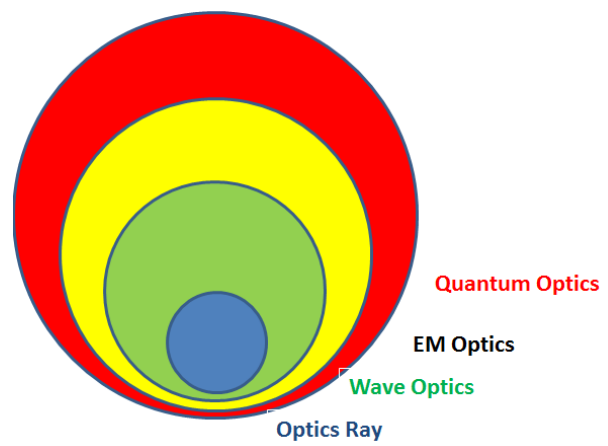


# Il lato oscuro della luce

**Marco Mazzeo**

Dipartimento di Matematica & Fisica "Ennio De Giorgi" - Università del Salento

**A** causa del suo carattere ineffabile, etereo è il caso di dire, e della sua importanza nel mostrarci il mondo esterno attraverso quelle finestre biologiche chiamate occhi, la luce ha da sempre suscitato nell'animo umano un senso di mistero. Probabilmente nessun ente fisico ha posto così tanti interrogativi come la luce. Se qualcuno dovesse chiedermi "cosa è la luce?" tutt'ora non saprei rispondere. L'unica risposta sensata sarebbe infatti "non sappiamo nella realtà cosa la luce sia ma abbiamo compreso parte del suo comportamento". Come vedremo tuttavia il comportamento fisico della luce è alquanto bizzarro e il suo studio ci ha costretto a rinunciare a visioni sulla realtà che si sono rivelate inadeguate e semplicistiche. Nel corso della storia della fisica sono state sviluppate almeno quattro teorie della luce, ciascuna che rendeva conto di fatti sperimentali ben precisi, e ognuna che inglobava quella precedente. Le teorie sono schematizzate in Fig.1. In questo lavoro esploreremo le teorie e gli esperimenti chiave effettuati sulla luce e le loro conseguenze nella nostra comprensione della realtà fisica.



**Figura 1:** Le quattro teorie fisiche sulla luce: ottica geometrica, ottica ondulatoria, ottica elettromagnetica (EM) e ottica quantistica.

## Parte I: teorie classiche della luce

### La Luce è fatta di raggi: l'ottica geometrica

Sono in auto, appena partito da Lecce per Taranto, ma con l'intenzione di fare una tappa a Manduria al ghetto ebraico. In tempi come questi rivisitare la storia tra due tradizioni religiose monoteiste, che per quasi duemila anni si sono scontrate, non fa mai male. Non ricordo tuttavia il quartiere e imposto da subito il GPS, sperando che quei satelliti lassù non mi facciano sbagliare

strada. Nel frattempo sento una gran voglia di ascoltare i Pink-Floyd lungo il tragitto. Prendo il CD dal cruscotto dell'auto. Di fronte a me il Sole ha iniziato il suo declino verso l'orizzonte, illuminando l'asfalto della superstrada verso Brindisi. La sua luce, dopo aver colpito il CD, tinge l'abitacolo dei colori dell'arcobaleno. Inserisco il CD nel lettore e il laser inizia a leggere i fori micrometrici del CD convertendo il tutto in una sfilza di 1 e 0 che saranno poi trasdotti in musica. Mi metto comodo ma la luce del Sole riflessa dalla superstrada mi abbaglia e decido così di indossare i miei occhiali da Sole polarizzati. Ora il comfort è notevole e posso proseguire dritto. Mentre "Money" risuona nell'auto mi viene in mente che tutto ciò che ho fatto ha a che fare con l'ottica e con le quattro teorie sulla luce sviluppate in quasi duemilatrecento anni. Il lettore laser "legge" i fori del CD grazie all'ottica geometrica, i colori dell'arcobaleno del CD sono apparsi nell'abitacolo seguendo le leggi dell'ottica ondulatoria, il riflesso sull'asfalto viene bloccato dagli occhiali mediante meccanismi che seguono l'ottica elettromagnetica, e infine il GPS mi avverte di girare a sinistra localizzandomi con gran precisione grazie alla comprensione delle leggi dello spaziotempo locale e della fisica quantistica degli orologi atomici, entrambe teorie che hanno la luce come gran parte del loro oggetto di studio.

Il lettore CD della nostra auto si basa anzitutto su un diodo Laser che invia un fascio di luce che si propaga seguendo percorsi rettilinei fino a colpire uno specchio ed essere riflesso verso il CD da leggere. Il sistema non funzionerebbe se la luce non si propagasse seguendo linee rette e la prima teoria sviluppata dalla fisica sul comportamento della luce ha proprio a che vedere con i percorsi dei raggi di luce. Fu formulata nei suoi principi basilari già da Archimede di Siracusa prima e dall'arabo Alhazen in seguito. Il secondo tuttavia scoprì, contrariamente a ciò che credevano i greci, che i raggi di luce non sono prodotti dagli occhi come fossero delle propaggini sensoriali, bensì essi si muovono dall'oggetto agli occhi, seguendo percorsi rettilinei. Il principio che generalizza questo comportamento e che spiega gran parte di ciò che un raggio di luce fa è detto principio di Fermat,

