

# Iride

Luigi Martina

Dipartimento di Matematica & Fisica "Ennio De Giorgi" - Università del Salento, INFN Sezione di Lecce

Senza grandi eccezioni, l'arcobaleno sembra essere fonte di emozioni positive: un'esperienza che rallegra, rassicura e ispira il senso del bello. Ma da dove traggono origine queste concezioni? Ed è sempre stato così? E come si sono evolute le interpretazioni scientifiche e quanto hanno inciso nel sentimento comune e nella cultura? Infine, quanto la spiegazione del fenomeno particolare ha fornito alla scienza strumenti e spunti per altri temi di ricerca?

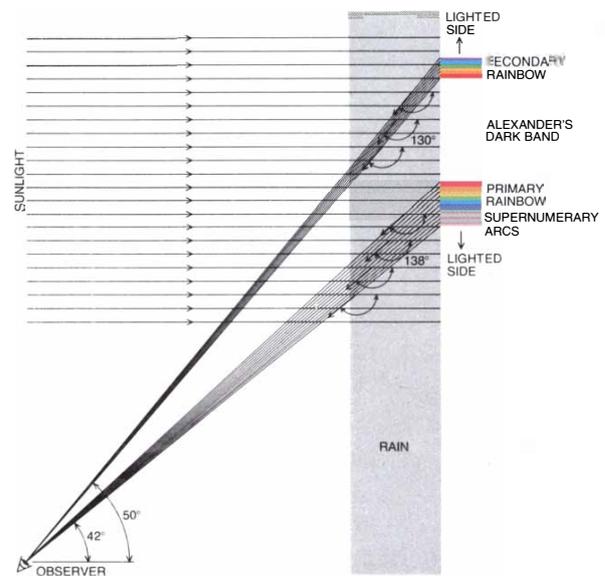


**Figura 1:** Arco primario. Si notino i deboli archi sovrannumerari al di sotto del violetto

διὰ γὰρ τὸ θαυμάζειν οἱ ἄνθρωποι καὶ νῦν  
καὶ τὸ πρῶτον ἠρξάντο φιλοσοφεῖν

In effetti, ora come in origine, gli uomini hanno iniziato a filosofare per la meraviglia.

(Aristotele, *Methaphysica*, A 2, 982b)



**Figura 2:** La geometria e le principali caratteristiche morfologiche dell'arcobaleno.



**Figura 3:** Arco primario e secondario. Gli archi sovrannumerari sono molto deboli, mentre è evidente la bassissima luminosità tra i due archi. Tale banda fu per la prima volta descritta dal filosofo Alessandro di Afrodisia, attorno 200 d.C., nei suoi Commentari alla Meteorologia di Aristotele.

## Introduzione

*If you want the rainbow, you have to deal with the rain.*



**Figura 4:** Una iride senza pioggia, ma dovuta a minute goccioline o cristalli di ghiaccio che formano la nube

(Se vuoi l'arcobaleno devi sopportare la pioggia)

Hazel Grace Lancaster in *The Fault in Our Stars*  
- John Green (2011)

Bambino, ancora impaurito dall'ultimo tuono, mi aggrappavo al vestito di mamma sull'uscio di casa. *Attento alle pozze, non bagnarti i piedi!*, ma il mio pensiero ormai correva lungo il profilo del blu, che saliva sempre più in alto, incurvandosi e sciogliersi assieme al rosso e al verde nel bianco sfolgorante di una nube, che ancora ribolliva in una battaglia tra Dragoni Neri e Candidi Pegasi.

Ancora oggi cerco di immaginare lo stupore di un bimbo (ma anche di un adulto) di 1.000 o 10.000 anni fa, o ancor prima, nelle savane africane, nelle foreste del Borneo o nella steppa asiatica mentre contempla la fine della tempesta con il distendersi tra le nubi di un'iride: cos'è, chi è, dov'è, cosa vuol dire? E' la stessa ricchezza di sfumature dell'arcobaleno fisico che diventano il paradigma delle sue interpretazioni e rappresentazioni. Chiedendo al vostro vicino cosa sappia sull'arcobaleno, molto probabilmente vi risponderà che compare quando piove nello stesso momento in cui il sole splende e che ha sette colori. Le risposte possono sicuramente variare e, a volte, ci possono essere spiegazioni più o meno lunghe sulla rifrazione e/o riflessione dei raggi solari da parte delle gocce di pioggia. In genere l'arcobaleno sembra essere fonte di emozioni positive: un'esperienza che allietta il cuore ed un simbolo di bellezza e pacificazione, anche se esistono significative discordanze

interpretative in alcune mitologie nordiche e mesopotamiche. Molto frequentemente l'immagine è associata a un'idea di varietà nell'unità. Tutte idee che vengono da molto lontano, nel tempo e nello spazio, e culture diverse le hanno declinate in maniera molto differente, ma sempre con quel fascino profondo, che ci ha ispirato ed è molto più dettagliatamente analizzato nell'opera di Lee e Fraser [1].

Certamente, dopo un acquazzone estivo, il fatto sensibile più notevole è l'arco primario, con l'attraente parata dei suoi colori, di intensità e nitidezza piuttosto variabile, ma sempre nello stesso ordine: violetto il più interno, che vira nel blu e gradualmente passa al verde, giallo, arancio e rosso all'esterno. Altre caratteristiche sono più delicate e, in effetti, non sono sempre presenti. Più alto nel cielo può comparire l'arco secondario: più debole in intensità e con l'ordine di esposizione dei colori invertito. I due archi delimitano una regione significativamente più oscura, detta banda di Alessandro. Altra caratteristica è la poco visibile serie di archi, in genere rosa e verdi, alternativamente, nella parte interna del primario. Tuttavia la loro spiegazione ha avuto una grande influenza nello sviluppo di una teoria dell'arcobaleno. La descrizione scientifica più accurata dell'arcobaleno non è però solo un problema di geometria, ma una sua teoria quantitativa soddisfacentemente completa è stata sviluppata, come si vedrà, solo in epoche relativamente recenti [2][3][4]. Essa attinge a tutto ciò che sappiamo sulla natura della luce, tramite la manifestazione delle sue proprietà ondulatorie, quali l'interferenza, la diffrazione e la polarizzazione, ma anche ricorrendo alle sue caratteristiche particellari, quali la quantità di moto trasportata da un fascio di luce. Per tale trattazione sono quindi necessari i più potenti mezzi della fisica matematica, tanto che l'arcobaleno è paradigmatico nella costruzione di vari modelli, quali la determinazione della distribuzione della luce nel cielo in ottica atmosferica [5][6], quanto nella descrizione di analoghi fenomeni di diffusione in fisica atomica e nucleare [7] [8].



## Il Ponte di Dio

Negli ultimi esempi della sezione precedente diventa evidente l'afflato spirituale-religioso che si vuole trasmettere, anche se non necessariamente esso è incanalato nelle espressioni specifiche dei vari credi storicamente sviluppati. Quindi l'origine di questo connubio tra il fenomeno meteorologico e il suo significato metafisico deve essere ricondotto, almeno per quanto riguarda la tradizione giudaico-cristiana, al passo biblico [9]

*Dio disse:*

*Questo è il segno dell'alleanza, che io pongo tra me e voi e ogni essere vivente che è con voi, per tutte le generazioni future.*

*Pongo il mio arco sulle nubi, perché sia il segno dell'alleanza tra me e la terra.*

*Quando ammasserò le nubi sulla terra e apparirà l'arco sulle nubi,*

*ricorderò la mia alleanza che è tra me e voi e ogni essere che vive in ogni carne, e non ci saranno più le acque per il diluvio, per distruggere ogni carne.*

*L'arco sarà sulle nubi, e io lo guarderò per ricordare l'alleanza eterna tra Dio e ogni essere che vive in ogni carne che è sulla terra.*

*Disse Dio a Noé: Questo è il segno dell'alleanza che io ho stabilito tra me e ogni carne che è sulla terra. (Gen. 8, 12-17)*



**Figura 9:** Noé e i suoi tre figli in piedi, a bocca aperta e addirittura contorti dalla meraviglia, osservano l'arcobaleno creato da Dio come segno di alleanza. Dal codice denominato Vienna Genesis (Österreichische Nationalbibliothek, cod. theol. gr. 31, Vienna, Austria). È il più antico codice biblico illustrato che si sia ben preservato. Si tratta di un frammento della versione greca dei Settanta, probabilmente redatto in Siria nella prima metà del VI secolo.

Questa speciale relazione tra arco e divino è ribadita in vari passi dell'Antico Testamento: *Osserva l'arcobaleno e benedici colui che lo ha fatto: bello nel suo splendore! Avvolge il cielo con un cerchio di gloria, lo hanno teso le mani dell'Altissimo. (Sir. 42,11-12),*

*... Come sole sfolgorante sul tempio dell'Altissimo, come arcobaleno splendente fra nubi di gloria. (Sir. 40,5).*

e infine

*... Simile a quello dell'arcobaleno fra le nubi in un giorno di pioggia. Così percepii in visione la gloria del Signore. Quando la vidi, caddi con la faccia a terra e udii la voce di uno che parlava. (Ez 1,28).*

Nell'Apocalisse il simbolo diventa una specifica caratteristica del divino e l'annuncio del regno di Dio:

*Colui che stava seduto era simile nell'aspetto a diaspro e cornalina. Un arcobaleno simile nell'aspetto a smeraldo avvolgeva il trono. (Ap 4,3)*

*E vidi un altro angelo, possente, discendere dal cielo, avvolto in una nube; l'arcobaleno era sul suo capo e il suo volto era come il sole e le sue gambe come colonne di fuoco. (Ap 10,1)*

Tuttavia, nella Bibbia non vi si trova alcun riferimento circa i colori dell'arcobaleno o al numero di essi, ma ovviamente permea gran parte della elaborazione teologica successiva. Certamente le citazioni apocalittiche possono spiegare il ruolo piuttosto popolare dell'arcobaleno nella pittura tardo gotica. Nell'arte romanica è possibile associare l'arcobaleno con la mandorla, o alone, che circonda Dio o un santo. Nell'arte gotica Cristo è spesso raffigurato seduto nella mandorla iridescente. Il più celebre esempio si ritrova nel Giudizio Universale di Giotto, nel quale il decoro del trono del Signore costituisce un tutt'uno con la Maiestas Domini. Pertanto tutti i personaggi sono rivolti verso il cerchio di luce iridata nel quale siede Gesù, che risulta il centro focale del dipinto e che con un semplice gesto della mano manifesta il suo giudizio, conseguenziale alla libera scelta dell'uomo. Sette secoli più tardi la scena è citata nel *Decameron* di Pasolini, dove ancora la mandorla, ora solo luminosa, racchiude la divinità e la separa dagli altri personaggi. Ma la peculiare religiosità di Pasolini, sostituisce Cristo con la Madonna (Silvana Mangano) col Bambino: il senso del giudizio si sostituisce con quello della pietà.



**Figura 10:** Giotto da Bondone: *Giudizio Universale*, Cappella degli Scrovegni, Padova

Probabilmente il più moderno e spettacolare riferimento al significato mistico dell'arcobaleno si ritrova nelle vetrate realizzate da J. Vila-Grau alla basilica della Sagrada Família di Gaudí a Barcellona.



**Figura 11:** La luce che penetra dalle vetrate della Sagrada Família si diffonde nelle navate di destra, con colorazioni che seguono l'ordine dell'iride.

## Il Ponte del Tempo

*Come si volgon per tenera nube  
due archi paralleli e concolori,  
quando Iunone a sua ancella iube,*

*nascendo di quel d'entro quel di fori,  
a guisa del parlar di quella vaga  
ch' amor consunse come sol vapori;*

*e fanno qui la gente esser presaga,  
per lo patto che Dio con Noé puose,  
del mondo che già mai più non s' allaga:*

*così di quelle sempiternè rose  
volgiensi circa noi le due ghirlande,  
e sì l'estrema a l'intima rispuose.*

(Dante: *La Divina Commedia*, *Paradiso* XII, 10-21)

Come abbiamo visto l'arcobaleno è un ponte non solo tra gli uomini e Dio, ma inevitabilmente anche tra culture diverse: artisti e scienziati si sono sfidati a lungo per darne descrizioni diverse, se non a volte incompatibili. La conoscenza scientifica non sempre è stata accolta senza riserve. Goethe scrisse che l'analisi dei colori dell'arcobaleno data da Newton *paralizzerebbe il cuore della Natura*. Un sentimento simile fu espresso da J. Keats in *Lamia* del 1820. Nella *Teoria del colore* [10] la critica goethiana a Newton sottolineava la mancanza della fondamentale relazione tra luce e occhio dell'osservatore, che è la sede prima di trasformazione e assimilazione delle qualità luminose. Tale aspetto, per così dire, psicologico della visione è l'oggetto di maggiore interesse per il poeta. Di conseguenza la sua ricerca conduce ad una prospettiva ben diversa rispetto a quella quantitativa. Eppure gli scienziati che hanno contribuito alla la teoria dell'arcobaleno non erano affatto insensibili alla sua bellezza. D'altro canto Newton ebbe ammiratori anche tra gli artisti, in particolare J M W Turner, J F Overbeck e J Costable, che dipinsero arcobaleni con occhio fenomenologico, giudicandolo non solo il più bel fenomeno luminoso, ma un punto di partenza per lo sviluppo di una teoria del colore applicabile all'arte.

