations (see Box p. 71).

Once it is understood that the averaged equations form an intractable problem, the next stage is to look for an acceptable functional form for the turbulent flux  $\rho\overline{\theta'v'}$ . In our case we are naturally interested in the energy turbulent flux, i.e.  $\theta = c_P T$ , and thus, assuming a constant specific heat at constant pressure,  $c_P$ , we want to evaluate  $j = \rho c_P \overline{T'v'}$ .

A simple procedure is to use the so-called mixing-length approximation. The general picture suggested by Prandtl in 1925 and later adapted to stellar convection by Biermann (1932, 1937, 1942) and, in its most widely used form, Böhm-Vitense (1958). Note that for the sake of simplicity we will omit most numerical factors. These dimensional factors are usually of the order unity or so. They may differ from one formulation of the mixing-length theory to the other without changing its general features. This approximation postulates that the turbulent flow is made of fluid elements that travel an average distance  $\ell$  before dissolving and releasing their energy to their surroundings. This average length is called the mixing length. The elements are usually considered as roughly spherical<sup>1</sup> of average radius  $\sim \ell/2$ .

<sup>1</sup>Spherical blobs are often considered in calculations accounting for radiative losses during the element displacement

Gli elementi di fluido possono essere immaginati con una forma vagamente sferica<sup>1</sup> con raggio medio  $\sim \ell/2$ .

Prendiamo in considerazione una zona convettiva stratificata verticalmente. Nel punto  $z$ , in ogni istante di tempo, le particelle che si spostano verso il basso e che arrivano da  $z_0 > z$  o che si spostano verso l'alto ed arrivano da  $z_0 < z$  contribuiranno a formare il valore di  $T(z)$ . Poiché, in media, una particella viaggerà per una distanza  $\ell$  prima di dissolversi, possiamo ipotizzare che al tempo  $t$  l'elemento che si dissolve nel punto  $z$  sarà partito da una altezza  $z_0$  tale che  $0 \leq |z_0 - z| \leq \ell$ . Pertanto, in media, una goccia di fluido che si dissolve in  $z$  avrà viaggiato per una distanza  $\sim \ell/2$ . Possiamo ora includere questo contributo nella fluttuazione di temperatura nell'Eq. (3). Se l'elemento soggetto a convezione ha una temperatura iniziale  $T_e(z \pm \ell, t)$  uguale a quella dell'ambiente circostante, cioè  $T_e(z \pm \ell, t) = \bar{T}(z \pm \ell)$ , possiamo scrivere la temperatura dell'elemento in  $z$

$$T_e(z) = \bar{T}(z - \ell/2) + \frac{l}{2} \frac{dT_e}{dz}(z - \ell/2).$$

Si noti che abbiamo qui ipotizzato che il gradiente di temperatura dell'elemento abbia una dipendenza dal tempo. Possiamo anche scrivere lo sviluppo di Taylor per la temperatura media<sup>2</sup>

$$\bar{T}(z) = \bar{T}(z - \ell/2) + \frac{l}{2} \frac{d\bar{T}}{dz}(z - \ell/2).$$

Usando lo sviluppo di sopra, possiamo scrivere

$$T'(z) = \frac{l}{2} \left( \frac{dT_e}{dz}(z - \ell/2) - \frac{d\bar{T}}{dz}(z - \ell/2) \right).$$

Data l'ipotesi sul gradiente di temperatura dell'elemento, è ovvio che la fluttuazione di temperatura sia indipendente dal tempo. Ma c'è un'altra importante conseguenza. Osserviamo che i gradienti sono valutati in  $z - \ell/2$ , anche se stiamo prendendo in considerazione la fluttuazione di temperatura in  $z$ . Questo problema può essere risolto se ipotizziamo che la differenza dei gradienti di temperatura sia costante su

<sup>1</sup>Gocce sferiche sono spesso prese in considerazione per calcolare le perdite radiative nel corso degli spostamenti degli elementi di fluido.

<sup>2</sup>Questa spiegazione segue da vicino [6].

Let us consider a vertically stratified convective zone. At any time at point  $z$ , particles moving downwards and originating at  $z_0 > z$  or travelling upwards and originating at  $z_0 < z$  will contribute to  $T(z)$ . Since a particle will travel on average a distance  $\ell$  before dissolving, we can assume that at time  $t$  the element dissolving at  $z$  will have originate at an altitude  $z_0$  such that  $0 \leq |z_0 - z| \leq \ell$ . Therefore, on average, a blob dissolving at  $z$  will have travelled a distance  $\sim \ell/2$ . We can now consider this contribution to be the temperature fluctuation in Eq. (3). Making the assumption that the convective element has an initial temperature,  $T_e(z \pm \ell, t)$ , equal to its surroundings, i.e.  $T_e(z \pm \ell, t) = \bar{T}(z \pm \ell)$ , we can write the element temperature at  $z$

$$T_e(z) = \bar{T}(z - \ell/2) + \frac{l}{2} \frac{dT_e}{dz}(z - \ell/2).$$

Note that we have assumed here that the temperature gradient of the element is time-independent. We can also write down the Taylor expansion for the mean temperature<sup>2</sup>

$$\bar{T}(z) = \bar{T}(z - \ell/2) + \frac{l}{2} \frac{d\bar{T}}{dz}(z - \ell/2).$$

Using the above expansions, we can write

$$T'(z) = \frac{l}{2} \left( \frac{dT_e}{dz}(z - \ell/2) - \frac{d\bar{T}}{dz}(z - \ell/2) \right).$$

Given the assumption on the temperature gradient of the element, it is obvious that the temperature fluctuation is time independent. But there is another important consequence, we see that the gradients are evaluated at  $z - \ell/2$ , even though we are considering the temperature fluctuation at  $z$ . This problem can be solved if we assume that the temperature gradient difference is constant over a mixing-length. This is a very serious assumption, since it implies that a mixing-length theory in this form is a local one. On one hand this allows to compute the convective flux using local quantities. On the other hand, if one wants to lift this assumption, it requires to a non-local convection theory which, as of today, does not

<sup>2</sup>This explanation follows closely [6].