*un raggio di luce segue sempre il percorso di tempo*

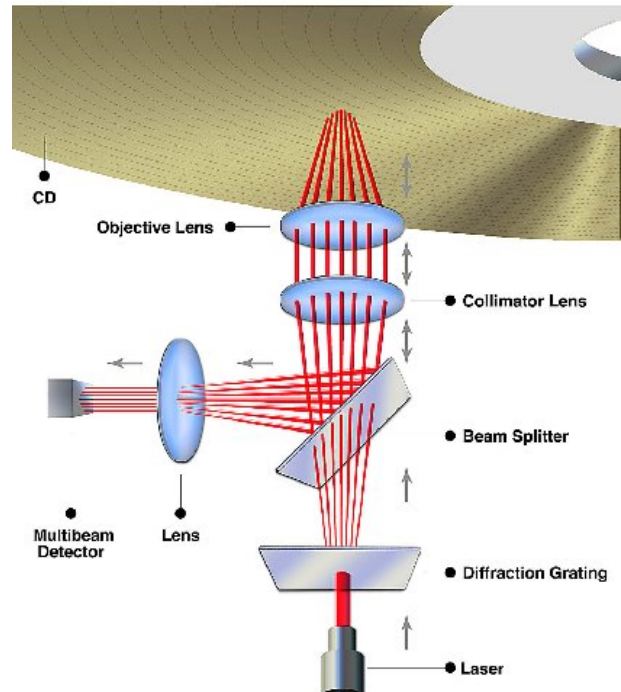


Figura 2: Principio di funzionamento di un lettore CD.

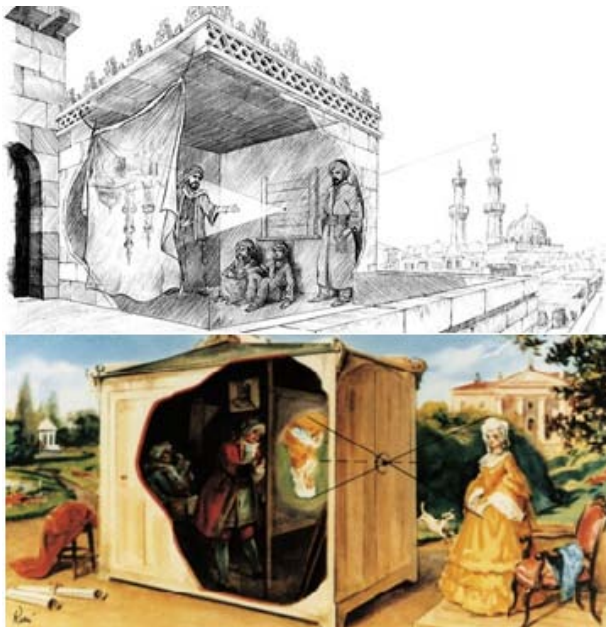
*più breve*

Dal punto di vista matematico è possibile esprimere questo principio dicendo che il seguente integrale

$$\int_A^B n(\mathbf{r}) d\mathbf{l} \quad (1)$$

è un *estremale* attorno al cammino che la luce percorrerà nella realtà. Estremale vuol dire che l'integrale cambia poco se lo calcoliamo lungo un cammino diverso ma vicino a quello reale. Il coefficiente  $n(\mathbf{r})$  è detto indice di rifrazione (superiore a 1) ed è un parametro definito come il rapporto tra la velocità della luce  $c$  nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo  $v$ , ovvero  $c/v$ , e che tiene conto del rallentamento della luce in un mezzo rispetto al vuoto.

Il principio di Fermat, è alla base dell'ottica geometrica e spiega molti fenomeni conosciuti, come ad esempio il perché la luce si propaghi in linea retta nel vuoto. Dati due punti A e B nello spazio la traiettoria di minimo percorso coincide con quello di minimo tempo e non può che essere la retta passante per quei due punti. Questo accade anche in qualsiasi altro mezzo a patto però che l'indice di rifrazione non dipenda dalla posizione  $r$ . Se  $n$  infatti è costante il principio del minimo tempo diventa quello di mini-

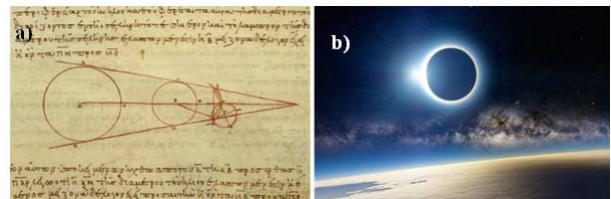


**Figura 3:** Principio di funzionamento della camera oscura, compreso da Alhazen e poi adoperato da molti pittori in occidente per riprodurre su tela immagini esterne di gran precisione.

mo percorso in quanto la velocità della luce non cambia nello spazio. In altre parole possiamo portare n fuori dall'integrale di (1) e l'estremale sarà effettuato sul percorso fisico e non su quello pesato dall'indice di rifrazione, fornendo come risultato un percorso rettilineo. Questo semplice principio spiega come mai le ombre sono nette e perché si formano i coni d'ombra durante una eclisse. Se tutto ciò accade è solo perché la luce descrive delle linee rette nello spazio. Lo sapevano benissimo appunto il musulmano Alhazen e il cristiano Leonardo da Vinci, quando usavano entrambi una camera forata per proiettare una scena reale su un pannello. La scienza supera i confini imposti dalle tradizioni. Se si pratica un forellino in una stanza buia e attraverso di esso passano i raggi luminosi provenienti dall'esterno sulla parete opposta della stanza si vedrà l'ambiente di fuori capovolto. La spiegazione risiede proprio nel principio di cui sopra, come potete vedere dalla figura 3.

Anche la prospettiva si basa sul principio di Fermat. Alla base di questa tecnica pittorica c'è il fatto che un corpo che viene distanziato del doppio apparirà proporzionalmente più piccolo della metà, il che, ovviamente, è una derivazione del moto rettilineo dei raggi luminosi in un mezzo otticamente isotropo. Questo principio è

alla base anche delle eclissi di Sole. Già Aristarco di Samo aveva compreso questo, come potete osservare dalla figura 4a tratta dal libro "sulle dimensioni e le distanze del Sole e della Luna".