Il primo tentativo di fornire una spiegazione razionale dell'arcobaleno fu, probabilmente quella di Aristotele nel libro III della *Meteorologia*. Egli



**Figura 12:** P. P. Rubens: *Panorama con Arcobaleno*, 1636 circa, *The Wallace Collection, Londra*. L'arcobaleno è piuttosto innaturale come angolazione, anche se molto accurato per altri dettagli osservativi. Rubens abbandona i temi mistici per sottolineare la grande bellezza del creato e, allo stesso tempo, incoronare la semplicità della vita rurale. Certamente studiò in dettaglio il fenomeno naturale, ma lo ha trattato come un elemento puramente allegorico e compositivo

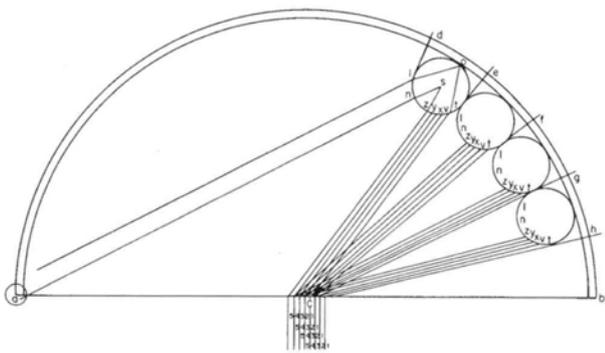
propose che l'arcobaleno fosse una speciale forma di riflessione della luce da parte delle nubi. Infatti la luce viene riflessa ad un angolo fissato, dando luogo ad un cono circolare di raggi. In questo modo Aristotele spiegò correttamente la forma circolare dell'arco, facendo comprendere inoltre che non si tratta di un oggetto con una ben definita posizione e dimensione, ma piuttosto un insieme di direzioni, lungo le quali la luce è fortemente diffusa verso gli occhi dell'osservatore. Quindi perchè l'iride si possa osservare deve esistere una precisa relazione tra la posizione relativa del Sole con le nubi e l'osservatore. Lo studio fu inoltre l'occasione per l'elaborazione di una prima teoria dei colori. Qui ci basti ricordare che sul numero dei colori dell'arcobaleno egli affermò essere tre: rosso, verde e blu (talvolta menziona il giallo) e la loro origine è fatta risalire alla mescolanza di luce bianca (omogenea e pura) e di buio. Ma nel complesso la scienza classica non era particolarmente interessata all'ottica, sebbene Euclide scrisse una *Ottica*, di Archimede si sa che scrisse una *Catottica*, e Tolomeo nella sua *Ottica* descrisse quantitativamente il fenomeno della rifrazione [11]. In effetti i fenomeni ottici dipendono fortemente dallo stato di illuminazione dell'oggetto, dalle condizioni di osservazione, dalla interposizione di mezzi diversi lungo il cammino ottico. Tutto in contrasto

con la ricerca di una verità ultima delle cose e quindi non un argomento consono agli interessi del filosofo. Solo il passaggio attraverso la cultura araba ed un nuovo interesse verso la natura e le tecniche permise, durante il tardo Medioevo, il rifiorire di interessi e metodi di carattere più osservativo della Natura [12].

Siamo di fronte ad un viaggio nel tempo di un corpo di osservazioni e conoscenze, che passa da Archimede agli arabi, poi a Witelo ( $\approx 1230$ ,  $\approx 1280$ ) e a Ruggero Bacone ( $\approx 1214$ ,  $1294$ ) [2][12]. In particolare un importante sviluppo all'ottica fu dato da al-Kindi, il principale esponente della scuola aristotelica araba (801 - 873) e Ibn al-Haytham (più noto come Alhazem, Bassora, 965 circa - Il Cairo, 1039). Quest'ultimo rivoluzionò il campo con i suoi studi sulla fisiologia dell'occhio, l'invenzione della camera oscura e la prima descrizione teorica della rifrazione. Infine sostenne l'abbandono totale del meccanismo di visione degli  $\epsilon\iota\delta\omega\lambda\alpha$  aristotelici. In particolare compose un *Trattato sull'arcobaleno e l'alone* nel quale riporta l'osservazione *Poiché il loro soggetto è l'aria, la loro investigazione deve essere fisica, e essendo la loro forma circolare, devono essere studiate matematicamente*, che risuonano in qualche modo con le idee galileiane. Nel suo trattato *Ottica* [13] tratta il fenomeno della rifrazione con grande dettaglio, riportando misure delle relazioni angolari sia all'interfaccia aria-acqua, che aria-vetro. Realizzò anche il primo studio di come un fascio di luce viene deflesso da un globo di vetro riempito di acqua. Tuttavia non sembra che egli abbia collegato questo esperimento con un modello di goccia illuminata dal Sole. Queste opere ebbero difficoltosa diffusione anche all'interno del mondo islamico, ma tramite l'opera di traduttori sia dal greco che dall'arabo, per tutti si ricordi Gerardo da Cremona (Cremona 1114, Toledo 1187), gli eruditi europei recuperarono entusiasmo per lo studio dei fenomeni naturali, tra i quali l'arcobaleno occupava un posto non secondario, divenendo un esempio sul quale provare e confrontare teorie ottiche. Il tortuoso cammino che fu percorso fino ad una trattazione moderna dell'argomento suggerisce come le credenze e le personalità possono giocare un ruolo cruciale nello sviluppo delle Scienze. Da questo punto di vista l'arcobaleno costituisce effettivamente un ponte che lega epoche differenti.

Ispirato dagli studi di Witelo [13], attorno al 1266 Ruggero Bacone misurò l'angolo di vista dell'arco primario rispetto alla luce solare incidente: circa  $42^\circ$ . Il secondario si trova a  $8^\circ$  più in alto. Attualmente è più comune riferirsi ad essi in termini di *angoli di deflessione* del fascio luminoso, quindi  $138^\circ$  e  $130^\circ$  rispettivamente.

Nel 1304 nel *De iride* il monaco e teologo Teodorico di Friburgo suggerì che ogni singola goccia di pioggia contribuisce alla formazione dell'arcobaleno, mostrando sperimentalmente che poteva riprodurlo tramite una bottiglia sferica riempita di acqua. Mostrò che la luce del primario aveva subito una sola riflessione interna, mentre il secondario due. Notando inoltre che lungo ogni direzione di vista solo un colore alla volta può essere osservato, concluse che ciascuno dei colori dell'iride proviene da un differente insieme di gocce di pioggia. Tuttavia, pose le gocce su una supposta sfera meteorologica. Chi volesse



**Figura 13:** Il modello di arcobaleno di Teodorico di Friburgo

oggi riprodurre a livello scolastico l'esperienza di Teodorico potrebbe seguire le indicazioni di R Bagnolesi [15]. Gran parte di questo lavoro dovette essere riscoperto più volte nei trecento anni successivi, con un lento ma progressivo arricchimento di osservazioni. In particolare si ricordino quelle, allo stesso tempo scientifiche e pittoriche, di Leonardo da Vinci [1][2][11][12][14][17]. Il problema teorico originario non fu mai completamente abbandonato, ma ad intermittenza ricevette significativi contributi alla sua soluzione da parte di notevoli scienziati, tra i quali il matematico messinese Francesco Maurolico (1494 - 1575), noto per i calcoli di geometria delle masse, Marco Antonio De Dominis (1566-1624) (*De radiis visus et lucis* [19]), unica, e sorprendente citazione di Newton in *Optiks*, e J. Kepler (1571

- 1630) [14][16]. Il primo introdusse in *Photismi* [18] una teoria dell'arcobaleno basata solo su riflessioni multiple all'interno di una goccia d'acqua (evidentemente Alhazen e Teodorico erano stati dimenticati). Le gocce per produrre l'arco dovevano però trovarsi su un preciso piano. Chiaramente il modello non poteva che condurre ad artificiose spiegazioni sul valore degli angoli di deflessione e sulla teoria dei colori (che per Maurolico erano sette). Keplero, nei suoi studi di ottica raccolti in *Paralipomena ad Vitellionem* prima e in *Dioptrice* poi [20], era arrivato ad una buona conoscenza quantitativa della rifrazione. I suoi risultati erano noti a Galileo, che li utilizzò nel *Nuncius Sidereus* [21] per la costruzione del cannocchiale. Lo spirito misticheggiante di Keplero lo condusse a formulare una spiegazione dell'arcobaleno basata sull'idea che solo i raggi luminosi tangenti alla superficie possono assumere colori prismatici. Usando una forma approssimata della legge di rifrazione calcolò l'angolo di deflessione dei raggi solari che formano l'arco primario a  $135^\circ$ , che è abbastanza vicino al vero, ma comunque ancora insoddisfacente per lo stesso Keplero.

Con Cartesio [22] *l'arcobaleno è una tale notevole meraviglia della Natura . . . che non riuscivo a scegliere un esempio più adatto per l'applicazione del mio metodo.*

Ovviamente si riferiva al metodo sviluppato nel *Discours de la méthodes* e da lui applicato nel trattatello *De l'arc-en-ciel* (1637), facente parte de *La dioptrique*. Il punto chiave è un enunciato corretto della legge della rifrazione in termini di costanza del rapporto dei seno dell'angolo di incidenza con quello di rifrazione.

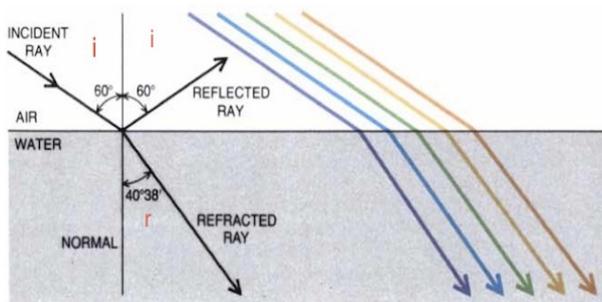
Rilevando che solo le gocce che si trovano in una ben definita relazione angolare con l'osservatore determinano il colore che eventualmente si può vedere, fanno superare tutte le difficoltà nella comprensione della geometria dell'arcobaleno, quali erano ancora in Teodorico e in Maurolico. Ma il punto cruciale ancora non è raggiunto, in quanto raggi luminosi che incidono sulla sfera d'acqua in punti differenti debbono essere difusi ad angoli differenti, quindi cosa hanno di speciale gli angoli di  $42^\circ$  e  $50^\circ$  e i loro vicini? Cartesio intraprende una lunga serie di calcoli che gli permettono di studiare i cammini di molti raggi paralleli che intersecano una sfera e scrive

## La legge di rifrazione

Riflessione e rifrazione all'interfaccia tra aria e acqua sono i fenomeni fondamentali nella creazione di un arcobaleno. Nella riflessione l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione. Nella rifrazione l'angolo del raggio trasmesso è determinata dalle proprietà del mezzo, in quanto caratterizzati da suo indice di rifrazione. La luce entrante in un mezzo con indice più alto è piegato verso l'asse normale alla superficie. La formulazione matematica dovuta a Cartesio (ma già ottenuta da Snell) è

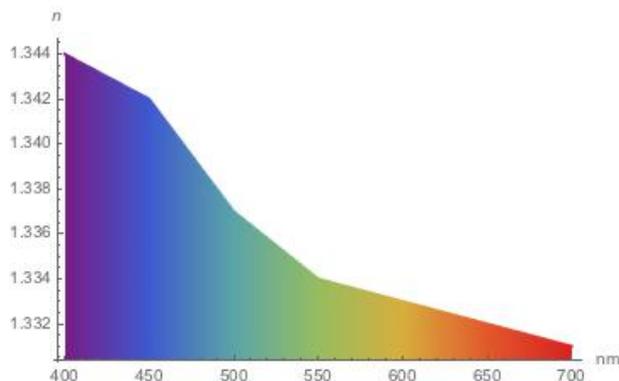
$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

dove  $n$  è chiamato *indice di rifrazione relativo* ai due mezzi. Esso può essere espresso come rapporto tra due indici *assoluti*, cioè riferentesi alla rifrazione della luce dal vuoto ad un dato mezzo. Nel passaggio aria - acqua  $n_{A \rightarrow Acq} \approx 1.33$ , mentre nell'attraversamento inverso  $n_{Acq \rightarrow A} = \frac{1}{n_{A \rightarrow Acq}} \approx 0.75$ .