distanze pari a quella della lunghezza di mescolamento. Questa è una ipotesi molto restrittiva, perché implica che una teoria della lunghezza di mescolamento in questa forma sia una teoria locale. Da un lato ci permette di calcolare il flusso convettivo usando solo quantità locali. Dall'altro, se non la si accetta, diventa necessario una teoria non-locale della convezione che, ad oggi, non esiste. Ritornando al flusso turbolento, la sua componente lungo l'asse  $z$  diventa

$$j_z = c_P \rho \ell v'_z \frac{l}{2} \left( \frac{dT_e}{dz}(z) - \frac{d\bar{T}}{dz}(z) \right) \quad (4)$$

$$= |\mathbf{F}_{\text{conv}}|. \quad (5)$$

Il flusso dipende dalla velocità dell'elemento soggetto a convezione<sup>3</sup>, che deve essere determinata dalla dinamica del problema. Usando il teorema dell'energia cinetica, ed eguagliando la variazione di energia della goccia che si sposta da  $z \pm \ell$  a  $z$  con il lavoro della forza di Archimede, si arriva a  $v \propto \sqrt{\ell \rho' / \bar{\rho}}$ . Usando le relazioni  $\rho' / \bar{\rho} = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T) T' / \bar{T}$  e  $T' \propto (\nabla - \nabla_e)$  possiamo scrivere il contrasto di densità in funzione delle variabili termodinamiche che ci interessano:  $\nabla, \nabla_e, T, \rho$ . È da notare che i gradienti  $\nabla$  e  $\nabla_e$  sono in relazione con il gradiente spaziale della temperatura media tramite la scala di altezza di pressione,

$$H_P = -P dz / dP.$$

Con alcuni agevoli calcoli si ottiene

$$|\mathbf{F}_{\text{conv}}| \propto T \rho (\nabla - \nabla_e)^{3/2} \ell^2.$$

Dato il flusso, possiamo identificare alcuni casi limite per la convezione. Se  $\ell$  fosse piccolo, allora il gradiente  $\nabla$  aumenterebbe<sup>4</sup> fino al punto da raggiungere la condizione di stabilità marginale  $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ . La convezione, pertanto, diventerebbe inefficiente, e l'energia tornerebbe ad essere trasportata dalla radiazione<sup>5</sup>. Intuitivamente, se

<sup>3</sup>Di fatto, la media del prodotto va rimpiazzata da una sorta di prodotto delle medie. Per farlo si usano coefficienti numerici inferiori all'unità, ma questa, in ogni caso, è una limitazione del metodo.

<sup>4</sup>Si potrebbe arguire che  $\nabla_e$  possa decrescere. Tuttavia, se  $\ell$  diminuisce le strutture convettive che trasportano energia dovrebbero diventare più piccole e quindi perdere più energia a causa della radiazione, il che contraddirebbe il fatto che  $\nabla_e$  si avvicina a  $\nabla_{\text{ad}}$ .

<sup>5</sup>Si noti che ciò non vuol dire che il mezzo è dinamica-

exists. Turning back to the turbulent flux, its component along the  $z$ -axis becomes

$$j_z = c_P \rho \ell v'_z \frac{l}{2} \left( \frac{dT_e}{dz}(z) - \frac{d\bar{T}}{dz}(z) \right) \quad (4)$$

$$= |\mathbf{F}_{\text{conv}}|. \quad (5)$$

The flux depend on the velocity of the convective element<sup>3</sup>, which has to be determined from the dynamics of the problem. We can invoke the kinetic energy theorem and equate the variation of energy of the blob from  $z \pm \ell$  to  $z$  with the work of the buoyancy forces, which leads to  $v \propto \sqrt{\ell \rho' / \bar{\rho}}$ . Using the relation  $\rho' / \bar{\rho} = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T) T' / \bar{T}$  and  $T' \propto (\nabla - \nabla_e)$  we can expressed the density contrast in term of the thermodynamical variables of interest  $\nabla, \nabla_e, T, \rho$ . Note that the gradients  $\nabla$  and  $\nabla_e$  are related to the spatial gradient of the mean temperature through the pressure-scale height,

$$H_P = -P dz / dP.$$

After some straightforward calculations we find

$$|\mathbf{F}_{\text{conv}}| \propto T \rho (\nabla - \nabla_e)^{3/2} \ell^2.$$

For a given flux we can identify limiting cases for convection. If  $\ell$  is small then the gradient  $\nabla$  will increase<sup>4</sup> up to the point it reaches the marginal stability condition  $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ . Convection will then be inefficient and energy once more will be transported by radiation<sup>5</sup>. Intuitively, if  $\ell$  is

<sup>3</sup>Actually, the average of the product has to be replaced somehow by product of averages. Numerical coefficient of the order of unity or less to achieve this, but this nevertheless is a limitation of the method.

<sup>4</sup>One could argue that  $\nabla_e$  can also decrease. However, with  $\ell$  becoming smaller, convective structure carrying energy should become smaller and thus loose more energy due to radiation, which would be in contradiction with the fact that  $\nabla_e$  becomes closer to  $\nabla_{\text{ad}}$ .

<sup>5</sup>Note that this does not mean that the medium is dynamically stable with respect to Schwarzschild criterion, but rather that the convective regime is not adequate to ef-

$\ell$  è una misura dell'efficienza della convezione, allora deve tendere a zero quando il trasporto è radiativo. All'opposto, se  $\ell$  è molto grande, allora  $\nabla \rightarrow \nabla_e$  e l'efficienza della convezione è determinata dal suo scostamento dal gradiente adiabatico, cioè dalla capacità dell'elemento convettivo di mantenere la sua identità termica su distanze dell'ordine di  $\ell$ .

Dobbiamo menzionare due relazioni aggiuntive tra i gradienti di temperatura. La prima è ottenuta osservando che la differenza tra il gradiente di temperatura di un elemento e quello adiabatico è pari alle perdite radiative dell'elemento. Riportiamo il risultato senza fare calcoli, ma è sufficiente sapere che, con opportune ipotesi sulla radiazione dell'elemento di fluido (v. p.es. [2, § 6]) si ottiene  $\nabla_e - \nabla_{\text{ad}} \propto T^3 \rho^{-2} \kappa^{-1} (\nabla - \nabla_e)$ .