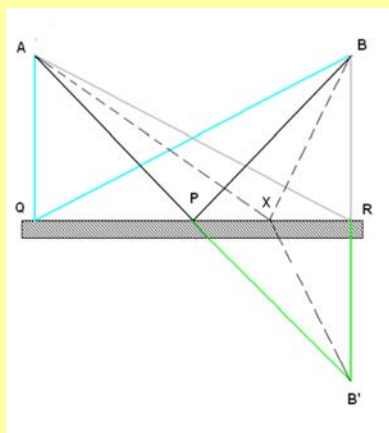
**Figura 4:** a) Schema delle eclissi riportato in una copia dell'unico testo di Aristarco di Samo sopravvissuto alla distruzione della biblioteca di Alessandria "Sulle dimensioni e le distanze del Sole e della Luna". I raggi dimostrano che Aristarco conosceva benissimo l'ottica geometrica. b) L'eclisse di Sole funziona a causa del principio di Fermat e dell'evento casuale per cui la luna è 390 volte più vicina del Sole alla Terra, ma anche 390 volte più piccola.

Nel lettore CD rom di fig. 2 la luce viene sia riflessa da degli specchi e sia rifratta da delle lenti. Come mai? La spiegazione risiede ancora nel principio di Fermat, fornita per entrambi i fenomeni rispettivamente nei Box 1 e 2.

Il principio del tempo minimo descrive perfettamente il perché la lente ha la forma appunto di "lenticchia". Infatti ci si può chiedere: esiste un congegno fatto di un pezzo di materia come il vetro che riesce a deviare i raggi di luce in modo da concentrarli tutti in un punto per accumulare lì l'energia ad esempio dei raggi solari? Perché ciò accada è ovvio che se da A si diramano tanti raggi di luce che devono convergere tutti nel punto B allora essi dovranno impiegare lo stesso tempo. Un corpo avente spessore costante non sarebbe adatto in quanto al suo interno la luce impiegherebbe lo stesso tempo, ma al di fuori di esso i raggi incidenti percorrerebbero tratti più o meno inclinati a partire dalla sorgente in A e perciò impiegherebbero tempi diversi. E' necessario allora che i tragitti più corti siano rallentati maggiormente di quelli più lunghi. Il raggio più breve, quello assiale, dovrà attraversare il tratto di vetro maggiore per essere rallentato nella giusta misura. Una soluzione possibile è una lente biconvessa, ovvero un disco di vetro bombato al centro, a forma appunto di lenticchia. Nel lettore CD le lenti servono a focalizzare il fascio laser in poche centinaia di micron quadrati, riuscen-

### Box 1: riflessione nell'ottica geometrica

Prediamo una superficie piana metallica come l'argento, di cui sono fatti appunto gli specchi, e analizziamo come mai la luce si riflette. Inviamo un raggio di luce dal punto A al punto B mediante una riflessione su uno specchio e chiediamoci: qual'è il percorso AXB più breve? E' quello in cui X è uguale a P ed è proprio al centro? Oppure è quello in cui X=Q, o quello in cui X=R, o uno intermedio? Ebbene non è semplice rispondere a questo quesito perché, se ad esempio spostiamo il punto X verso destra rispetto a P, (come nel caso del percorso tratteggiato) il tratto AX aumenta mentre XB diminuisce. Non possiamo dire a priori che AXB è più lungo o più breve di qualsiasi altro, ma un metodo c'è. Proiettiamo il punto B in B' in modo tale cioè che B' sia alla stessa distanza di B dalla superficie superiore dello specchio, cioè  $BR=B'R$ . Ora prendiamo un punto X qualsiasi sullo specchio. E' facile provare che i triangoli rettangoli BXR e B'XR sono uguali avendo gli stessi cateti BR e B'R e il cateto in comune XR. Allora anche le ipotenuse XB e XB' saranno uguali. Quindi, essendo AX comune a tutti i percorsi, chiedersi quale percorso AXB sia il più breve equivale a chiedersi quale percorso AXB' sia il più breve. E' ovvio che di tutti questi percorsi il più breve sarà il percorso APB', che è una retta. X cioè deve stare al centro, ovvero in P. Ma se APB' è una retta allora i due angoli APQ e B'PR sono uguali in quanto opposti al vertice P. Infine essendo i triangoli B'PR e BPR uguali anche gli angoli corrispondenti B'PR e BPR saranno uguali tra loro. In definitiva concludiamo che l'angolo  $APQ=BPR$ . Cioè l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione. Che è la ben nota legge degli specchi.



do a localizzare un punto da leggere sul CD con maggior precisione, garantendo così la possibilità di introdurre più dati leggibili sulla stessa superficie. Ma la luce non è solo un tragitto. E' anche colore, intensità. Come possono essere spiegate queste caratteristiche? Circa l'intensità essa non è altro se non la densità di raggi che attraversa una data superficie. Laddove i raggi si addensano l'intensità diventa grande. Il discorso è molto simile a ciò che accade nel caso del rapporto tra campo elettrico e linee di forza. Laddove le linee si addensano il campo è maggiore. L'associazione non è casuale. Infatti un

altro modo equivalente di esprimere il principio di Fermat è di introdurre la superficie S. Tale superficie corrisponde al fronte d'onda ovvero il luogo dei punti che vibrano in fase e che risulta perpendicolare ai raggi luminosi. E' possibile dimostrare in modo molto semplice che il principio di Fermat è equivalente a dire che

$$|\nabla S| = n(\mathbf{r}) \quad (2)$$

Questa equazione è detta *equazione Iconale*, e mostra come l'indice di rifrazione determini la direzione dei raggi luminosi, che è espressa appunto dalla direzione del gradiente del fronte