**Figura 14:** La rifrazione della luce tra aria e acqua. Poiché l'indice di rifrazione diminuisce nel passare dal violetto al rosso (vedi Figura 14), i raggi del primo colore sono più deviati di quelli del secondo.

che molti più possono essere visti entro un angolo tra  $41^\circ$  e  $42^\circ$  di quanti ad angoli minori, e che nessuno può essere visto ad angoli maggiori. Analogo calcolo esegue per l'arco secondario, trovando l'angolo di visuale rispetto all'asse antisolare tra  $51^\circ$  e  $52^\circ$ . Oggi sappiamo che T. Harriot aveva eseguito calcoli simili un decennio prima, ma non aveva mai pubblicato nulla in proposito [2]: una vicenda molto simile a quella di Snell, che



**Figura 15:** La dipendenza dell'indice di rifrazione dell'acqua dalla lunghezza d'onda nella regione del visibile. Valori dell'indice di rifrazione e della sua componente complessa su uno spettro molto ampio si possono ricavare in <http://refractiveindex.info>

può far riflettere sulla dinamica delle scoperte scientifiche e la loro attribuzione.

I lunghi e faticosi calcoli furono grandemente semplificati da Newton, grazie al suo potente metodo di calcolo dei massimi e minimi di una funzione. Come si può osservare dalle Figure 15 - 17 l'angolo di deflessione (cioè l'angolo tra le semirette definite dal fascio incidente e da quello rifratto) di un raggio che subisce  $p$  riflessioni interne ha il valore

$$D_p = 2i - 2(p + 1)r + p\pi.$$

Chiaramente un osservatore con il Sole alle spalle vedrà una maggiore intensità luminosa se esistono famiglie di raggi solari, che subiscono pressoché una medesima deflessione  $\frac{\pi}{2} \leq D_p \pmod{2\pi} \leq \frac{3\pi}{2}$ . In altri termini la funzione  $D_p$  deve variare poco attorno a certi valori dell'angolo di incidenza sulla goccia, il che avviene nei punti di massimo o di minimo per  $D_p$ . In corrispondenza di questi angoli si concentra più luce che altrove e, per questo motivo, le superfici (coni) da essi definite vengono chiamate *caustiche*. Una familiare caustica è la brillante curva cuspidale che si forma in una tazza, quando la luce del sole si riflette sulle sue pareti interne. L'osservatore dell'arcobaleno vedrà questa maggiore luminosità a certi angoli di vista  $V_p$ , che per  $p = 1, 2$  sono  $V_1 = 4r - 2i$  e  $V_2 = 2i - 6r + \pi$ , come si ricava dalle Figure 19-20.

Se la goccia è una sfera, allora dalla Figura 18 è facile vedere che l'angolo di incidenza di un

## La dispersione della luce

Newton [23] scoprì che raggi di colore diverso sono differientemente rifrangibili, propagandosi da un mezzo all'altro. In termini moderni la *dispersione cromatica* è causata dalla dipendenza dell'indice di rifrazione dei mezzi ottici dal colore della luce. Dalla legge di rifrazione si ricava che, a parità di angolo di incidenza  $i$ , l'angolo di rifrazione  $r$  diminuisce all'aumentare dell'indice  $n$ .

Nell'ambito della teoria ondulatoria, la nozione di colore viene sostituita dalla grandezza fisica *lunghezza d'onda*  $\lambda$  o, tramite la *legge di dispersione della luce nel vuoto*, dalla frequenza  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ,  $c =$  velocità della luce.

Con Maxwell, l'ottica della luce visibile rientra tra i fenomeni elettromagnetici, che si collocano nell'intervallo di lunghezze d'onda  $\sim 400 - \sim 700$  nm dello spettro (Figura 16).

L'indice di rifrazione assoluto di un mezzo è  $n(\lambda) = \frac{c}{v} = \frac{\text{velocità della luce}}{\text{velocità della luce nel mezzo}}$ , che è detta *la legge di dispersione nel mezzo*. Questa funzione dipende sensibilmente dalle proprietà molecolari del mezzo, spesso con una serie di *picchi di risonanza*. Formule (di Sellmeier) semi-empiriche per  $n(\lambda)$  si derivano abbastanza semplicemente [25], ma calcoli *ab initio* richiedono l'uso della *Meccanica Quantistica*

raggio luminoso su di essa è dato da  $\sin i = \frac{b}{R}$ , detto parametro d'urto essendo  $0 \leq b \leq R$  la distanza del punto di incidenza dall'asse della sfera ed  $R$  il suo raggio. Dalla legge di rifrazione si ha che l'angolo di vista  $V_1$  è legato al parametro d'urto dalla relazione

$$V_1(b) = 4 \arcsin \frac{b}{nR} - 2 \arcsin \frac{b}{R}.$$

Lo studio di questa funzione può essere condotto con i metodi abituali dell'analisi, riconoscendo che essa ha un solo massimo assoluto in

$$\frac{b_{max}}{R} = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}},$$

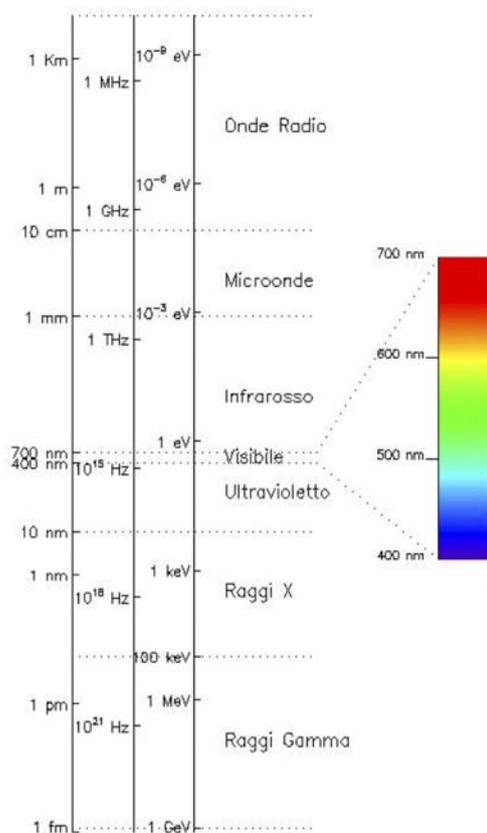


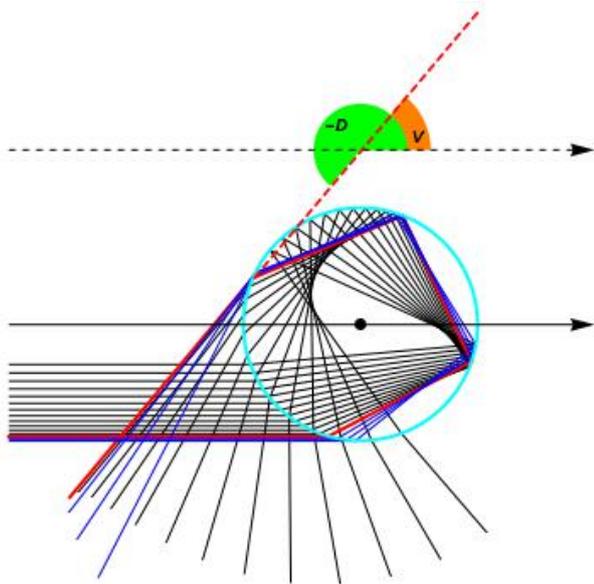
Figura 16: Lo spettro della radiazione elettromagnetica.

che per l'indice di rifrazione dell'acqua  $n \approx 1.33$  fornisce il valore dell'angolo di vista  $V_{1max} = 42.5^\circ$ . Calcoli simili per l'arco secondario conducono a  $V_{2max} = 50^\circ$ .

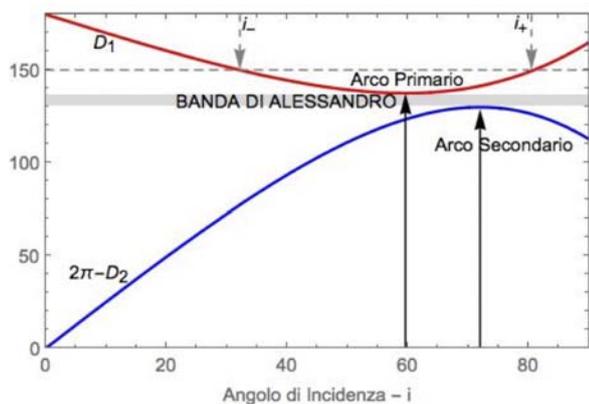
Inoltre, poiché non ci sono raggi che, subendo 1 o 2 riflessioni interne, si diffondono tra  $V_{1max}$  e  $V_{2max}$ , anche la banda oscura di Alessandro viene spiegata (Figura 21), essendo così delimitata dai bordi oscuri di due caustiche. In generale l'intensità luminosa cresce continuamente da una parte di una caustica, per poi cadere bruscamente.

In linea di principio si potrebbero trovare infiniti arcobaleni, ma la loro intensità decresce esponenzialmente, su una base di circa 0.02, con il numero delle riflessioni interne. Inoltre può accadere, come ad esempio per  $p = 3, 4$ , che relativamente alla direzione di incidenza l'angolo di diffusione sia piccolo ( $-\frac{\pi}{2} \leq D_p \pmod{2\pi} \leq \frac{\pi}{2}$ ), pertanto l'arcobaleno circonda il Sole, rendendolo ancora più difficilmente visibile (<http://www.atoptics.co.uk/rainbows/orders.htm>).





**Figura 21:** La costruzione di Cartesio per la determinazione dell'arco secondario



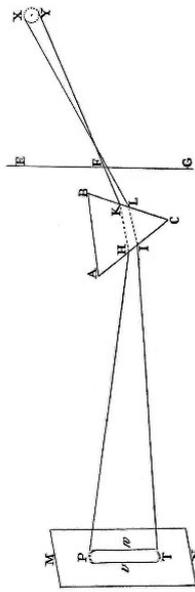
**Figura 22:** Gli angoli di deflessione di un raggio incidente sulla goccia con angolo  $i$ . L'angolo di deflessione per il secondario è stato traslato di  $2\pi$ . Gli angoli di deflessione assumono un minimo/massimo in corrispondenza della formazione degli arcobaleni primario/secondario, facendo convergere infiniti raggi incidenti in quelle particolari direzioni, dette caustiche. Si osservi che nessun raggio del primario o del secondario è deflesso nell'intervallo  $129^\circ - 137^\circ$ , dando luogo alla banda di Alessandro. Infine  $i_-$ ,  $i_+$  sono una coppia di angoli di incidenza che hanno lo stesso angolo di deflessione: i corrispondenti raggi si propagano parallelamente.

appaiono evidenti nell'approccio newtoniano: 1) i colori spettrali (o primari) sono una caratteristica continua della luce, essi non possono essere ridotti ulteriormente; 2) i colori primari possono essere separati usando la rifrazione della luce, ad esempio usando un prisma



**Figura 23:** P. P. Rubens: *Giunone e Argo*, 1610-11, Colonia, Wallraf - Richartz Museum. Di ritorno dall'Italia il giovane Rubens compone un'opera pedagogica, applicando la teoria del colore di Aristotele alla pittura barocca. La dea è aiutata dalla sua serva Iride, nel ritrovare i cento occhi del volto del fedele guardiano Argo, ucciso da Mercurio, e collocarli sulla coda del pavone. Iride è rappresentata sia come fenomeno meteorologico che personificata.