Possiamo anche porre in relazione le differenze tra il gradiente di temperatura ambiente e, rispettivamente, il gradiente di temperatura dell'elemento di fluido e quello radiativo. Questo è un modo per valutare quanto uno strato è vicino ad un regime di trasporto radiativo. Per far ciò definiamo il gradiente radiativo come il gradiente di temperatura necessario a trasportare tutta l'energia attraverso uno strato dell'interno stellare, ovvero  $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| + |\mathbf{F}_{\text{rad}}| \propto T^4 \kappa^{-1} \nabla_{\text{rad}}$ . Se  $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| = 0$ , allora otteniamo l'Eq. (1). Altrimenti, il flusso radiativo è  $|\mathbf{F}_{\text{rad}}| \propto T^4 \kappa^{-1} \nabla$ , con  $\nabla_{\text{rad}} - \nabla < 0$ . Usando l'espressione per il flusso convettivo (4), otteniamo  $(\nabla - \nabla_e)^{3/2} \propto T^3 \rho^{-2} \kappa^{-1} (\nabla_{\text{rad}} - \nabla)$ .

Queste relazioni svelano tre importanti caratteristiche della convezione stellare. Data una certa lunghezza di mescolamento, se la densità e l'opacità diventano grandi, allora la seconda relazione ci dà  $\nabla \rightarrow \nabla_e$  e la prima  $\nabla_e \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$ . Di conseguenza abbiamo  $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$ . Perciò possiamo porre  $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$  come gradiente di temperatura nell'interno stellare per ogni fine pratico. D'altra parte, se la densità o l'opacità fossero molto piccole, poiché i gradienti e le loro differenze devono rimanere finiti, siamo ricondotti al limite  $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{rad}}$ , il che significa che possiamo porre

---

mente stabile rispetto al criterio di Schwarzschild, ma piuttosto che il regime convettivo non è adeguato a trasportare efficientemente l'energia. In uno strato convettivamente instabile, abbiamo  $\nabla_{\text{rad}} > \nabla > \nabla_e > \nabla_{\text{ad}}$ . Nel caso in esame la disuguaglianza più a sinistra non è più soddisfatta.

a measure of the efficiency of convection, then it shall tend to 0 when the transfer is radiative. On the opposite if  $\ell$  is very large then  $\nabla \rightarrow \nabla_e$  and the efficiency of convection is determined by its departure from the adiabatic gradient, i.e. on the capacity of the convective element to retain its thermal identity over a distance of order  $\ell$ .

We should mention two additional relations between temperature gradients. The first one is obtained by considering the departure of the temperature element gradient from the adiabatic one is explained by the radiative losses of the element. We give the result without calculation, but suffices to know that, using appropriate assumptions on the radiation of the fluid element (see e.g., Kippenhahn § 6), one finds  $\nabla_e - \nabla_{\text{ad}} \propto T^3 \rho^{-2} \kappa^{-1} (\nabla - \nabla_e)$ .

We may also relate the departures of the background temperature gradient from, respectively, the element temperature gradient and the radiative gradient. This is a way to assess how close a layer is to the radiative transport regime. In order to do so, we define the radiative gradient as the temperature gradient necessary to transport all the energy in a layer of the stellar interior, that is  $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| + |\mathbf{F}_{\text{rad}}| \propto T^4 \kappa^{-1} \nabla_{\text{rad}}$ . If  $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| = 0$ , then we have Eq. (1). Otherwise, the radiative flux is  $|\mathbf{F}_{\text{rad}}| \propto T^4 \kappa^{-1} \nabla$ , with  $\nabla_{\text{rad}} - \nabla < 0$ . Using the expression for the convective flux (4), we find  $(\nabla - \nabla_e)^{3/2} \propto T^3 \rho^{-2} \kappa^{-1} (\nabla_{\text{rad}} - \nabla)$ .

These relations actually unveil three important features of stellar convection. For a given mixing-length, when density and opacity become large, then the second relation gives  $\nabla \rightarrow \nabla_e$  and the first  $\nabla_e \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$ . Consequently, we have  $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$ . We can thus set  $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$  as the temperature gradient in the stellar interior for any practical purpose. If, on the other hand, density or opacity become very low, since the gradients and their differences must remain finite, we are in the limit  $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{rad}}$ , which means that we can set  $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$  in our calculations.

---

ficiently transport energy. In a convectively unstable layer, we have  $\nabla_{\text{rad}} > \nabla > \nabla_e > \nabla_{\text{ad}}$ . In the case at hand, it is the leftmost inequality that is not fulfilled anymore.

$\nabla = \nabla_{\text{rad}}$  nei nostri calcoli.

Questi sono casi limite. Nei casi intermedi  $\nabla_e$  può essere significativamente maggiore di  $\nabla_{\text{ad}}$ . Questo è chiamato il regime superadiabatico. In questo caso bisogna risolvere le equazioni per  $|\mathbf{F}_{\text{conv}}|$ ,  $|\mathbf{F}_{\text{rad}}|$ ,  $v$ ,  $\nabla_e$  and  $\nabla$ . Indipendentemente dal caso in considerazione, è possibile utilizzare il gradiente di temperatura  $\nabla$  che si ottiene dai calcoli in una equazione per il trasporto di energia avente la forma  $\partial T/\partial m \propto \nabla$ , che è poi risolta per ottenere la stratificazione di temperatura della stella.

Identifichiamo tre casi, di cui due non richiedono l'uso della approssimazione di lunghezza di mescolamento, e cioè quando  $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$  e  $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$ , poiché entrambi i gradienti possono essere calcolati direttamente dalle variabili termodinamiche<sup>6</sup>. Il caso superadiabatico è più problematico, e richiede di essere valutato con attenzione, a causa delle limitazioni della teoria della lunghezza di mescolamento. Alcune di esse derivano dal fatto che abbiamo introdotto un nuovo parametro,  $\ell$ , che deve in qualche modo essere collegato ad una scala di lunghezza caratteristica della convezione stellare. Il problema è che abbiamo a che fare con convezione libera e non esistono vincoli esterni che possano imporre una scala caratteristica. Come regola generale, la lunghezza di mescolamento va presa come proporzionale a tale scala di lunghezza caratteristica,  $\ell_c$ :  $\ell = \Lambda \ell_c$ . In un ambito sperimentale,  $\ell_c$  è spesso identificata come la distanza dal bordo del contenitore del fluido. Per la convezione libera di solito si preferisce considerare la scala d'altezza della pressione o della densità (definita in modo analogo ad  $H_p$ ). In alcuni casi si adotta il minimo tra la distanza dal bordo più vicino e la scala d'altezza. Ovviamente, come detto prima, la convezione può eccitare diverse perturbazioni e questo implica che la teoria della lunghezza di mescolamento, che considera una singola scala di lunghezza per descrivere il mescolamento turbolento, è necessariamente riduttiva. Di solito, la scelta più comune è  $H_p$  come scala di lunghezza di riferimento, per convenienza di calcolo o per facilità di argomentazione. Ad oggi non c'è un fermo supporto teorico a favore di questa scelta.