## Box 2: rifrazione nell'ottica geometrica

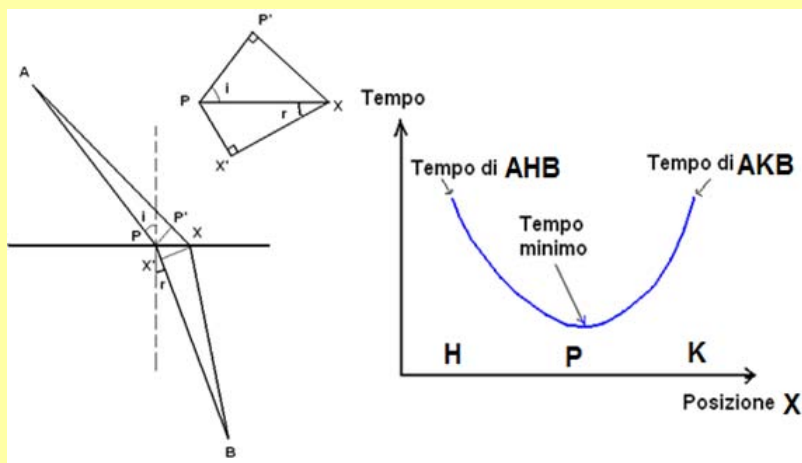
Se disegnassimo il tempo di percorrenza di ogni percorso in funzione della posizione del punto B dovremmo trovare un grafico del tipo mostrato in Fig.B2.b in cui il tempo richiesto non cambia tanto attorno al tragitto reale (in P). Prendiamo pertanto la curva reale che la luce segue, ovvero APB. Immaginiamo di scostarci di poco e seguiamo il percorso AXB. Poiché X è molto vicino a P il tempo di percorrenza sarà simile per quanto detto prima. Se proiettiamo il punto P sul raggio AX trovando P' e lo stesso facciamo con X sul raggio PB trovando X' individueremo due triangoli rettangoli, PP'X e PXX' che disegniamo ingranditi a parte. Ora poiché i tempi di percorrenza saranno simili, ed essendo AP e AP' praticamente uguali così come BX e BX', ecco che anche P'X e PX' saranno percorsi praticamente nello stesso tempo, ovvero

$$\frac{P'X}{c} = \frac{PX'}{v}$$

Però osservando i triangoli disegnati a parte osserviamo che  $P'X = PX \sin(i)$  e  $PX' = PX \sin(r)$ , quella uguaglianza diventa

$$\sin(i) = \frac{c}{v} \sin(r)$$

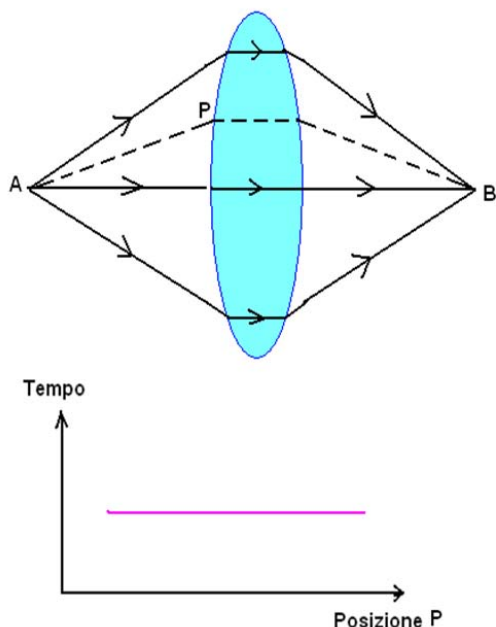
che è proprio la legge di Snell a patto di individuare in  $c/v$  proprio l'indice di rifrazione  $n$ .



d'onda S. Sappiamo che il campo elettrico è esprimibile a meno di un segno come il gradiente del potenziale elettrico, per cui possiamo dire che formalmente S sta al potenziale elettrico come  $n$  sta al modulo del campo elettrico. Ma cosa è il colore nella teoria dell'ottica geometrica? Ebbene poiché ogni colore viene rifratto ad angoli diversi possiamo dire che il colore esprime il grado di rifrazione di un raggio, ma nulla di più, come propose Newton [1]. La teoria dell'ottica geometrica è formidabile ma ci sono fenomeni che non si riescono davvero a spiegare.

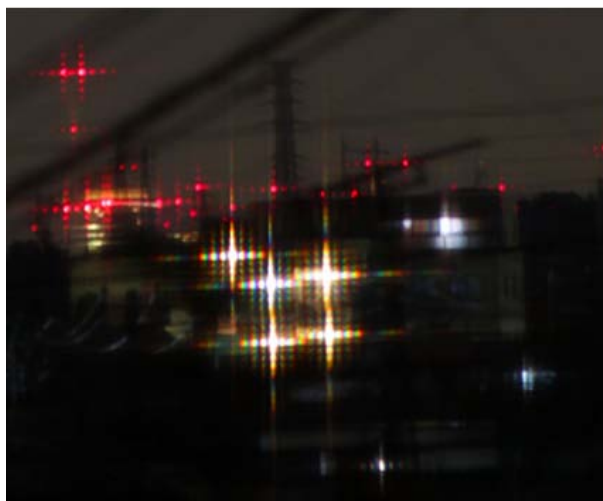
## La luce è fatta di “raggi di onde”: l'ottica ondulatoria

La luce si muove in linea retta se il mezzo non cambia indice di rifrazione. E' un principio così semplice che potremmo domandarci: e cos'altro avrebbe potuto fare la luce? Eppure il principio di minimo percorso non spiega un fenomeno comune che spesso accade e che osserviamo ma di cui spesso non ci domandiamo la causa. Se siete seduti di sera vicino ad una finestra dotata di una zanzariera o di una tenda e riuscite ad osservare un lampione acceso vedrete una strana figura (Figura 6), come se il lampione venisse



**Figura 5:** Principio di funzionamento di una lente biconvessa. Il tempo che impiegano i raggi a focalizzarsi è lo stesso.

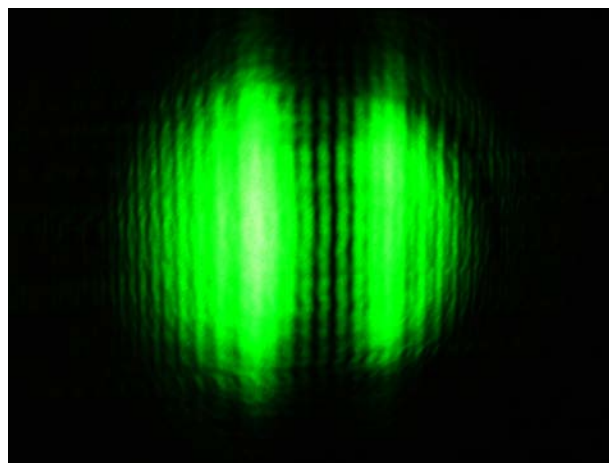
riprodotto ai lati formando una sorta di croce con zone luminose e buie. Rimossa la tenda o la zanzariera vedrete solo il lampione. Vi siete mai chiesti perché la luce del lampione si comporta in questo modo?