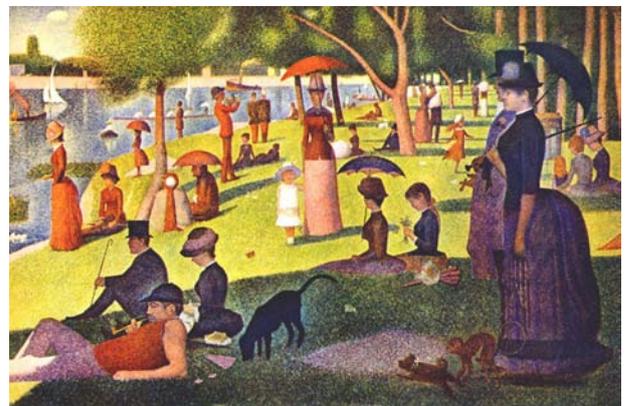
costituito da materiale dispersivo (quindi anche da una goccia di pioggia), ma non possono essere ulteriormente mutati da riflessioni o rifrazioni; 3) i colori sono infiniti, anche se per una ipotetica relazione con le strutture musicali Newton ne sottolinea sette: rosso, arancio, giallo, verde, blu, violetto-porpora e indaco, 4) da due o più colori primari si possono ottenere colori composti, che non appartengono allo spettro, in particolare il bianco. Tutte proprietà in netto contrasto con la fisica aristotelica, che applicate direttamente al caso dell'arcobaleno, non solo ne spiegano l'origine, ma danno una ragione della larghezza angolare degli archi. Infatti usando i due diversi valori (Figura 15) dell'indice di rifrazione per il violetto (il colore più deflesso) e quello per il rosso (il meno deflesso) in  $V_1$ , si ottiene la larghezza angolare  $\Delta D_1 = 1^\circ 45'$ . Ammettendo  $\frac{1}{2}^\circ$  per il diametro apparente del Sole, Newton ottenne  $\hat{\Delta}D_1 = 2^\circ 15'$  per il primario, in accordo con le sue osservazioni. Naturalmente, questa è l'apertura angolare delle caustiche di differenti colori che emanano da una singola goccia. Quindi un singolo osservatore viene raggiunto da caustiche di colore diverso provenienti da gocce diverse, viste nell'apertura angolare calcolata sopra. L'ar-



**Figura 24:** Disegno di Newton che illustra la scoperta della scomposizione spettrale della luce (*Opticks, Part II, prop. III Prob. I.*)

cobaleno ha molto di un mosaico, le tessere del quale sono una miriade di goccioline, che riflettono e rifrangono la luce. Questo fatto è molto ben visibile se si realizza un arcobaleno casalingo con lo spruzzo di un irrigatore da giardino. Una immagine così costituita si dice che è ottenuta per *mescolamento additivo di colori*. Esso si può realizzare 1) sovrapponendo luci di colore diverso, 2) colorando piccole aree giustapposte con colori diversi. Esattamente la procedura adottata negli schermi televisivi o dei computer. Il colore che si ottiene è sempre *più brillante* dei suoi componenti, perché l'occhio, appunto, somma la brillantezza delle diverse sorgenti di luce. A complemento, c'è il cosiddetto *mescolamento sottrattivo*, l'unico concretamente realizzabile secondo Aristotele attraverso la miscela di pigmenti diversi. In questo caso, ogni mistura di colori è *più scura* dei suoi componenti e alla fine, facilmente, si raggiunge il nero. Osservazioni queste che hanno enormemente influenzato il dibattito sulla costruzione di una moderna teoria del colore. Per oltre un secolo, dalla comparsa dell'*Opticks*, artisti e

teorici dell'arte hanno entusiasticamente accolto, appassionatamente respinto, dettagliatamente criticato e, talvolta, incompreso le provocatorie idee di Newton sui colori [26]. Ma il progresso più significativo non vennero dalle polemiche, né da eleganti schemi pittorici, ma dal lavoro di fisici e fisiologi, quali Thomas Young (1773-1829), Hermann von Helmholtz (1821-94) e James Clerk Maxwell (1831-79). Essi iniziarono a riconciliare l'esperienza visiva artistica [27], ma anche quotidiana, con il modello fisico della luce e a formare quella comprensione che abbiamo oggi della percezione dei colori [28]. Ma non ci soffermiamo di più su un argomento, che ci porterebbe troppo lontano.



**Figura 25:** G Seurat (1859-91): *Una domenica pomeriggio alla Grande Jatte* (1884-86), Art Institute of Chicago. Seurat, teorizzò e esercitò la "peinture optique", ridefinendo scientificamente il suo obiettivo artistico al fine di ottenere particolari effetti ottici. La sua arte è una felice combinazione di premeditata costruzione accademica e di Impressionismo. In questa opera Seurat sviluppa completamente la tecnica del puntinismo, che consiste nel dipingere una serie di piccole macchie, brevi tratti e pennellate separate. Differentemente dalla tecnica della stampa a colori (piccoli punti di colore, regolari in dimensione e posizione), quella di Seurat crea una complessa miscela di tratti di vario colore, dimensione ( $\approx 2\text{ mm}$ ) e direzione. Tanto che ogni parte del dipinto sembra vibrare o debolmente luccicare. E' ipotizzabile che in questo intervenga non solo il fenomeno della giustapposizione additiva, ma che si instauri un disequilibrio nella risoluzione dei tratti di colore, a causa della differente acuità visiva tra centro e periferia dell'occhio umano.

## Il Ponte di Onde

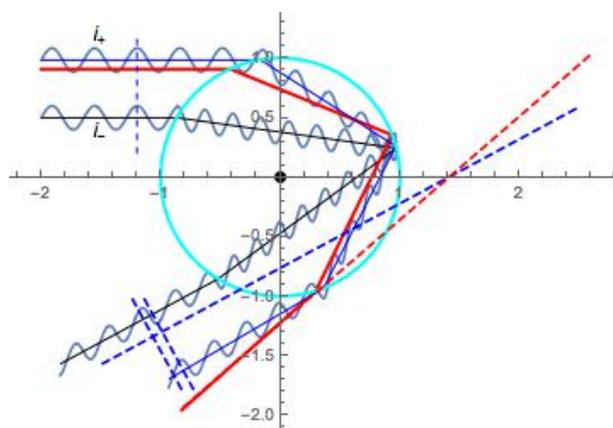
Newton non procedette nella direzione di una teoria ondulatoria della luce propugnata, invece, da Huygens [29], ma confermata definitivamente solo dall'esperienza della doppia fenditura di Young [30] [31]. Da un punto di vista ondulatorio la luce può essere descritta da una combinazione (sovrapposizione) lineare di onde sinusoidali. A ciascuna lunghezza d'onda, cioè la distanza tra due creste consecutive (o comunque tra due punti con la stessa fase oscillatoria), corrisponde un singolo colore spettrale. Come si evidenzia nella Figura 16, le lunghezze d'onda della luce visibile sono comprese tra 400 nm (violetto) e 700 nm (rosso), con una buona dose di approssimazione. Misure di queste lunghezze furono portate ad una grande accuratezza solo dopo l'invenzione dello spettroscopio e del reticolo di diffrazione da parte di J Fraunhofer negli anni 1814-20 [32].

D'altra parte, con l'esperimento della doppia fenditura egli aveva chiaramente dimostrato che la luce subisce interferenza. Questo fenomeno, grazie alla sovrapposizione di onde in relazione di fase costante, consiste nel rafforzamento delle creste, oppure la loro cancellazione, con la formazione di figure regolari di frange luminose alternate da regioni di buio. Young dimostrò l'interferenza di onde di luce, facendo passare un singolo fascio di luce monocromatica attraverso due fori in uno schermo e osservando le frange prodotte al di là dello stesso schermo.

Ma, in particolare, proprio applicando il modello ondulatorio della luce [31] egli riuscì a dare una spiegazione degli archi sovrannumerari. Questi sono effetti di complemento all'arco primario, ai quali nell'arte e nel mito, non ci si era molto interessati (come del resto all'arco secondario o agli archi monocolori). Rare descrizioni di questi fenomeni risalgono a Witelo e all'attento abate Teodorico di Friburgo.

Young osservò che le coppie di raggi di luce ( $i_-$ ,  $i_+$  nella Figura 21), diffusi nella stessa direzione  $D_1$  da una goccia di pioggia, sono equivalenti ai due raggi prodotti dai due fori del suo esperimento originario. Ad angoli molto vicini a quello della caustica i due cammini differiscono di molto poco, così i due raggi interferiscono costruttivamente, perché i contributi al campo luminoso si sommano. Al crescere della diffe-

renza angolare, i due raggi seguono cammini di lunghezza ben diversa. Quando la differenza di cammino ottico uguaglia la metà della lunghezza d'onda, l'interferenza è completamente distruttiva, in quanto ad ogni cresta in uno dei raggi corrisponde una valle nell'altro, producendo un campo totale nullo. Ad angoli ancora maggiori i due raggi riprendono a rinforzarsi di nuovo, fino a raggiungere il massimo di intensità per una differenza di cammino pari ad una lunghezza d'onda. Il risultato è una periodica oscillazione angolare dell'intensità della luce diffusa, i massimi della quale corrispondono a differenze di cammini ottici pari a multipli interi della lunghezza d'onda. Di conseguenza la figura de-



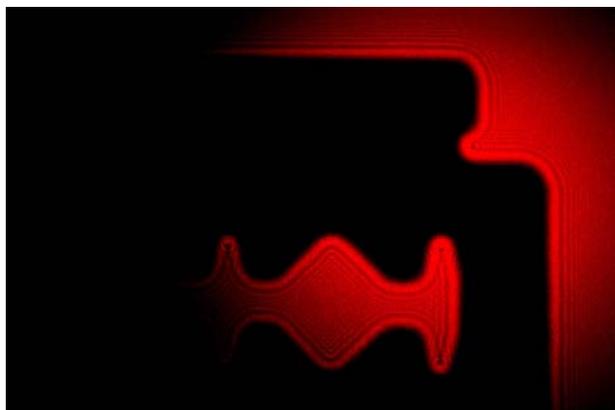
**Figura 26:** Schema della spiegazione di Young degli archi sovrannumerari. Benché l'onda incidente abbia una ben definita fase, il diverso cammino ottico, relativo a ciascuno dei due raggi con diverso angolo di incidenza, sfasa le due componenti ondulatorie. Lo sfasamento è costruttivo solo se è un multiplo intero della lunghezza d'onda della luce incidente. Altrimenti l'ampiezza è minore, fino ad annullarsi quando lo sfasamento corrisponde a mezza lunghezza d'onda.

gli archi sovrannumerari così formati dipende significativamente dalle dimensioni delle gocce. Questo perché la differenza di cammino ottico cresce rapidamente con il raggio della sfera, oltre che dipendere dal parametro d'urto. Quindi più sono grandi le gocce, più è stretta la separazione angolare tra gli archi, che diventano difficilmente distinguibili se le gocce hanno  $R \geq 1$  mm. La sovrapposizione dei colori tende così a espandersi su tutto l'arco. Questo spiega pure perché essi si possono vedere più facilmente verso il culmine dell'arco, quando le gocce sono ancora piccole,

mentre si dissolvono in basso, tendendo le gocce a ingrandirsi nella caduta.

Quindi sembrava che Young riuscisse a spiegare tutte le principali caratteristiche dell'arcobaleno con la teoria dell'interferenza della luce. Ma, come la teoria di Descartes - Newton, anche quella di Young prevedeva la completa oscurità della banda di Alessandro, il che non solo è falso, ma un tale brusco passaggio non è coerente con la stessa teoria ondulatoria. Questa prevede che bordi netti tra luce e ombra siano sempre sfumati a causa del fenomeno della diffrazione.

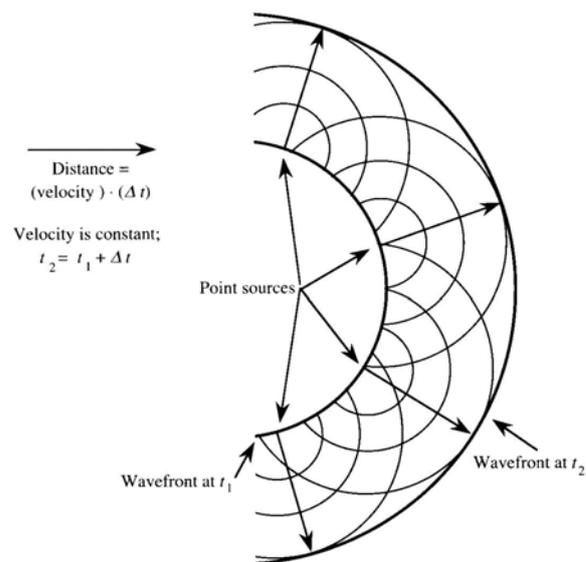
Questo fatto, la più familiare manifestazione del quale è il cambiamento di direzione di propagazione della luce (ma anche del suono e di ogni altro tipo di onda) in prossimità del bordo di un ostacolo, fu studiato per la prima volta da F M



**Figura 27:**

Grimaldi [33], ripreso dallo stesso Newton e poi, nell'ambito della teoria ondulatoria, approfondito da Young ed espresso in forma matematica moderna da Fresnel [34]. Nell'arcobaleno non ci sono ostacoli, ma attorno alle caustiche, che definiscono l'arco primario e il secondario, si dovrebbero manifestare degli effetti diffrattivi, con il corrispondente smussamento delle variazioni nell'intensità della luce.