These are limit cases. In between,  $\nabla_e$  can be significantly larger than  $\nabla_{\text{ad}}$ . This is called the superadiabatic regime. In this case one has to solve the equations for  $|\mathbf{F}_{\text{conv}}|$ ,  $|\mathbf{F}_{\text{rad}}|$ ,  $v$ ,  $\nabla_e$  and  $\nabla$ . Regardless of the case under consideration, it is possible to inject the resulting temperature gradient  $\nabla$  into a transport equation for energy of the form  $\partial T/\partial m \propto \nabla$ , which is then integrated to evaluate the temperature stratification of the star.

We identified three cases, of which two do not require the use of the mixing-length, namely when  $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$  and  $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$ , since both gradients can be computed directly from thermodynamical variables<sup>6</sup>. The superadiabatic case is more problematic and demands for the shortcomings of the mixing-length theory to be assessed. Some come from the fact that we have introduced a new parameter,  $\ell$ , that has to be related somehow to a characteristic length scale of stellar convection. The issue is that we are dealing with free convection and no exterior constraint can impose a characteristic scale. As a general rule the mixing length will be taken as proportional to that characteristic length scale,  $\ell_c$ ,  $\ell = \Lambda \ell_c$ . In experimental settings,  $\ell_c$  is often taken as the minimum distance to a boundary. For free convection one usually prefers to consider the scale heights for pressure or density (defined in a similar fashion as  $H_p$ ). In some cases the minimum between the distance to the nearest boundary and a scale height is adopted. Of course, as we discussed earlier, convection may excite several modes and this implies that a mixing-length theory, by considering a single length scale to account for turbulent mixing is necessarily reductive. Usually the most popular choice is  $H_p$  as the reference characteristic length, by computational convenience or thank to rule-of-thumb arguments. There is, as of today, no theoretical ground for such a choice.

<sup>6</sup> $\nabla_{\text{rad}}$  si ottiene dall'equazione (1) nel caso  $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| = 0$ . Il gradiente adiabatico si ottiene da  $\nabla_{\text{rad}} = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T) P(T \rho c_p)^{-1}$

<sup>6</sup> $\nabla_{\text{rad}}$  is given by equation (1) in the case  $|\mathbf{F}_{\text{conv}}| = 0$ . The adiabatic gradient is given by  $\nabla_{\text{rad}} = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T) P(T \rho c_p)^{-1}$

L'uso comune è quello di stimare il coefficiente di proporzionalità usando i dati delle osservazioni. In questa sede non abbiamo lo scopo di discutere tutti i possibili modi di vincolare  $\Lambda$  con i dati. Tipicamente si tratta di parametri atmosferici (la temperatura effettiva, la gravità alla superficie e la metallicità), il raggio, la luminosità, le frequenze di oscillazione stellare (modi propri di oscillazione di una stella osservati con una tecnica nota come astrosismologia). Essi devono essere riprodotti usando dei codici di evoluzione stellare, che hanno  $\Lambda$  fra i loro parametri di ingresso. La conseguente messa a punto del codice fornisce la lunghezza di mescolamento. È sufficiente dire che queste stime danno uniformemente un valore per  $\Lambda$  di circa 1. Questo è ragionevole se ci si aspetta che una eccessiva piccolezza di  $\ell$  implichi un incremento delle perdite radiative a causa della decrescita del rapporto volume-superficie di un elemento di fluido di grandezza pari a  $\ell$ . D'altro canto, sarebbe difficile per un elemento di fluido rimanere immutato lungo una distanza  $\ell$  se quest'ultima è troppo grande. Nuovamente sottolineiamo che queste argomentazioni non sgorgano da principi fisici, e sono semplicemente dei modi per controllare la consistenza di ragionamenti basati sul senso comune. Dobbiamo anche aggiungere che essi rivelano un aspetto paradossale della teoria della lunghezza di mescolamento.

Una ipotesi importante è stata infatti posta in modo implicito, e cioè che solo le fluttuazioni di temperatura influenzino la densità. Ciò, ad esempio, ci ha permesso di trattare il fluido come se fosse incomprimibile nelle equazioni di Reynolds, pur continuando a collegare la densità al contrasto di temperatura degli elementi convettivi. Si tratta dell'approssimazione di Boussinesq. L'idea alla sua base è che quando l'accelerazione dovuta alla gravità è molto più grande del termine  $\partial v/\partial t + v \cdot \nabla v$  le piccole fluttuazioni di densità (nel nostro caso indotte da fluttuazioni di temperatura) possono avere un effetto importante solo sulla forza di Archimede, ed il loro effetto è per il resto trascurabile. Questa approssimazione richiede che le dimensioni spaziali prese in considerazione siano piccole rispetto alla lunghezza che caratterizza i movimenti del fluido. Ciò vuol dire che è necessario che sia  $\Lambda \ll 1$ , il che è falso, come abbiamo appena detto. Tut-

The common practice is to estimate the proportionality coefficient using observations. The purpose is not to review here all the possibilities to constrain  $\Lambda$  with data. Typically, these are atmospheric parameters (effective temperature, surface gravity and metallicity), radius, luminosity, stellar oscillation frequencies (proper pulsation modes of a star observed by a technique known as asteroseismology). They have to be reproduced using stellar evolution codes, which take  $\Lambda$  as an input parameter. It is the resulting tuning that give us estimates for the mixing length. Suffice to say that the estimates uniformly give values of order 1. This is a reasonable result if one expect  $\ell$  not to be too small because the decreasing volume-to-surface ratio of the fluid element of characteristic size  $\ell$  implies an increasing loss by radiation. On the other hand, it would be difficult for a convective element to remain unchanged on a distance  $\ell$  if this latter is too large. Then again, these arguments are not rooted in physical principles, and are merely consistency checks based on common sense. We should add that they also reveal a paradoxical aspect of the mixing-length theory.