**Figura 6:** Interferenza e diffrazione della luce emessa da un lampione attraverso una tenda.

Il principio di minimo percorso non spiega questo fenomeno, chiamato interferenza. Se riuscite a procurarvi un laser potete fare degli esperimenti che vi lasceranno sconcertati e che sono collegati a quella figura che la luce del lampione

crea passando attraverso la tenda. Se accendete il Laser vedrete un raggio luminoso perfettamente rettilineo. Segue il principio di minima percorrenza, nulla di nuovo. Fate però attraversare il raggio laser attraverso la fessura creata tra due dita unite tra loro, ad esempio l'indice e il medio. Tale fessura cambia di larghezza perché in alcuni punti le dita combaciano meglio e in altri meno. Muovendo il raggio lungo la fessura vi accorgete che fintanto che la fessura è larga vi apparirà un punto luminoso sulla parete, ma quando diventa piccola quel punto diventa slargato e appaiono zone consecutive luminose e buie. Se vi procurate un capello e lo disponete in verticale e gli inviate contro il raggio laser ecco che non vi apparirà un'ombra rettilinea, corrispondente al capello, ma delle zone chiare e scure come in Fig.7. Come mai la zona luminosa si espande e appaiono zone chiare e scure?



**Figura 7:** Interferenza e diffrazione della luce laser diffusa da un capello.

Inizia a venirci un dubbio: forse avevamo torto nell'ammettere che la luce segue il percorso più breve o di minimo tempo? Dovremmo forse modificare questa semplice idea che pure spiegava tantissimi fenomeni attorno a noi? Come spiegare quella periodicità nelle frange luminose e buie? Hans Christian Huygens e dopo di lui Thomas Young proposero che la luce fosse costituita da onde [2]. Huygens ipotizzò che la luce fosse costituita da un'onda in quanto se fosse fatta di corpuscoli che viaggiano di moto rettilineo nell'aria due raggi che si incrociano si perturberebbero a vicenda. E invece ciò che osserviamo è che essi continuano a percorrere due traiettorie rettilinee. Ma cosa è un'onda? Dal punto di vista

matematico un'onda  $U(\mathbf{r},t)$  è una funzione dello spazio e del tempo che soddisfa la seguente equazione, detta appunto equazione d'onda

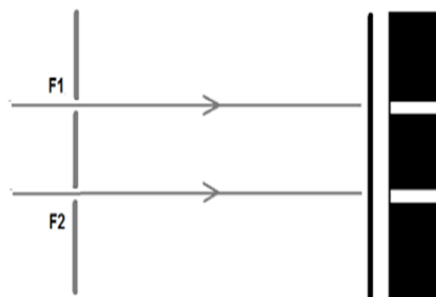
$$\nabla^2 U(\mathbf{r},t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

dove  $v$  è la velocità di propagazione dell'onda. La lunghezza d'onda è la distanza tra due creste vicine dell'onda ed è indicata con la lettera greca  $\lambda$ . Abbiamo visto come nella teoria geometrica l'intensità fosse la densità spaziale dei raggi e il colore il grado di rifrazione. Nella teoria ondulatoria della luce invece il colore non è altro che la lunghezza d'onda: il blu si aggira attorno a lunghezze d'onda di 400nm, il verde di 500nm e il rosso di 600nm; l'intensità invece, l'energia dell'onda luminosa, non è altro se non il modulo quadro dell'ampiezza, ovvero  $I = |U|^2$ , come in qualsiasi onda che si rispetti. L'energia trasportata da un'onda di mare ad esempio sarà proporzionale al quadrato della sua ampiezza.

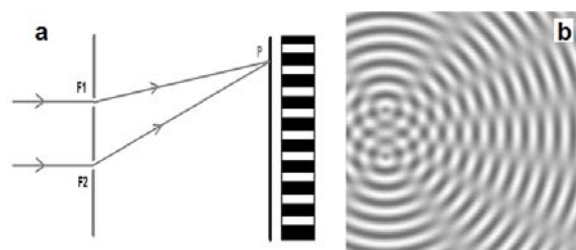
Un aspetto importante della equazione (3) è che, prese due soluzioni  $U_1$  e  $U_2$ , una qualsiasi loro combinazione lineare è ancora soluzione. Questo è il ben noto *principio di sovrapposizione*. Possiamo adoperare questa matematica per descrivere i fenomeni osservati attraverso la zanzariera? E come si inquadra il principio di Fermat in questa nuova teoria? Thomas Young propose il seguente esperimento della doppia fenditura [2], divenuto ormai famoso. Prendiamo una superficie, praticiamo due fenditure molto strette e vicine tra loro e inviamo un fascio luminoso. Cosa ci aspettiamo di osservare su uno schermo posto dall'altra parte? Si potrebbe pensare: due strisce luminose! E del resto questa sarebbe la risposta corretta se la luce seguisse sempre il principio di minima percorrenza. E questo è in effetti ciò che osserveremmo con fenditure troppo distanti e larghe (da qualche millimetro in su).

Ma le cose stanno diversamente se proviamo ad avvicinare le fenditure sino a valore di qualche decimo di millimetro. Quel che osserveremo è mostrato in fig. 9, ovvero della frange di interferenza periodiche chiare e scure distribuite sul pannello.

Una teoria geometrica non può spiegare nulla di tutto questo ma una teoria ondulatoria sì. Vediamo come. Le due onde  $U_1$  e  $U_2$  (di intensità



**Figura 8:** Due raggi di luce laser che attraversano due fenditure molto grandi e lontane produrranno due strisce luminose su uno schermo.