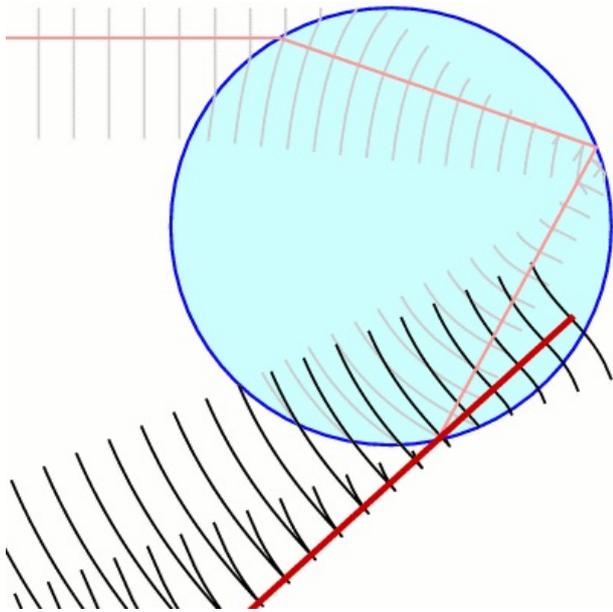
Nel 1838 il noto astronomo inglese G B Airy fece il tentativo [37] di determinare la distribuzione dell'intensità luminosa in prossimità dell'arcobaleno, basandosi sul cosiddetto *principio di Huygens*, poi elaborato da A J Fresnel [34] (Figura 26). Successivamente Kirchhoff derivò il principio di Huygens-Fresnel dalle equazioni di Maxwell [35], almeno limitatamente alla teoria scalare. L'intero argomento dell'ottica come fenomeno elettromagnetico è autorevolmen-



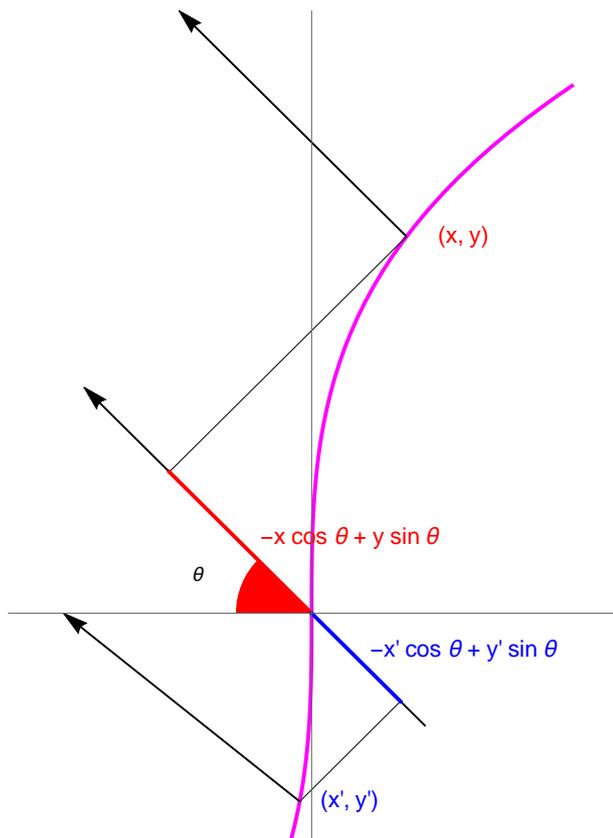
**Figura 28:** Schematizzazione del Principio di Huygens. In un mezzo omogeneo e isotropo, all'istante  $t_1$  ciascun punto di un fronte d'onda (luogo dei punti di uguale fase) si comporta come una sorgente puntiforme secondaria di onde sferiche di opportuna ampiezza. Trascorso un intervallo di tempo  $\Delta t$ , il nuovo fronte è dato dall'involuppo di tutti i fronti secondari sferici di raggio  $\Delta r = v \Delta t$  e l'ampiezza dell'onda si ottiene sommando tutte le ampiezze delle singole perturbazioni. In un punto di intersezione tra il fronte d'onda e l'interfaccia tra mezzi con indice di rifrazione differente, emergono onde secondarie sferiche, che nelle due bande si propagano con le rispettive velocità.

te trattato da Born e Wolf [36]. Il principio di Huygens consentirebbe di calcolare l'ampiezza della radiazione in ogni punto dello spazio, partendo dalla conoscenza dei suoi valori su uno specifico fronte d'onda. Così l'intero arcobaleno potrebbe essere descritto rigorosamente, se si conoscesse l'intensità luminosa su un particolare fronte d'onda entro una singola goccia. Sfortunatamente, questo è impossibile, ma alcune ipotesi ragionevoli potrebbero fornire una buona approssimazione. Airy scelse una superficie ortogonale a tutti i raggi all'interno della goccia vicini quello di Descartes, proseguendo in maniera simmetrica al di là di esso con un punto di inflessione (cioè un cambio nel senso della curvatura). Questo è un *fronte virtuale*, nel senso che non è quello effettivo all'interno della goccia, ma è quello che in aria e dalla parte dell'arco primario produrrebbe due fronti che si

sovrappongono e interferiscono. Orientando gli



**Figura 29:** Il fronte d'onda di Airy e la sovrapposizione a sinistra di due componenti ondulatorie che interferiscono attorno alla caustica.



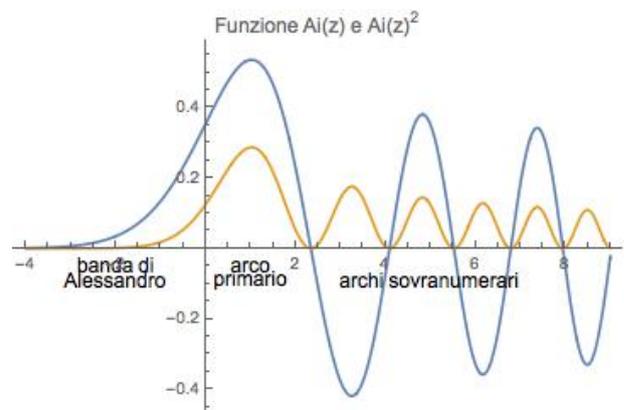
**Figura 30:** Calcolo degli sfasamenti lungo il fronte d'onda virtuale di Airy

assi coordinati in modo che la caustica sia l'asse  $\hat{x}$  negativo, il fronte può essere espresso in buona

approssimazione dal  $x = \frac{\kappa^2}{3R^2} y^3$ , dove  $\kappa$  è una costante adimensionale dipendente dall'indice di rifrazione e dall'ordine dell'arco. Supponendo che l'intensità della luce sia costante lungo il fronte, limitandosi al piano e concordemente ad Huygens, l'ampiezza cercata è data dall'integrale dei contributi provenienti da ogni punto  $(x, y)$  della cubica (vedi Figura 29). Se si pensa di determinarla in un punto lontano, nella direzione individuata dall'angolo  $\theta$ , bisogna tener conto dei diversi ritardi di fase delle onde sferiche secondarie, per esempio, rispetto al punto di riferimento  $(0, 0)$ , che è pari a  $\frac{-x \cos \theta + y \sin \theta}{\lambda}$ . Attorno all'angolo di Descartes, cioè  $\theta \approx 0$ , lo sfasamento prende la forma limite  $-\frac{\kappa^2}{3\lambda R^2} y^3 + \frac{\theta}{\lambda} y$ . Questo porta, dopo vari calcoli ed approssimazioni, all'intensità della luce proporzionale al quadrato dell'espressione integrale

$$Ai(-m\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left[ \frac{s^3}{3} - m\theta s \right] ds,$$

con  $m \propto \left(\frac{R}{\kappa\lambda}\right)^{2/3}$ . Airy calcolò numericamente il suo integrale, oggi chiamato funzione di Airy, per diversi valori di  $m\theta$ : un lavoro pesante senza la moderna tecnologia dei computer. Ma poco dopo, su suggerimento di De Morgan, utilizzò lo sviluppo in serie attorno a  $\theta = 0$ . Come si vede dal grafico in Fig 30, la teoria di Airy prevede un picco principale, corrispondente all'arco primario, una serie di picchi secondari corrispondenti agli archi sovrannumerari per  $\theta > 0$  di ampiezza decrescente, mentre per  $\theta < 0$  l'arco si dissolve nell'ombra in maniera esponenzialmente rapida.



**Figura 31:**

La distribuzione dell'intensità luminosa pre-

detta da Airy è analoga alla figura di diffrazione che compare nell'ombra di un bordo rettilineo, ma la posizione e le altezze dei picchi differiscono alquanto rispetto a quelli previsti dalla teoria dell'interferenza di Young. Un'altra significativa distinzione della teoria di Airy è che il massimo di intensità dell'arco cade ad un angolo un po' più grande di quello calcolato da Descartes, infine l'intensità non diventa mai infinita in alcun punto.

I calcoli di Airy furono fatti per una luce monocromatica, quindi se si vuole applicare il suo metodo all'arco prodotto dalla luce solare, uno deve sovrapporre le varie componenti cromatiche. Procedendo in maniera analoga alla discussione fatta a suo tempo da Newton, per descrivere l'immagine effettivamente percepita bisogna ricorrere alla teoria della visione dei colori.

La purezza dei colori dell'arcobaleno è determinata dall'estensione con la quale i colori si sovrappongono, il che a sua volta dipende dalle dimensioni delle gocce. Grandi gocce uguali ( $R \approx 1$  mm) generalmente danno archi brillanti con colori puri. Con gocce molto piccole ( $R \approx 0.01$  mm) la sovrapposizione dei colori è così grande che la luce risultante è quasi bianca. Cosicché è opportuno introdurre il rapporto della circonferenza della goccia rispetto alla lunghezza d'onda della luce come il *parametro di taglia*

$$\beta = \frac{2\pi R}{\lambda} = k R.$$

Questo parametro varia da 100, per le gocce di nebbia, a diverse migliaia per quelle grandi. L'approssimazione di Airy è accettabile per gocce con  $\beta \approx 5000$ .

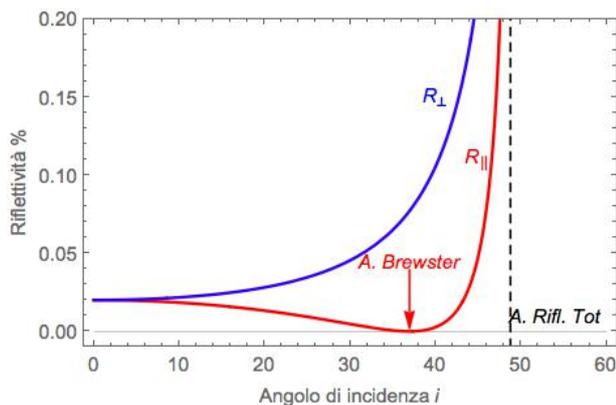
V. Khare, dell'Università di Rochester, fece un confronto dettagliato delle tre teorie dell'arcobaleno: l'approssimazione di Airy, l'approssimazione esatta, ottenuta sommando al computer le onde parziali e i termini di arcobaleno nel metodo del momento angolare complesso, associato con la collisione dei punti sella. Per polarizzazione perpendicolare la teoria di Airy richiede solo piccole correzioni entro l'arco primario: i suoi errori diventano apprezzabili solo nella regione dei sovrannumerari. Per la luce polarizzata parallelamente, la teoria di Airy fallisce pesantemente. Per gli archi sovrannumerari la soluzione esatta mostra minimi dove la teoria di Airy ha

dei massimi e viceversa. Questi seri fallimenti sono un risultato indiretto della quasi coincidenza tra l'angolo di riflessione interna e l'angolo di Brewster. All'angolo di Brewster l'ampiezza del raggio riflesso cambia segno, cosa della quale non si tiene conto nella teoria di Airy. Di conseguenza l'interferenza lungo le direzioni corrispondenti ai picchi nella soluzione di Airy è distruttiva invece che costruttiva.