An important assumption was indeed made implicitly, namely that only temperature fluctuations would affect the density. This for instance allowed us to treat the fluid as incompressible in the Reynolds equations but still relate the density to the temperature contrasts of the convective elements. It is called the Boussinesq approximation. Its underlying idea is that if the acceleration due to gravity is much larger than the term  $\partial v/\partial t + v \cdot \nabla v$  then small fluctuations of density (in our case those induced by temperature fluctuations) can have an important effect through the buoyancy force, while having a small impact otherwise. This approximation demands that the spatial dimensions considered are small with regard to the characteristic scale lengths of the flow. This means that one would expect  $\Lambda \ll 1$ , which is not the case as we just saw. However this shortcoming does not seem to be critical, in particular numerical simulations solving the full

tavia, questa difficoltà non sembra essere cruciale. In particolare, simulazioni numeriche che risolvono l'intero sistema di equazioni di Navier-Stokes sembrano indicare che la teoria di lunghezza di mescolamento non sia eccessivamente inaccurata.

## Regioni convettive nelle stelle

Per concludere questa breve rassegna, desideriamo parlare brevemente di quando la convezione avviene nelle stelle. Ci concentreremo principalmente sulle stelle di sequenza principale, ovvero quelle che ancora bruciano idrogeno nel loro nucleo.

Cominciamo col caso più facile, quello in cui la convezione si sviluppa nel nucleo della stella. Questa situazione capita quando la produzione di energia in prossimità del centro diventa grande. Ciò tipicamente succede quando il ciclo CNO prende il sopravvento sulle catene pp nel processo di combustione dell'idrogeno. Il fattore critico è la dipendenza del tasso di produzione di energia nucleare,  $\epsilon$ , dalla temperatura. Ipotizziamo che sia  $\epsilon \propto T^\nu$ . Il tasso di produzione di energia per il ciclo CNO è tale che  $\nu \approx 19$ , mentre abbiamo qualcosa dell'ordine di  $\nu \approx 3.5 - 6$  per le catene pp. Quindi, quando il primo domina l'energia è generata in regioni assai più ristrette intorno al centro, come è imposto dal gradiente di temperatura locale. Dato un input di luminosità relativamnte simile, vediamo che il flusso di energia  $|F| = l/4\pi r^2$  diventa molto più grande, ed altrettanto fa  $\nabla_{\text{rad}}$ . Per questo motivo si innescano le instabilità. Semplici calcoli di ordini di grandezza mostrano che la densità è sufficientemente alta per raggiungere il limite adiabatico, cioè possiamo porre  $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$ .

Il caso degli involucri convettivi è più complesso. Questa è la situazione che si incontra nel Sole. Esaminiamola a partire dalla fotosfera<sup>7</sup> andando in basso verso gli strati più profondi dell'interno stellare. I primi strati instabili che incontriamo sono dovuti all'aumento dell'opacità causato dalla ionizzazione delle componenti principali della mistura che forma il gas stellare, cioè H and He. Ciò aumenta di alcuni ordini di grandezza con la temperatura e conseguentemente aumenta  $\nabla_{\text{rad}}$ .

<sup>7</sup>La fotosfera è tipicamente definita come il punto dove  $T = T_{\text{eff}}$ .

set of Navier-Stokes equations seem to indicate that the mixing-length theory is not too inaccurate.

## Convective regions in stars

To close this short review, we would like to give an overview of when does convection occur in stars. We will mostly focus on main-sequence objects, i.e. those still burning hydrogen in their core.

Let us start with the easier case when convection develops in the core of stars. This situation occurs when the energy production near the centre becomes large. Typically this corresponds to the CNO cycle taking over the pp chains in the hydrogen-burning process. The critical factor is the dependence of the nuclear energy production rate,  $\epsilon$ , on temperature. We assume that  $\epsilon \propto T^\nu$ . The energy production rate for CNO is such that  $\nu \approx 19$ , whereas it is of the order of  $\nu \approx 3.5 - 6$  for pp chains. Therefore when the former dominates the energy is generated in much narrower regions around the centre, as imposed by the local temperature gradient. For relatively similar luminosity inputs, we see that the energy flux  $|F| = l/4\pi r^2$  becomes much larger and so does  $\nabla_{\text{rad}}$ . This is why convective instabilities set in. Simple order-of-magnitude calculations show that the density is high enough for the adiabatic limit to be attained, i.e. we can set  $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$ .

The case of convective envelopes is more complex. This is the situation encountered in the Sun. Let us examine it from the photosphere<sup>7</sup> down to the deeper layers of the stellar interior. The first unstable layers we encounter are due to the rise in opacity caused by the ionization of the main components of the stellar gas mixture, i.e. H and He. It increases by several orders of magnitude with temperature and so does  $\nabla_{\text{rad}}$ . At first, convection is very inefficient because of the

<sup>7</sup>The photosphere is usually defined as the point where  $T = T_{\text{eff}}$ .

Inizialmente la convezione è molto inefficiente a causa della bassa densità che si trova appena al di sotto della fotosfera. Pertanto ci troviamo nel regime superadiabatico. Più in basso nello strato convettivo la densità diventa sufficientemente alta per far divenire adiabatico il gradiente. A questo punto l'andamento di  $P = P(T)$  è unicamente determinato da  $\nabla_{\text{ad}}$ . Il fattore più importante è il grado di ionizzazione del gas stellare. Quando è parziale (cioè inferiore ad 1), il gradiente è relativamente basso ( $< 0.4$ ) e raggiunge  $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$  quando il gas è completamente ionizzato (poiché si tratta ora di un puro gas monoatomico). La Fig. 2 mostra il profilo  $\nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{ad}}(P)$  nel caso del Sole. Il limite di ionizzazione segna anche il punto in cui il regime di opacità transisce da legato-libero a libero-libero<sup>8</sup>. A questo punto  $\kappa$  comincia a decrescere all'aumentare di  $T$ , fino al punto in cui  $\nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{rad}}$ , e l'interno stellare ritorna ad essere nuovamente stabile.