**Figura 9:** Due raggi di luce laser che attraversano due fenditure molto piccole e vicine produrranno una figura di interferenza come due sorgenti che creano delle increspature su una superficie di acqua.

$I_1$  e  $I_2$ ) partono dalle fenditure  $F_1$  ed  $F_2$  rispettivamente (Fig.8 e 9) e là dove si intersecano esse si sommeranno algebricamente dando origine ad un'onda pari a  $U_1+U_2$ . Pertanto avremo che l'intensità totale  $I$ , nel punto P della figura, è pari a

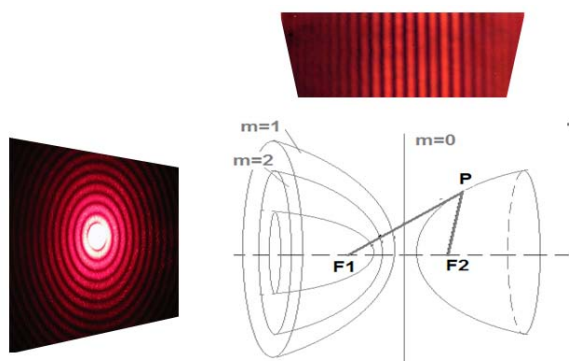
$$I = |U_1 + U_2|^2 = I_1 + I_2 + 2U_1 * U_2 \quad (4)$$

Come si vede luce+luce non sempre fa luce, a volte fa buio! La causa? Il principio di sovrapposizione e la proporzionalità quadratica dell'intensità dall'ampiezza. Infatti se il terzo addendo, detto *termine di interferenza*, è negativo l'intensità totale è inferiore alla somma delle due intensità, a tal punto che può anche annullarla. Se invece il termine è positivo l'intensità luminosa finale può perfino essere superiore a  $I_1+I_2$ . Quando accade ciò? Se i tratti  $F_2P$  ed  $F_1P$  differiscono tra loro di un tratto che è un semplice multiplo di una lunghezza d'onda le onde si rafforzeranno dando

una interferenza costruttiva e più luce; se invece differiranno di mezza lunghezza d'onda la cresta di un'onda si sommerà con la valle dell'altra dando somma nulla e producendo interferenza distruttiva (le zone buie). Tutto dipende pertanto dalla differenza del cammino dei due raggi, dalla distanza tra le fenditure, dalla lunghezza d'onda, e ovviamente dall'ampiezza delle due onde. In particolare avremo i massimi ( $U_1 \cdot U_2$  positivo) quando

$$F_2P - F_1P = m \frac{\lambda}{2} \quad (5)$$

mentre i minimi ( $U_1 \cdot U_2$  negativo) in mezzo. La periodicità delle zone chiare e buie dipende dalla presenza di quell'intero  $m$ , che vale 0, 1, 2 ecc. L'intero trae origine a sua volta dalla periodicità intrinseca al fenomeno ondulatorio. Per la luce blu questa differenza è più piccola che per luce verde che a sua volta è più piccola che per la luce rossa. Ecco perché la lunghezza d'onda è un parametro che tiene conto del colore e che diventa sempre più piccolo quanto più ci spostiamo dal rosso (600nm) al blu (400nm) attraverso lo spettro, traslando nei fatti la posizione delle frange. La situazione è del tutto identica a ciò che accade all'interferenza prodotta da delle onde d'acqua in fig. 9b. Eppure c'è di più. La formula scoperta sopra ci sta dicendo che il luogo dei punti  $P$  dello spazio che distano da due punti  $F_1$  ed  $F_2$  (che rappresentano due sorgenti puntiformi) è una quantità costante (dipendente solo dal colore della luce).



**Figura 10:** Due sorgenti puntiformi coerenti di luce raggio di luce produrranno degli iperboloidi di rotazione con i fuochi disposti nelle sorgenti. A seconda di dove collochiamo gli schermi ci sarà interferenza circolare o frange pressappoco rettilinee.

Ogni coppia di iperboloidi è data una volta che  $m$  sia fissato. Più grande è  $m$  e più curvi risultano gli iperboloidi. Per  $m=0$  invece essi collassano in un piano. In Fig. 10 ho rappresentato entrambi i due rami di iperboloidi corrispondenti a  $m=2$ . Ecco allora un bel modo per ricavare la forma dei massimi e dei minimi su un piano qualsiasi. Se prendiamo un piano parallelo ma molto distante dalle due sorgenti esso intersecherà tutti gli iperboloidi meno curvi e i massimi appariranno come delle strisce perpendicolari alla direzione  $F_1$ - $F_2$ . Supponete adesso di prendere un piano perpendicolare alla retta che passa per i fuochi  $F_1$  ed  $F_2$ . L'intersezione di questo con gli iperboloidi a sinistra della figura darà origine a delle frange circolari. Questa previsione è confermata costruendo interferometri, facendo riflettere uno stesso raggio di luce su uno specchio semiriflettente che produce così un raggio sdoppiato e "simulando" la presenza di due sorgenti. Se invece di una sorgente monocromatica (cioè di un solo colore) inviamo contro le fenditure luce bianca, come quella del Sole, dovremmo trovare i massimi del rosso, del verde e del blue in posizioni leggermente spostate tra loro. Quindi potremmo non vedere più i minimi in quanto nel minimo di un colore cadrebbe il massimo di un altro. Insomma dall'altra parte dello schermo osserveremmo tante frange colorate invece di minimi e massimi. Ed è proprio quel che si osserva provando a osservare il cielo nelle regioni vicino al Sole e chiudendo le palpebre dei vostri occhi di modo da sovrapporre le ciglia, come quando, stando al mare stesi sulla spiaggia, chiudete gli occhi perché il sole vi dà fastidio. Provateci dunque e vedrete attorno alle vostre ciglia tutti i colori dell'arcobaleno. Ebbene le fessure tra le ciglia si stanno comportando come piccole fenditure che vi scompongono la luce solare nei vari colori di cui è fatta. Resta tuttavia una domanda: se la luce è un'onda come si spiega il principio di Fermat? Ebbene l'onda può sempre essere espressa a meno di un fattore di fase che contiene  $S$ .