In prospettiva Airy ha aperto nuove strade, ma non sembra che egli lo abbia colto completamente, tanto che non ne fa menzione nella sua autobiografia. In primo luogo, nell'ambito dell'ottica si è abbandonata definitivamente una descrizione puramente geometrica, per passare ad una teoria analitica di campo. Il problema matematico diventa quello delle *equazioni differenziali alle derivate parziali* con condizioni assegnate. Questa classe di problemi, già nota ai fisici-matematici dell'epoca, presentava metodi risolutivi lontani da essere consolidati in una teoria unitaria. Tuttavia, proprio in quegli anni Poisson aveva sviluppato formule integrali per le equazioni di d'Alembert, che erano interpretabili in termini di principio di Huygens-Fresnel. Altro campo della Matematica collegato alla funzione di Airy fu quello delle equazioni differenziali ordinarie del II ordine lineari a coefficienti non costanti, la loro classificazione e soluzione in termini di *funzioni speciali classiche*. Si ricordi a tal proposito il legame con le *funzioni di Bessel* e relative equazioni. Inoltre molti ricorderanno il ruolo centrale svolto dalla funzione di Airy nel *metodo di approssimazione semiclassica*, noto anche come *Wentzel-Kramers-Brillouin* e sue varianti. In parallelo il suo studio sviluppò ulteriormente la teoria delle funzioni analitiche e lo studio delle singolarità delle funzioni nel piano complesso. In particolare Stokes ricavò formule di approssimazioni per  $|m| \gg 1$  in termini di *serie asintotiche*, avviandone lo studio, e la scoperta delle *linee di Stokes*, che separano le regioni di validità dei suddetti sviluppi [38]. Approfondimenti su questi temi si possono trovare in innumerevoli manuali, tra i quali, più per motivi storici, qui menzioniamo il celebre trattato di Jeffreys [39].

## Il Ponte delle Risonanze

Una importante proprietà della luce che abbiamo fin qui ignorato è la trasversalità delle sue oscillazioni: esse sono perpendicolari alla direzione di propagazione (differentemente, il suono è un'onda longitudinale). L'orientazione delle oscillazioni trasversali può essere decomposta lungo due assi perpendicolari tra loro, che definiscono stati di polarizzazione indipendenti. La luce solare non è polarizzata, perché è una miscela incoerente dei due stati in eguali proporzioni, ma le riflessioni in una goccia di pioggia possono modificare questo rapporto e, quindi anche quello della luce in un arcobaleno. Il legame quantitativo di quale frazione di luce incidente all'interfaccia tra due mezzi sia riflessa (oppure trasmessa) è fornito dalle ben note relazioni di Fresnel [36], la forma delle quali è sensibile allo stato di polarizzazione. Intanto, se fissiamo il



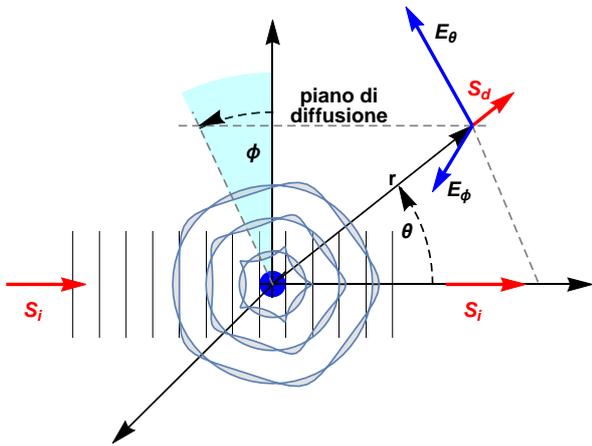
**Figura 32:** La riflettività della luce che si propaga dall'acqua verso l'aria.  $R_{\parallel}$  e  $R_{\perp}$  si riferiscono al caso di polarizzazione parallela o perpendicolare, rispettivamente, rispetto al piano di riflessione.

piano contenete sia un raggio luminoso che il suo riflesso sulla superficie interna di una goccia d'acqua, gli stati di polarizzazione da considerare sono quello parallelo e quello perpendicolare a tale piano. Le formule di Fresnel forniscono la riflettività  $R_{\parallel}$  e  $R_{\perp}$  per entrambe le polarizzazioni, come indicato nel grafico di Figura 31. La riflettività della superficie è piccola ad angoli di incidenza prossimi alla perpendicolare ( $i \approx 0$ ), ma vicino all'angolo di riflessione totale, il cui valore è determinato dall'indice di rifrazione, essi divergono, fino a descrivere la riflessione totale del raggio per angoli maggiori. Ad an-

goli intermedi, tuttavia, la riflettività dipende sensibilmente dalla polarizzazione: la componente perpendicolare è maggiormente riflessa, mentre per la perpendicolare, addirittura viene completamente trasmessa al cosiddetto l'angolo di Brewster, da D Brewster, che ne discusse il significato nel 1815. Poiché l'angolo interno di incidenza ad una goccia di pioggia è molto vicino all'angolo di Brewster, la maggior parte delle componenti parallele sfuggono come raggi trasmessi, lasciando una preponderanza della componente perpendicolare della luce. Di conseguenza la luce dell'arcobaleno è quasi completamente polarizzata, come si può osservare ruotando delle lenti Polaroid attorno alla linea di vista.

Per riassumere, sebbene di molto anteriori alla teoria elettromagnetica di Maxwell, l'ipotesi ondulatoria della luce e la scoperta della polarizzazione riescono a dare una serie di risposte, approssimate ancora, al problema posto dall'arcobaleno. Tuttavia solo nell'ambito teorico molto più ricco e complesso dell'Elettromagnetismo (si veda, nello stesso numero di Ithaca, M. Mazzeo: *Il lato oscuro della luce*) si riesce a trovare una soluzione esatta, anche se ben presto ci accorgeremo di dover pagare un prezzo.

Una precisa formulazione matematica del problema dell'arcobaleno ottico consiste nel calcolare l'ampiezza dell'onda diffusa da una sfera di indice di rifrazione costante  $n$  (anche complesso), sulla quale incide un'onda piana monocromatica. Nel caso delle onde sonore la soluzione a tale problema fu discusso da Rayleigh [40], mentre per l'analogo problema elettromagnetico fu trovata nel 1908 da G Mie [41], anche se precedenti passi [42][43] verso la sua formulazione e furono apportati miglioramenti successivi [44] [45] [46]. La soluzione viene espressa in una serie infinita di termini, chiamati *onde parziali*. E' chiaro che il prezzo al quale si alludeva consiste nel controllo della convergenza e nella somma della serie. Questa forma proviene dalla necessità di trovare una soluzione stazionaria delle equazioni di Maxwell, cioè dalle quali è possibile fattorizzare la dipendenza temporale della forma  $e^{-i\omega t}$ , in regioni sferiche concentriche, distinte dal diverso indice di rifrazione. Equazioni di questo tipo



**Figura 33:** L'onda piana incidente viene diffusa in tutte le direzioni dal centro (goccia di pioggia). L'onda coè prodotta è espressa dalla somma di infinite onde sferiche concentriche, con ampiezza modulata sia da oscillazioni radiali, che da oscillazioni angolari. L'interferenza di tutti questi possibili stati di oscillazione determina l'ampiezza complessiva dell'onda, e quindi di ogni altra quantità fisica. Per le onde e.m. il vettore di Poynting  $\vec{S}$  esprime il flusso di potenza in ogni punto dello spazio. Le componenti del c. elettrico con polarizzazione indipendente sono  $\vec{E}_\phi$  (perpendicolare) e  $\vec{E}_\theta$  (parallela), con riferimento al piano di diffusione.

si riducono alla ben nota equazione di Helmholtz

$$\nabla^2 U + n^2 k^2 U = 0,$$

dove  $k$  assume valori diversi nella sfera e al suo esterno e  $U$  è, in generale, una funzione vettoriale a valori complessi. Questa è una sorta di madre delle equazioni della fisica-matematica del XIX e XX secolo [39]. La difficoltà nel trovare una sua soluzione nel caso considerato consiste nel raccordare con continuità, sino alle derivate prime, le soluzioni alla superficie di separazione tra i due mezzi. Supponendo di far incidere sulla sfera un fascio di luce monocromatica polarizzata linearmente, a grande distanza dalla goccia ( $r \rightarrow \infty$ ) le componenti del c. elettrico della radiazione diffusa assumono la forma

$$E_\phi = \frac{e^{ikr}}{ikr} \sin \phi S_\perp(\theta; \beta), \quad E_\theta = \frac{e^{ikr}}{ikr} \cos \phi S_\parallel(\theta; \beta).$$

Il primo fattore di queste espressioni esprime l'andamento di un'onda sferica con numero d'onda  $k = \frac{\omega}{c} = |\vec{k}_{inc}|$ , il secondo dipende solo dall'angolo azimutale che definisce il piano di dif-

fusione, il terzo ( $S_\perp$  o  $S_\parallel$ ) contiene l'angolo di diffusione e il parametro di taglia, quindi codifica tutta l'informazione relativa al tipo di goccia e di luce che vi facciamo incidere. Perciò essi vengono chiamati *ampiezze di diffusione* e determinano completamente l'intensità luminosa diffusa (relativamente all'intensità della luce incidente)

$$I_{tot}(\theta, \phi) = |S_\perp|^2 \sin^2 \phi + |S_\parallel|^2 \cos^2 \phi,$$

che i fisici abitualmente chiamano *sezione d'urto differenziale*.

Ora l'espressione di  $S_{\perp, \parallel}$  è data, come annunciato, sommando la serie di infiniti termini

$$S_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ a_\ell^{(j)}(\beta) \pi_\ell(\cos \theta) + b_\ell^{(j)}(\beta) \tau_\ell(\cos \theta) \right\}, \quad (1)$$

dove  $j = \perp, \parallel$ ,  $\pi_\ell$  e  $\tau_\ell$  determinano la distribuzione angolare dell'intensità luminosa (Figura 35) e sono dati in termini di funzioni di Legendre (box), mentre i coefficienti di Mie  $a_\ell^{(j)}$  e  $b_\ell^{(j)}$  sono espressioni razionali di funzioni di Bessel sferiche (box), dipendenti solo dal parametro di taglia  $\beta$  e dall'indice di rifrazione. Su di esse esiste una letteratura matematica vastissima [39], ma vale ancora una volta la pena di sottolineare il profondo legame tra i problemi di diffusione della luce, la teoria delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine e la teoria delle funzioni di variabile complessa. Campo di ricerca centrale per l'Analisi Matematica, a partire da Cauchy, Riemann e Weierstrass. Non senza trascurare quel senso estetico insito nella Matematica ispirata dall'arcobaleno.

A questo punto potrebbe sembrare facile determinare il preciso carattere dell'arcobaleno, se si riuscisse a sommare la serie di onde parziali, il che non è possibile analiticamente. D'altra parte una soluzione approssimata stabile rispetto all'aggiunta di termini ulteriori si ottiene quando si somma almeno fino  $\ell_{max} = \beta + 2\beta^{1/3} + 2$ , in quanto essa converge lentamente.

Perciò la serie in onde parziali si può ridurre ad un solo termine quando  $\beta \ll 1$ , cioè quando le dimensioni del corpo diffusore sono molto piccole rispetto alle lunghezze d'onda coinvolte (Figura 38). Questo regime di diffusione, detto di Rayleigh, si verifica quando le molecole di aria diffondono la luce visibile. In tal caso il fenome-

## Le funzioni di Legendre

L'equazione di Legendre per la funzione  $y = y(x)$  è

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \ell(\ell + 1)y = 0.$$

Come tutte le equazioni lineari del 2° ordine, essa ha due soluzioni linearmente indipendenti:  $P_\ell(x)$  regolare nei punti singolari  $\pm 1$  e le  $Q_\ell$  singolare in essi. Se il parametro  $\ell$  è un intero, come nel caso della serie di  $S_{\perp, \parallel}$ , le  $P_\ell$  sono polinomi. Essi hanno notevolissime proprietà analitiche e algebriche e costituiscono il prototipo dei cosiddetti *polinomi ortogonali*. Una loro generalizzazione è costituita dalle *funzioni associate* di Legendre  $P_\ell^m = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\ell}{dx^m}$ , che sono pertinenti al nostro caso essendo

$$\pi_\ell = \frac{P_\ell^1(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad \tau_\ell = \frac{d P_\ell^1(\cos \theta)}{d \theta}.$$

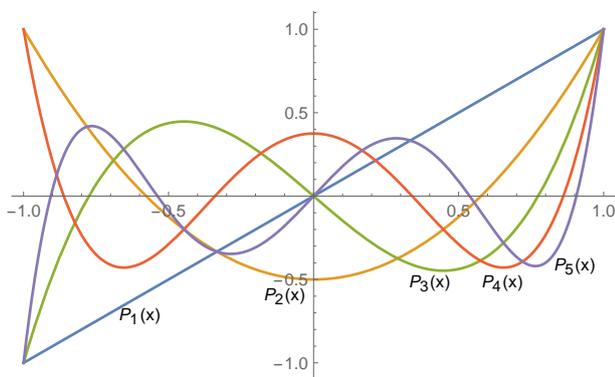


Figura 34: I primi cinque polinomi di Legendre.

no più eclatante è l'azzurro del cielo, poiché la sezione d'urto differenziale di Rayleigh è circa 16 volte più grande per il blu rispetto al rosso, dipendendo da  $\approx \lambda^{-4}$ .