Il grosso della zona convettiva è quasi adiabatico, quindi la domanda è: qual è l'influenza dalla teoria della lunghezza di mescolamento? In effetti, il valore ottenuto per  $\nabla$  nella regione superadiabatica determina dove il profilo adiabatico incrocia il limite di alta ionizzazione. Pertanto, visto che  $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$  nelle regioni ad alta ionizzazione, ciò determina la profondità dell'intera zona convettiva. Poiché  $\nabla$  diminuisce all'aumentare di  $\ell$ , e così  $\Lambda$ , si ottiene che, a parità di altri fattori, lo strato convettivo si inspessisce quando la convezione è più efficiente. Per fissare le idee, nel Sole la regione superadiabatica in cima alla zona convettiva rappresenta circa lo 0.05% del raggio totale, ovvero  $\sim 3 \times 10^5$  m. D'altra parte, la parte adiabatica della zona convettiva esterna termina a circa il 73.1% del raggio solare, ovvero è profonda  $\sim 187 \times 10^6$  m. È notevole che una regione che è circa lo 0.01% dell'intera zona convettiva stellare abbia una tale importanza nella descrizione dell'intera struttura stellare.

Infine, un effetto interessante è il fatto che il valore della temperatura effettiva determina anche la profondità della zona convettiva. Per capirlo dobbiamo concentrarci sulla regione a bassa ionizzazione. Innanzitutto ipotizziamo che le

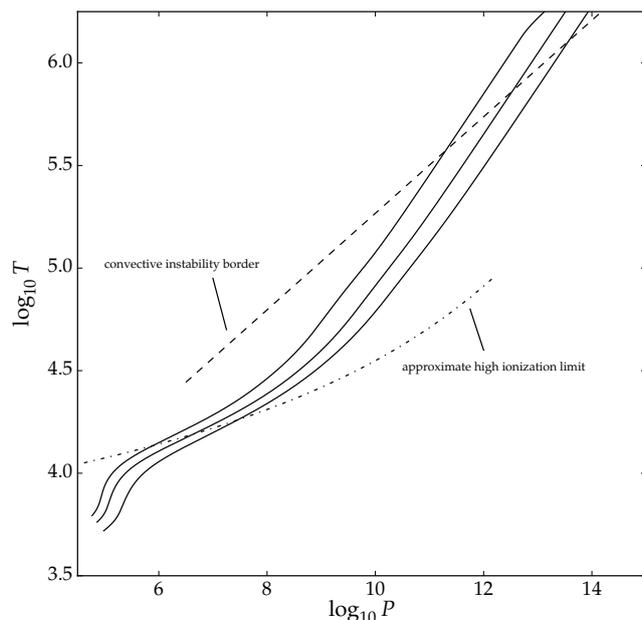
very low density right below the photosphere. Thus we are in a superadiabatic regime. Deeper in the convective envelop, density becomes high enough for the gradient to become adiabatic. At this point, the behaviour of  $P = P(T)$  is fully determined by  $\nabla_{\text{ad}}$ . The most important factor is the degree of ionization of the stellar gas. When it is partial (i.e. lower than 1), the gradient is fairly low ( $< 0.4$ ) and it reaches  $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$  when the gas is fully ionized (since it is now a purely monoatomic gas). The  $\nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{ad}}(P)$  profile for the Sun can be seen in Fig. 2. The ionization limit also mark the point where the opacity regime transits from bound-free to free-free<sup>8</sup>. At this point  $\kappa$  starts to decrease with increasing  $T$ , down to a point where  $\nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{rad}}$ , and the stellar interior becomes dynamically stable once more.

The bulk of the convective zone is quasi-adiabatic, therefore the question is how does the mixing-length theory affect it? In fact the value obtained for  $\nabla$  in the superadiabatic region will determine where the adiabat will cross the high ionization boundary. Subsequently, as  $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$  in high ionization regions, this sets the depth of the entire convective zone. Since  $\nabla$  decreases with increasing  $\ell$ , and so  $\Lambda$ , it shows that everything otherwise equal, the convective envelop becomes broader when convection is more efficient. To fix ideas, in the Sun, the superadiabatic region at the top of the convective zone represent roughly the top 0.05% of the overall radius, i.e.  $\sim 3 \times 10^5$  m. On the other hand the adiabatic part of the external convective zone stops at around 73.1% of the solar radius, i.e.  $\sim 187 \times 10^6$  m deep. It is remarkable that a region that is roughly 0.01% of the entire stellar convective zone have such an importance on the overall description of the overall stellar structure.

Finally an interesting effect is that the value of the effective temperature also determines the depth of the convective zone. To understand this we have to focus on the low ionization region. First, let us assume that in the atmosphere

<sup>8</sup>In estrema semplicità, il primo coinvolge la ionizzazione di atomi neutri ed il secondo è legato all'interazione di uno ione ed un elettrone libero che formano un sistema che può assorbire e riemettere radiazione.

<sup>8</sup>To put it simply, the first one involves ionization of neutral atoms and the second is related to the interaction of an ion and a free electron that form a system that can absorb and emit radiation.