$$U(r, t) = U(r) e^{i\omega t} e^{ikS} \quad (6)$$

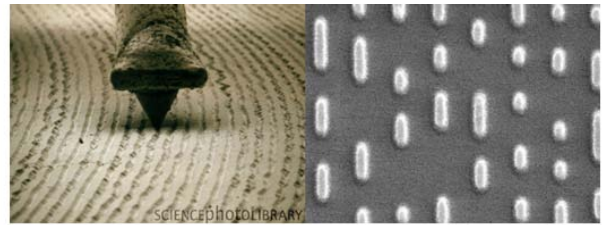
Sostituendo questa soluzione nella equazione d'onda vien fuori che l'equazione iconale è solo una approssimazione di una equazione più generale, che tiene conto dell'effetto ondulatorio



$$|\nabla S|^2 = n(\mathbf{r})^2 + \frac{\nabla^2 U(\mathbf{r})}{U(\mathbf{r})} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \quad (7)$$

L'addendo aggiuntivo diventa determinante per valori di lunghezza d'onda grandi rispetto alle dimensioni degli oggetti investiti dall'onda. Nel caso della luce visibile dimensioni di alcuni micron sono già sufficientemente piccole per vedere deviazioni della equazione iconale e dunque processi di interferenza o diffrazione. Questa equazione ci fa capire come l'ottica geometrica sia una sottoclasse dell'ottica ondulatoria. Ad esempio se inviamo luce contro un palo la lunghezza d'onda è molto piccola rispetto alle dimensioni del palo e si formerà un'ombra netta in quanto il secondo addendo nella 7 è trascurabile. Ma se le dimensioni diventano piccole come un capello il termine ondulatorio inizia a crescere e vedremo effetti sia di interferenza che di diffrazione. Cosa c'entra questo con un CD? Ebbene la quantità di dati inserita nel CD dipende da dei solchi che vengono scavati comunemente mediante un processo di litografia, che prevede l'uso di una maschera e di luce ultravioletta. Questi solchi saranno netti solo se risulteranno sufficientemente grandi rispetto alla lunghezza d'onda della luce usata di modo che il termine ondulatorio nella equazione iconale non diventi grande. Un CD è molto simile ad un disco in vinile ma mentre il primo viene letto da una puntina il secondo è letto da un Laser che riesce a percepire la presenza o meno di solchi a loro volta generati da altra luce durante il processo litografico. La luce ultravioletta pone pertanto un limite di dimensioni minime ai solchi e dunque alla quantità di dati inserita nel CD. Questo è un problema non da poco nell'industria dell'elettronica integrata. I Chip infatti vengono prodotti usando tecniche fotolitografiche, che però hanno un limite intrinseco dato dal termine ondulatorio dell'equazione (7). La miniaturizzazione, alla base del prodigioso sviluppo dei personal computers, non può più proseguire pertanto seguendo vie convenzionali. Uno dei compiti delle nanotecnologie e della fotonica è proprio quello di trovare vie non convenzionali alla realizzazione di dispositivi che collochino ed elaborino più dati a parità di superficie.

La teoria ondulatoria della luce parrebbe quella definitiva. Eppure manca ancora qualcosa.



**Figura 11:** Solchi in un disco di vinile e in un CD-ROM. Le dimensioni dei solchi in un CD sono ai limiti del termine ondulatorio della equazione iconale.

Infatti processi semplici come l'intensità della luce riflessa da un pezzo di vetro non possono essere spiegati da una semplice teoria ondulatoria. E' quello che vedremo ora con la teoria elettromagnetica della luce. E partiremo da una domanda che ci condurrà fino alla relatività: *se la luce è un'onda, allora cosa è che ondeggia?*

## Maxwell: La luce è un'onda elettromagnetica

Il XVIII e il XIX secolo sono stati di importanza capitale per la comprensione delle proprietà dell'elettricità e del magnetismo. Due teorie in lotta tra loro, e che troppo spesso vengono raccontate come fossero la stessa teoria nei libri scolastici e universitari, si contendevano lo status di spiegazione ultima di tali fenomeni. Da un lato vi erano i vari Coulomb e Ampère, propositori della *teoria dell'azione a distanza*, una teoria che era stata sviluppata a immagine e somiglianza della teoria della gravitazione universale di Newton. Dall'altra vi erano Faraday e Maxwell, i quali proposero una visione nuova: *la teoria di campo*. La differenza non era solo formale ma sostanziale. I primi vedevano cariche e correnti che interagivano *nel* e *attraverso* il vuoto, concepito come l'assenza di tutto tranne che dell'estensione geometrica. Le forze con cui cariche e correnti interagivano erano alla base dei fenomeni elettrici e magnetici ed erano governate da leggi a distanza come la legge di Coulomb tra cariche elettriche. Faraday e Maxwell, invece, nello spazio tra le cariche o tra le correnti, vedevano un mezzo che chiamarono *etere*, il quale era responsabile della trasmissione della forza elettrica e magnetica. Questo mezzo fu poi battezzato più propriamente *campo elettromagnetico*. In questa teoria una carica  $Q_A$  (o una

corrente  $I_A$ ) non interagisce a distanza e all'istante con una carica  $Q_B$  (o una corrente  $I_B$ ) ma con il campo elettrico (magnetico) prodotta da questa. Le due scuole vedevano gli stessi fenomeni ma li interpretavano in modi opposti. Tuttavia la teoria di campo di Faraday e Maxwell faceva una previsione: una carica o una corrente può agire su un'altra carica o corrente solo dopo un tempo dato dalla velocità della luce. Tali equazioni furono pubblicate per la prima volta da Maxwell nel 1865, ben 150 anni fa, nel *"Treatise on Electricity and Magnetism"*, che è per l'elettromagnetismo ciò che i *"Principia Philosophiae naturalis"* furono per la meccanica e decretarono la fine della teoria dell'azione a distanza e l'inizio di una nuova era. Eccole riportate in fig.12.