Ma per gocce di pioggia illuminate dal Sole si ha  $\beta \approx 10^3$ , quindi una buona approssimazione della soluzione di diffusione comporta il calcolo di migliaia di termini complicati e rapidamente variabili in  $\beta$  e  $\theta$  (si vedano le figure 39 e 40). Anche se al giorno d'oggi esistono potenti strumenti e metodi di calcolo numerico [6][47][48], anche on-line [49], il costo computazionale può

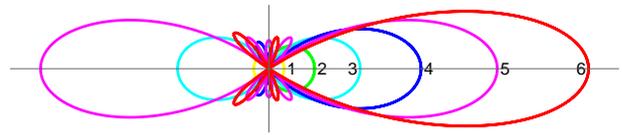


Figura 35: Rappresentazione polare delle funzioni  $\pi_\ell$ , per  $1 \leq \ell \leq 6$ , nelle ampiezze  $S_i$  della radiazione diffusa.

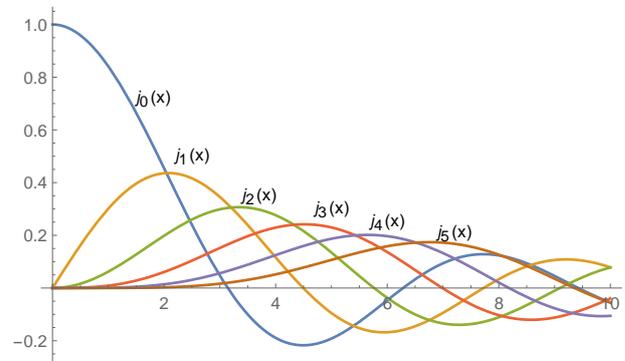


Figura 36: Le prime sei funzioni di Bessel sferiche di prima specie.

diventare ben presto proibitivo. D'altra parte il calcolo numerico offre una certa intuizione sulla fisica coinvolta solo estraendola dal risultato finale, mentre è meno chiaro come un certo risultato emerga. Ci troviamo allora nella imbarazzante situazione di conoscere la forma della soluzione esatta, ma di essere ancora incapaci di comprendere completamente i meccanismi che la determinano. E' come se la speciale miscela di effetti diffrattivi che determinano l'arcobaleno fossero sepolti nelle formule della soluzione esatta di Mie.

Verso un chiarimento di questo paradosso H Poincaré e G Watson, all'inizio del XX secolo, trovarono un metodo per trasformare la serie lentamente convergente delle onde parziali in una espressione integrale molto più maneggevole, nota come trasformazione di Watson o del momento angolare complesso.

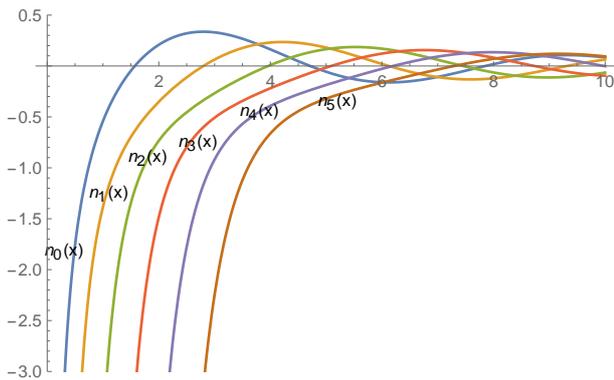
Che il momento angolare intervenga nel problema dell'arcobaleno deriva dall'interpretazione corpuscolare, nella quale un fascio di luce è visto come un flusso di fotoni. Anche se i fotoni non hanno massa, essi trasportano energia e quantità di moto, quindi anche momento angolare, che è il prodotto tra il momento lineare ed il parametro d'urto. Quando la luce subisce un numero di riflessioni interne ad una goccia di acqua, equivale a dire che un fascio di fotoni in

## Le funzioni di Bessel Sferiche

L'equazione di Bessel sferica per la funzione  $z = z(r)$  è

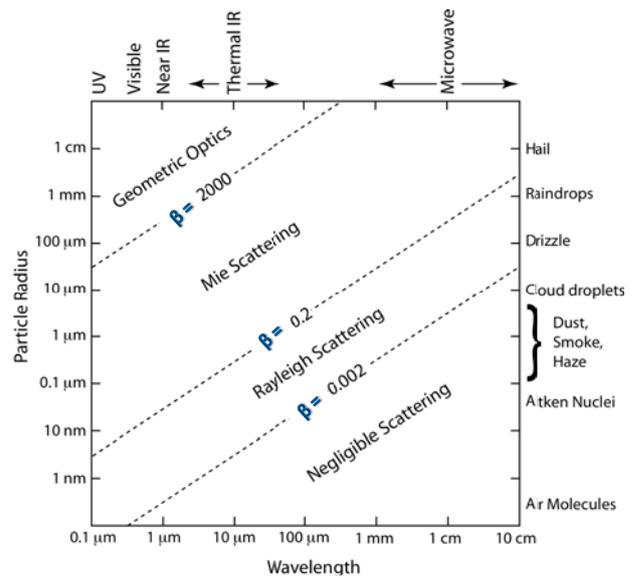
$$r^2 \frac{d^2 z}{dr^2} + r \frac{dz}{dr} + \left[ r^2 - \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^2 \right] z = 0, \ell \in \mathbb{N}.$$

Anche in questo caso ogni soluzione è la combinazione di due soluzioni linearmente indipendenti. In particolare quelle di prima specie  $j_\ell$  sono regolari come  $x^\ell$  nel punto singolare  $r = 0$ , mentre quelle di seconda specie  $n_\ell$  sono ivi singolari, come  $r^{-\ell-1}$ . Per  $r \rightarrow \infty$  il comportamento di queste funzioni è decrescente come  $\frac{1}{r}$  modulato da  $\sin r$  o  $\cos r$  alternativamente per  $\ell$  pari o dispari. Le speciali combinazioni lineari  $h_\ell^{(\pm)} = j_\ell \pm i n_\ell$  sono chiamate funzioni di Hankel. Il loro comportamento asintotico a  $r \rightarrow \infty$  è quello  $\frac{\exp[\pm i r]}{r}$  delle onde sferiche uscenti/entranti.

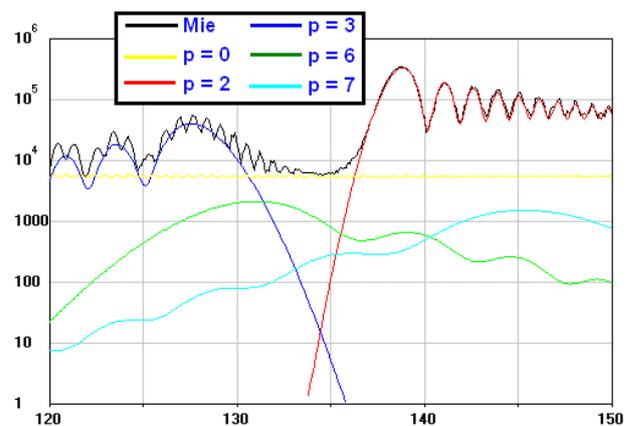


**Figura 37:** Le prime sei funzioni di Bessel sferiche di seconda specie.

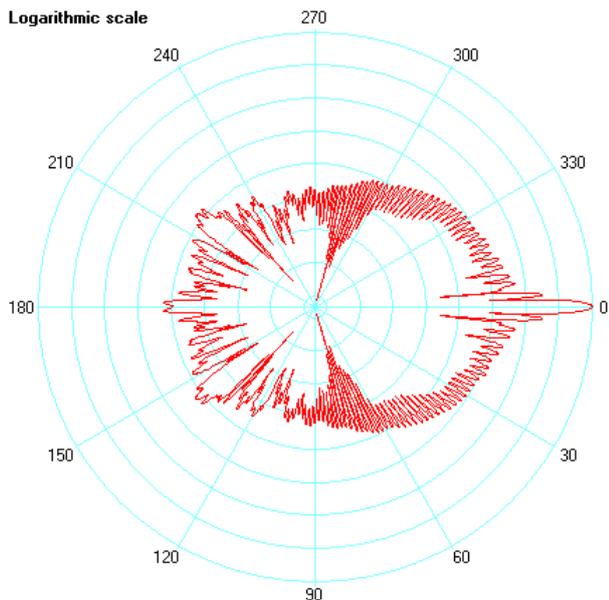
effetti sta orbitando attorno ad centro di attrazione specifico. Ma la meccanica (quantistica) pone dei vincoli a questi processi elementari, richiedendo che il momento angolare assuma soltanto valori multipli interi di  $\hbar$ , che è il momento angolare fondamentale. Pertanto ogni termine della somma in  $\ell$  dello sviluppo in onde parziali per (1) corrisponde all'ampiezza di uno stato di onda diffusa avente uno specifico valore del momento angolare. Al contempo il parametro d'urto non svolge alcun ruolo, manifestando così il suo carattere di osservabile incompatibile con il mo-



**Figura 38:** Particelle sferiche isolate puramente dielettriche diffondono la luce secondo vari regimi, definiti dal parametro di taglia  $\beta$ , e che corrispondono ad approssimazioni differenti della soluzione esatta.



**Figura 39:** Diffusione di luce (rossa) non polarizzata di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.65 \mu\text{m}$  da parte di una goccia d'acqua sferica di raggio  $r = 100 \mu\text{m}$ . Sono evidenziati i contributi che provengono dai raggi che subiscono  $p - 1$  riflessioni interne. Pertanto  $p = 2$  corrisponde alla diffusione che contribuisce principalmente all'arco primario, mentre  $p = 3$  produce l'arco secondario. [48]



**Figura 40:** Diagramma polare della diffusione di luce polarizzata perpendicolarmente con  $\lambda = 0.65 \mu\text{m}$ , da parte di una goccia d'acqua di raggio  $r = 10 \mu\text{m}$ . Si noti che la scala delle ampiezze è logaritmica, per cui il picco in avanti è circa  $10^4$  volte più intenso dei picchi dell'arco primario e  $10^5$  volte rispetto al secondario. Si noti anche il pronunciato picco all'indietro a  $180^\circ$ . [48]

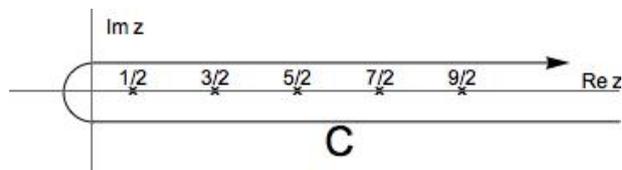
mento angolare (un esempio di applicazione del principio di indeterminazione della meccanica quantistica).

A questo punto l'astrazione matematica ci permette di pensare alla variabile momento angolare come ad una quantità continua  $\ell \rightarrow z$ , addirittura che vari nel campo complessi. Corrispondentemente i coefficienti di Mie e le altre espressioni presenti nella formula (1) si interpretano come i valori di certe funzioni complesse in  $z$ , che interpolano i valori ottenuti in corrispondenza dei valori discreti  $z = \ell$ . Queste funzioni si assumono, ad eccezione di alcune singolarità, analitiche in tutto il piano complesso, in particolare lo sono in prossimità del semiasse reale positivo di  $z$ . Questa proprietà è senz'altro verificata nei casi in cui il *potenziale di diffusione* ha un raggio di azione limitato, come appunto gocce o bolle di liquido, all'esterno delle quali tutto si svolge come nello spazio libero. Per una funzione interpolante  $\phi$  del tipo descritto e usando il *teorema dei residui*, Watson [50] ottenne la formula

integrale

$$\frac{1}{2} \int_C \phi(z, x) \frac{\exp(i\pi z)}{\cos(\pi z)} dz = \sum_{\ell=0}^{\infty} \phi(\ell + \frac{1}{2}, x),$$

dove il cammino di integrazione  $C$  è riportato in Figura 41, che si può dimostrare equivalente ad una analoga formula ottenuta in precedenza da Poisson. In virtù dell'analiticità della funzione



**Figura 41:** Nel piano del momento angolare complesso la funzione integranda nella trasformata di Watson possiede poli semplici solo nei punti della forma  $\ell + \frac{1}{2}$ .