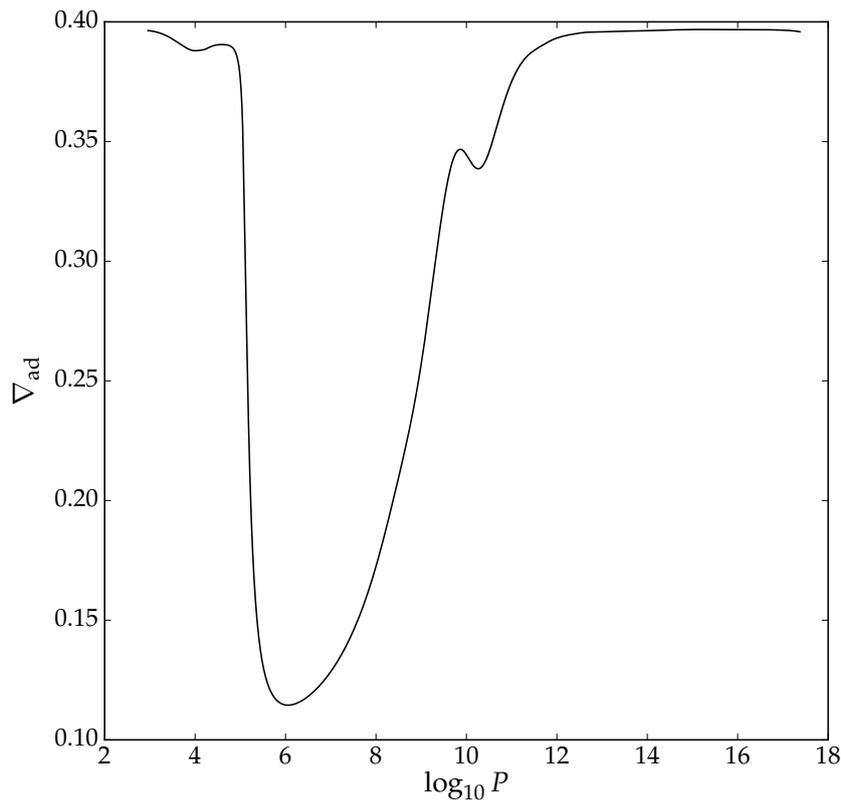


**Figura 1:** Rappresentazione schematica di alcune soluzioni per lo strato convettivo (linee continue) nel piano  $P - T$ . La linea tratteggiata e punteggiata indica la posizione approssimativa della regione di alta ionizzazione (v. anche Fig. 2) al di sopra della quale l'idrogeno e l'elio diventano completamente ionizzati. La linea tratteggiata mostra il confine approssimativo della regione dinamicamente instabile.

*Schematic representation of a few solution for convective envelopes (solid lines) in the  $P - T$  plane. The dot-dashed line marks the approximate location of the high ionization region (see also Fig. 2) above which hydrogen and helium become fully ionized. The dashed line shows the approximate border of the dynamically unstable region.*

fluttuazioni di temperatura nell'atmosfera possono essere espresse da  $\Delta T \simeq T_{\text{eff}} \Delta \tau$ , dove  $\tau$  è la profondità ottica (che è sostanzialmente il rapporto tra la radiazione incidente e quella trasmessa attraverso una qualche sostanza). Ipotizziamo, inoltre, che più è bassa la temperatura maggiore sia la quantità di sostanza (e quindi maggiore la profondità lineare) che si deve attraversare per raggiungere la medesima profondità ottica. Quindi, nel caso di un limite di alta ionizzazione come quello mostrato in Fig. 1, una temperatura inferiore a quella effettiva implica che una certa profondità (relativa ad un punto di partenza comune, detto  $\tau = 0$ ) e quindi una certa temperatura saranno raggiunte ad una profondità fisica inferiore. Perciò la piena ionizzazione, e quindi il regime limite  $\nabla_{\text{ad}} \rightarrow 0.4$ , si verificheranno ad una pressione più alta. Da ciò scaturisce che la profondità della zona convettiva aumenta al diminuire della temperatura effettiva, come si vede dalle tre soluzioni per lo strato convettivo mostrate in Fig. 1. A basse temperature effettive si può raggiungere un limite in cui una stella diventa completamente convettiva, cioè dove questo effetto non permette al profilo adiabatico di raggiungere il punto del piano  $(P, T)$  in cui  $\nabla \simeq \nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{rad}}$ . È da notare che il caso completamente convettivo è importante quando si studiano stelle di massa molto bassa ( $M < 1M_{\odot}$ ) e stadi evolutivi avanzati delle stelle

temperature variations can be written  $\Delta T \simeq T_{\text{eff}} \Delta \tau$ , where  $\tau$  is the optical depth (which is basically the ratio of incident to transmitted radiation power through some medium). Let us further assume that the lower the temperature the more material, and thus the larger linear depth, one needs to travel through to reach the same optical depth. Hence, for a high ionization limit behaving as seen in Fig. 1, a lower than effective temperature means that a given depth (relative to a equal starting point, say  $\tau = 0$ ) and thus temperature will be attained at a lower physical depth. This means that full ionization, and hence the limit regime  $\nabla_{\text{ad}} \rightarrow 0.4$ , will occur at higher pressure. Hence the depth of the convective zone increasing with decreasing effective temperature as seen for the three convective envelope solutions of Fig. 1. A limit can be reached towards low effective temperatures, where the star becomes fully convective, i.e. when this effect does not allow the adiabat to reach the point where in the  $(P, T)$  plane  $\nabla \simeq \nabla_{\text{ad}} = \nabla_{\text{rad}}$ . Note that fully convective stars are relevant for the study of very low-mass stars ( $M < 1M_{\odot}$ ) and advanced evolutionary stages of red-giants stars.



**Figura 2:** Profilo del gradiente adiabatico  $\nabla_{ad}$  nel Sole. Il grosso della variazione avviene nello strato convettivo. Il primo grosso minimo corrisponde alla ionizzazione dell'idrogeno, mentre il secondo, più piccolo, posto dove  $\log_{10} P \approx 11$  è causato dalla ionizzazione dell'elio.

*Profile of the adiabatic gradient  $\nabla_{ad}$  in the Sun. The bulk of the variation occurs in the convective envelope. The first large minimum correspond to the ionization of hydrogen, while the second, smaller one, at  $\log_{10} P \approx 11$  is caused by the ionization of helium.*

giganti rosse.

## Conclusioni e note bibliografiche

In questa breve rassegna abbiamo esposto i tratti essenziali della convezione stellare. Lo scopo è stato di dare un'idea dei principi e delle ipotesi alla base che si usano per descrivere la convezione stellare. Ovviamente non intendevamo fornire una trattazione esaustiva, e rimangono molti spunti per possibili approfondimenti. Innanzitutto è bene citare l'elefante nella stanza: la convezione solare. Abbiamo appena accennato al Sole e solo tramite calcoli di ordine di grandezza. Ovviamente tutto ciò che è stato detto è valido anche per il Sole. Ma il punto è che abbiamo una conoscenza così dettagliata della convezione solare che di fatto essa è un argomento a sé stante. È possibile ottenere informazioni sulla struttura fine della superficie solare tramite l'eliosismologia locale, il che vuol dire che i modelli non devono necessariamente limitarsi a semplici approcci basati sulla teoria della lunghezza di

## Conclusion and bibliographic notes

In this short review, we have covered the basics of stellar convection. The goal was to give an idea of the basic principles and assumptions used to describe stellar convection. Of course we did not aim at an exhaustive review and many doors are left open for further discussions. First let us mention the elephant in the room: solar convection. We have barely evoked the Sun except for order-of-magnitude calculations. Of course all the principles laid down here are valid for the solar case. But the fact is that we know so much about solar convection that it has grown into a topic of its own. We can constrain the fine structure of solar surface convection using local helioseismology, which implies that the models cannot be limited to simple mixing-length theory approaches. The effect of rotation or the coupling of the plasma flow with the solar magnetic field must be taken into account.

mescolamento. L'effetto della rotazione o l'accoppiamento del flusso del plasma con il campo magnetico solare devono essere tenuti in conto.

Se si prende in considerazione la convezione solare su grande scala, ad esempio provando a spiegare i dati eliosismologici locali, scopriamo anche che è necessario affrontare un altro limite della teoria della lunghezza di mescolamento, e cioè il fatto che essa è locale. In precedenza abbiamo accennato al fatto che il criterio di Schwarzschild non tiene conto di preesistenti effetti dinamici. Ci si potrebbe aspettare che sia possibile oltrepassare il punto di stabilità neutra identificato da questo criterio. Per fare un esempio semplice, un elemento di fluido privo di moto sarebbe stabile a questo punto, ma se una particella di fluido dotata di una certa velocità lo oltrepassasse, non si fermerebbe istantaneamente. Si potrebbe anche considerare il criterio di Ledoux, e potrebbe succedere che esso preveda che un certo strato dell'interno stellare sia instabile, anche se il criterio di Schwarzschild lo considera stabile. In tali casi capiterebbero dei processi doppiamente diffusivi, che non sono descritti in modo appropriato nei modelli stellari. Analogamente, il mescolamento indotto dalla rotazione o da onde di gravità interne può aggiungersi a quello dovuto alla convezione. Ad oggi, questi effetti non sono ben descritti, essi sono difficili da separare dalla convezione, e pertanto possono far sorgere dei dubbi sulla precisa topografia delle regioni convettive nell'interno stellare.

Infine è opportuno fornire alcuni riferimenti bibliografici per il lettore curioso che desideri esplorare ulteriormente questo argomento. Una fonte classica nella fisica stellare è il libro di Kippenhahn & Wiegert *Stellar Structure and Evolution* [2]. È sorprendentemente coinciso (nella sua prima edizione) e tuttavia fornisce tutti gli strumenti tecnici necessari per una approfondita comprensione dell'argomento. L'autore non è a conoscenza di una autorevole monografia sulla convezione stellare. Tuttavia esistono diverse buone fonti che si occupano di convezione e della teoria della lunghezza di mescolamento. Il libro di Chandrasekhar *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* [3] è sempre un buon riferimento sulle questioni riguardanti la stabilità. La voluminosa monografia di Monin & Yaglom *Statistical Fluid Mechanics* [4] può apparire sco-

When looking at the larger picture of solar convection, for instance by trying to match global helioseismic data, we also discover that one has to deal with another shortcoming of the mixing-length theory, namely the fact that it is local. First we already mentioned that the Schwarzschild criterion does not take preexisting dynamical effects into account. One might thus expect overshoot beyond the point of neutral stability as given by this criterion. To put things simply, a motionless element of fluid would be stable at this point, but a parcel of fluid crossing this limit with some velocity will not brake immediately. One could also consider the Ledoux criterion and it may happen that it predicts a layer of the stellar interior to be unstable, whereas it is stable according to the Schwarzschild criterion. In such cases double-diffusive processes might occur, which are not properly treated in stellar models. Likewise, mixing induced by rotation or internal gravity waves can blend in with convective mixing. These effects being poorly modelled as of today, they are difficult to disentangle from convection and thus may sometimes cast doubts over the precise topography of convective regions in the stellar interior.

Finally it is in order to provide some references for the curious reader anxious to further explore the subject. A classical reference in stellar physics is the book by Kippenhahn & Wiegert *Stellar Structure and Evolution* [2]. It is remarkably concise (in its first edition) and yet gives all the necessary technical arguments for a proper understanding of the subject. To the knowledge of the author, there is no well-established monograph on stellar convection. However there are many good references treating convection and the mixing-length theory. The book by Chandrasekhar *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* [3] is always a good read for stability-related matters. The large monograph by Monin & Yaglom *Statistical Fluid Mechanics* [4] might look impressive but the style is remarkably clear. As many readers are expected to be Italian-speaking

raggiante, ma il suo stile è sorprendentemente chiaro. Poiché molti lettori dovrebbero essere di lingua italiana, non esitiamo a raccomandare il libro di Rieutord *Une Introduction a la Dynamique des Fluides* [5]. Infine vanno citati gli interessanti articoli di rassegna di Spiegel [7, 8] sul tema generale della convezione stellare, e di Gough [9] che si concentra specificamente sui modelli di lunghezza di mescolamento per le stelle.

one shall not hesitate to recommend the book by Rieutord *Une Introduction a la Dynamique des Fluides* [5]. Finally, we shall mention the interesting reviews by Spiegel [7, 8] on the broad subject of stellar convection, and by Gough [9] focusing more precisely on the stellar mixing-length models.



- [1] F. PAPARELLA: "Convezione in fluidi stratificati: il caso delle dita di sale.", *Ithaca* **8** (2016) 85–95.
- [2] R. KIPPENHAHN & A. WEIGERT: *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag, Berlin (1994).
- [3] S. CHANDRASEKHAR: *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover Publications, New York (1961).
- [4] A. S. MONIN & A. M. YAGLOM: *Statistical fluid mechanics mechanics of turbulence. Vol. 1*. Dover Publications, New York (1971).
- [5] M. RIEUTORD: *Une introduction à la dynamique des fluides*. De Boeck Supérieur, Louvain-la-Neuve (2014).
- [6] E. A. SPIEGEL: "A Generalization of the Mixing-Length Theory of Turbulent Convection", *The Astrophysical Journal* **138** (1963) 216.
- [7] E. A. SPIEGEL: "Convection in Stars: I. Basic Boussinesq Convection", *ARA&A* **9** (1971) 323.
- [8] E. A. SPIEGEL: "Convection in Stars. II. Special Effects", *ARA&A* **10** (1972) 261.
- [9] D. GOUGH: "The current state of stellar mixing-length theory", *Lecture Notes in Physics* **71** (1977) 15.



**Michaël Bazot:** è un ricercatore post-doc presso il Center for Space Science della New York University ad Abu Dhabi.

**Michaël Bazot:** is a postdoc at the Center for Space Science at New York University Abu Dhabi.