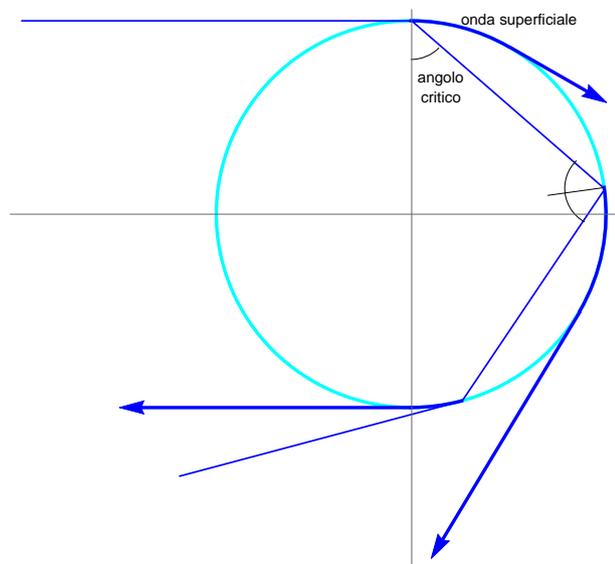
integranda nel piano complesso, il cammino  $C$  può essere deformato con continuità, facendolo passare in particolare per punti di fase stazionaria (punti sella) [39]. Infatti i contributi all'integrale negli intorno di questi punti sono quelli che maggiormente contribuiscono all'integrale in questione. Pertanto si possono agevolmente ottenere espansioni asintotiche, che risommano moltissimi termini dello sviluppo in onde parziali. In particolare i contributi provenienti da punti sella reali sono associati con i raggi luminosi diffratti/deflessi fin qui considerati. I punti sella in corrispondenza di valori complessi del momento devono descrivere un qualche smorzamento dell'onda. Un simile comportamento si ha sicuramente nel caso di riflessione interna all'interfaccia acqua-aria, nel qual caso l'intensità diventa trascurabile in uno strato di profondità dell'ordine una lunghezza d'onda in aria. Un analogo fenomeno si verifica nella descrizione del lato buio di una caustica. La loro matematica è simile a quella che descrive l'effetto tunnel in Meccanica Quantistica.

In questo linguaggio l'origine dell'arcobaleno, vista nella semplice analisi di Descartes come la confluenza di più raggi nell'unico di deflessione minima, viene sostituita dalla confluenza di due punti sella reali nel piano complesso del momento angolare al variare di  $\beta$ . Superato tale angolo di arcobaleno, i punti non spariscono, ma diventano complessi, assumendo parti im-

maginarie, corrispondenti alla diffrazione nella banda oscura di Alessandro. Essa è un esempio di raggio complesso nel lato oscuro della curva di una caustica.

D'altra parte le ampiezze di diffusione possono presentare anche delle singolarità polari nel piano complesso del momento angolare, note come *poli di Regge*, dal nome del celebre fisico italiano che contribuì fortemente al loro studio nell'ambito della Fisica delle Alte Energie [51].

I poli di Regge descrivono onde luminose associate a raggi incidenti tangenzialmente la superficie acqua-aria. Esse possono eccitare un'onda superficiale, che si propaga lungo una geodetica. Ad un certo punto può sfuggire alla superficie, ma essa ha una certa probabilità di penetrare nella sfera all'angolo critico, compiendo una o più riflessioni interne, prima di riemergere ancora in superficie (vedi Figura 42). Qualcosa di molto



**Figura 42:** I raggi incidenti tangenzialmente alla goccia possono propagarsi come onde superficiali e poi essere rimesse tangenzialmente. Tuttavia possono anche essere rifratte all'interno all'angolo critico, subendo un numero finito di riflessioni interne, prima di ritornare in superficie.

simile alla congettura di Keplero, ma abbiamo visto che esso non contribuisce all'arcobaleno. Piuttosto l'effetto diventa dominante a grandi angoli fino alla direzione anti-solare, dove si è già osservato un importante picco relativo di intensità luminosa. Questi raggi sono quindi responsabili dell'affascinante fenomeno meteorologico del *gloria* (Figura 43). Esso appare come un alone di

colori spettrali, che circonda l'ombra di un osservatore messo sulle nubi o nella nebbia. Esso è più facilmente osservabile da un aeroplano che vola sulle nubi.



**Figura 43:** Un gloria solare che circonda il cosiddetto Spettro di Brocken, *TheBrockenInaGlory*, <https://sites.google.com/site/thebrockeninaglory/>

Si dovrebbe notare che l'adozione della teoria del momento angolare complesso non implica che le precedenti soluzioni siano errate. La spiegazione di Descartes dell'arco primario come raggio di minima deflessione non è sbagliata e, ancora, gli archi sovrannumerari possono essere visti come effetto dell'interferenza di Young. Tuttavia il metodo del momento angolare complesso fornisce una catalogazione più completa dei cammini che la luce / i fotoni possono seguire e una più accurata valutazione delle loro ampiezze.

## Conclusioni

Abbiamo iniziato dall'osservazione infantile di un fenomeno naturale e dopo un lungo percorso, culturale e scientifico, siamo approdati ad una teoria matematica astratta e, in un certo senso, piuttosto lontana dall'intuizione. Tuttavia non è stato un esercizio privo di frutti. In primo luogo abbiamo adottato l'arcobaleno a mo' di banco da prova dei nostri modelli scientifico/culturali. Siamo inoltre riusciti a dedurre dalle nostre teorie sulla luce tanti dettagli sull'arcobaleno, che non li avremmo mai notati senza uno sguardo, altrimenti motivato, indirizzato a cercarli. Infine le idee e i metodi che abbiamo sviluppato su questo particolare effetto sono diventati paradigmatici nell'ambito della fisica atomica e nucleare,

dove arcobaleni atomici e nucleari si possono studiare con i metodi discussi sopra. Per tutti basti citare il lavoro sviluppato in Fisica Nucleare dal compianto Raimondo Anni e dalla sua *Rainbow Company* <http://www.dmf.unisalento.it/anni/Rainbow/Rainbow.htm>, al quale moltissimo devo per la mia formazione di fisico.

Queste idee e questi metodi saranno sicuramente fecondi in molti altri ambiti della scienza pura ed applicata e colgo l'occasione per scusarmi con i lettori per essermi troppo dilungato su un tema forse marginale ma dal caleidoscopico fascino, il quale ancora una volta mi ha trascinato lontano, quasi annegando in una vera pioggia (per dirlo con Hazel Grace nell'Introduzione) di ricordi, esperienze, riflessioni e idee.



- [1] R. L. LEE, A. B. FRASER: *The Rainbow Bridge: Rainbows in Art, Myth, and Science*. Penn State Press, University Park (2001).
- [2] C. B. BOYER: *The Rainbow: from Myth to Mathematics*. Princeton Univ. Press, Princeton (1987).
- [3] J. A. ADAM: "Like a bridge over colored water", *AMS Notices* **49** (2002) 1360–1371.
- [4] V. KHARE, H. M. NUSSENZVEIG: "Theory of the rainbow", *Physical Review Letters* **33** (1974) 976–980.
- [5] D. K. LINCHE, W. LIVINGSTON: *Color and Light in Nature*. Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [6] Si suggerisce di visitare <http://www.atoptics.co.uk> e <http://www.philiplaven.com>
- [7] J. A. ADAM: "The mathematical physics of rainbows and glories", *Phys. Rep.* **356** (2002) 229–365.
- [8] H. M. NUSSENZVEIG: *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering*. Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [9] "Bibbia", Conferenza Episcopale Italiana (2008).
- [10] J. W. VON GOETHE: *Zur Farbenlehre*. J.G. Cotta'schen Buchhandlung, Tubinga (1810). J. W. VON GOETHE: *La teoria del colore*. Il Saggiatore, Milano (2008).
- [11] L. RUSSO: *La rivoluzione dimenticata*. Universale Economica Feltrinelli, Milano (2003).
- [12] E. GRANT: *A Source Book in Medieval Science*. Harvard University Press, Harvard (1974).
- [13] F. RISNER: *Opticae thesaurus, Alhazeni Arabis libri septem. Vitelloni Thuringopoloni opticae libri X*. Episcopios, Basilea (1572).
- [14] L. RUSSO: *Flussi e riflussi*. Feltrinelli, Milano (2003).
- [15] R. BAGNOLESI: "Un modello per capire meglio la formazione dell'arcobaleno", *La Fisica nella Scuola* **XIX**, **1** (1986) 38.
- [16] V. RONCHI: *Scritti di Ottica*. Il Polifilo, Milano (1968).
- [17] LEONARDO DA VINCI: *Trattato della pittura*. Giunti-Demetra, Firenze (2006).
- [18] F. MAUROLICO: *Photismi de Lumine*. Tarquinio Longo, Napoli (1611).
- [19] M. A. DE DOMINIS: *De radiis visus et lucis in vitris perspectivis et iride*. T Baglioni, Venezia (1611).
- [20] J. KEPLER: *Ad Vitellionem Paralipomena, quibus Astronomiae Pars Optica Traditur*. C. Marnium & I. Aubrii, Francoforte (1604). J KEPLER: *Dioptrice*. David Francius, Augusta (1611).
- [21] G. GALILEI: *Sidereus Nuncius*. Tommaso Baglioni, Venezia (1610).
- [22] R. DESCARTES: *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les Sciences*. Ian Maire, Leyden (1637).
- [23] I. NEWTON: "Letter containing his New Theory about Light and Colors", *Philosophical Transactions* **6** (1671) 3075-3087.
- [24] I. NEWTON: *Opticks, or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light*. W. Innys, London (1730).
- [25] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON, M. SANDS: *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley Pub. Co., London (1969).
- [26] M. KEMP: *The Science of Art*. Yale University Press, New Haven (1990).
- [27] M. LIVINGSTONE: *Vision and Art*. Harry & Abrams inc., New York (2008).
- [28] International Commission on Illumination <http://www.cie.co.at>
- [29] C. HUYGENS: *Traité de la lumière*. P. Vander, Leida (1690).
- [30] T. YOUNG: "On the Theory of Light and Colours", *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **92** (1802) 12-48.
- [31] T. YOUNG: "Experiments and Calculations Relative to Physical Optics", *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **94** (1804) 1-16.
- [32] J. FRAUNHOFER: "Bestimmung des Brechungs- und des Farben-Zerstreungs - Vermögens verschiedener Glasarten, in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernrohre", *Denksch. K. Ak. der Wiss. München* **5** (1814) 193-226.
- [33] F. M. GRIMALDI: *Physico-mathesis de lunime, coloribus et iride*. V. Benati, Bologna (1665).
- [34] A.-J. FRESNEL: "Memoire sur la diffraction de la lumière", *Mém. Académie des Sciences* **5** (1826) 33-475.
- [35] G. KIRCHHOFF: "Zur Theorie der Lichtstrahlen", *Ann. d. Physick* **254** (1883) 663-695.
- [36] M. BORN, E. WOLF: *Principles of Optics*. Pergamon, New York (1970).
- [37] G. B. AIRY: "On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic", *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **6** (1838) 379-403.

- [38] G. G. STOKES: "On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series", *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **9** (1856) 166-188. G. G. STOKES: "On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments", *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **10** (1864) 105-124.
- [39] H. JEFFREYS, B. JEFFREYS: *Methods of Mathematical Physics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1956).
- [40] J. W. STRUTT B. RAYLEIGH: *The Theory of sound*. Macmillan, London (1896).
- [41] G. MIE: "Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallosungen", *Ann. Phys.* **25** (1908) 377,445. Royal Aircraft Establishment library translation, 1976
- [42] A. CLEBSCH: "Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche", *Z. für Math.* **61** (1863) 195.
- [43] L. V. LORENZ: "Sur la lumière réfléchi et réfractée par une sphère transparente", *Vidensk. selsk. Skrifter* **6** (1890) 1..
- [44] P. DEBYE: "Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material", *Ann. d. Phys.* **30** (1909) 57.
- [45] M. KERKER: *The Scattering of Light*. Academic Press, New York (1969).
- [46] W. T. GRANDY: *Scattering of Waves from Large Spheres*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000).
- [47] W. WISCOMBE: "Improved Mie scattering algorithms", *Appl. Opt.* **19** (1980) 1505.
- [48] P. LAVEN: "Simulation of rainbows, coronas, and glories by use of Mie theory", *Applied Optics* **42** (3) 2003.436
- [49] <http://omlc.org/software/mie/>
- [50] G. N. WATSON: "The diffraction of electric waves by the earth", *Proc. Roy. Soc. (London)* **A95** (1918) 83.
- [51] V. DE ALFARO, T. REGGE: *Potential Theory*. North Holland, Amsterdam (1965).



**Luigi Martina:** Luigi Martina è professore associato di Fisica Teorica presso l'Università del Salento. La sua attività di ricerca è incentrata nello studio di sistemi fisici nonlineari con metodi analitici e algebrici.