And God said:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

And there was light.



**Figura 12:** Le quattro equazioni di Maxwell. In figura è riportata la frase della genesi "E dio disse sia la luce e la luce fu" a memoria del fatto che le equazioni di Maxwell prevedono l'esistenza della luce come fenomeno elettromagnetico.

La prima equazione ammette l'esistenza di monopoli elettrici, ovvero l'esistenza di cariche elettriche ( $\rho$  nella equazione esprime la densità volumetrica di carica elettrica), che sono le responsabili dell'esistenza dei campi elettrici  $\mathbf{E}$ . La seconda equazione è la legge di induzione di Faraday. Essa esprime un fenomeno molto interessante e che è alla base dei moderni generatori di corrente: un campo magnetico  $\mathbf{B}$  variabile nel tempo è anche esso sorgente di un campo elettrico  $\mathbf{E}$ . Questa è una delle equazioni più potenti ed eleganti della storia della fisica perché esprime l'idea secondo cui un campo può generare un altro campo. La terza esprime l'idea che non esistono i monopoli magnetici, ovvero che suddividendo una calamita non si può mai ottenere un singolo polo magnetico, ma si otterranno sempre due calamite, con un polo nord e un polo sud. Infine la quarta equazione, detta di Ampere-Maxwell esprime l'i-

dea secondo cui una densità di corrente  $\mathbf{J}$  crea un campo magnetico  $\mathbf{B}$  (esperimento di Oersted), ma anche che una variazione temporale di un campo elettrico  $\mathbf{E}$  può essere responsabile di un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Queste equazioni descrivevano esattamente ciò che le contemporanee teorie di azione a distanza descrivevano nel limite statico, ma in modo molto più semplice, intuitivo e visualizzabile, mediante il concetto intermedio di linee di forza. Ma esse contenevano qualcosa in più. Manipolando infatti le equazioni, Maxwell provò che, in assenza di sorgenti fisiche di cariche elettriche e correnti, esse soddisfacevano una equazione d'onda del tipo

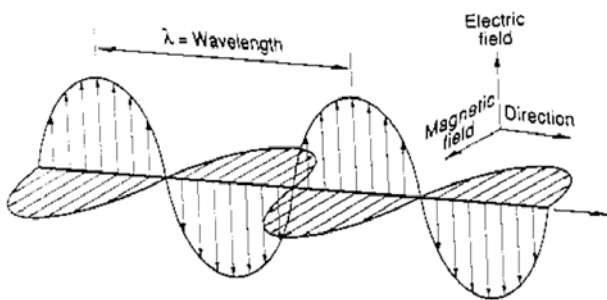
$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \nabla^2 \mathbf{B} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (8)$$

Dove  $\epsilon$  e  $\mu$  sono la permittività e suscettibilità elettrica e magnetica del mezzo, incluso il vuoto. Ovviamente queste erano equazioni d'onda a patto di sostenere che la velocità dell'onda fosse, in accordo con l'equazione (3)

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (9)$$

Misurando le costanti di cui sopra con semplici esperimenti di elettrostatica e magnetostatica, si misurò che l'onda in questione viaggia nel vuoto alla velocità di 300000km/sec, la velocità della luce! Questa incredibile scoperta teorica permetteva di prevedere l'esistenza di onde di elettricità e magnetismo, dette onde elettromagnetiche, che viaggiavano proprio alla velocità della luce! Ce n'era abbastanza per iniziare a sospettare che l'onda di luce di Huygens e Young fosse un'onda di elettricità e magnetismo. Come provarlo? C'è un aspetto da non trascurare. Queste onde avevano infatti due caratteristiche molto importanti: anzitutto erano onde trasversali, i campi elettrico e magnetico oscillavano cioè perpendicolarmente alla direzione di propagazione, al contrario del suono, che, nell'aria, è un'onda longitudinale. Secondo, non esisteva un'onda elettrica senza una magnetica. Campo elettrico e magnetico infatti oscillavano sempre insieme, in fase, ed erano per giunta perpendicolari l'uno all'altro. In figura 13 si riporta come si presentano le onde elettromagnetiche piane.

Come provare sperimentalmente l'esistenza delle onde elettromagnetiche e soprattutto come



**Figura 13:** Rappresentazione di un'onda elettromagnetica piana.

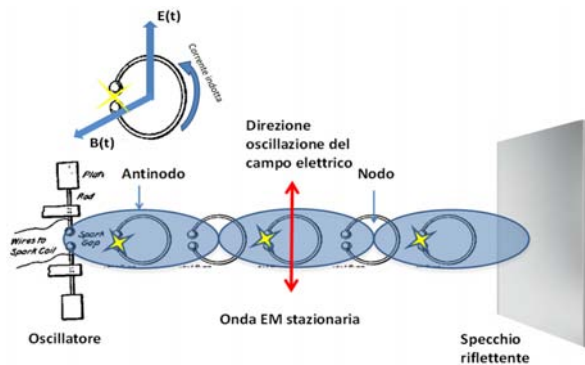
provare in via definitiva che la luce è un'onda elettromagnetica? Fu Heinrich Hertz a condurre il primo esperimento risolutivo nel 1886.

## Le prove: telecomunicazioni e tramonti

Hertz fece scorrere in una sorta di antenna (un oscillatore) una corrente alternata con una certa frequenza (fig. 14), in modo da produrre, stando alle leggi di Maxwell, un'onda elettromagnetica con una polarizzazione del campo elettrico (la direzione di oscillazione) parallela all'antenna. Dall'altra parte, a parecchi metri di distanza dall'oscillatore, dispose uno specchio metallico che consentisse alle onde elettromagnetiche, stando alle previsioni delle equazioni suddette, di essere riflesse indietro e generare onde stazionarie. E' un po' come la corda di chitarra che è tenuta ferma ai due nodi estremi e vien fatta oscillare. Tuttavia Hertz sapeva benissimo che, data la distanza tra antenna trasmittente e specchio, se si fossero formate onde stazionarie vi sarebbero stati punti dello spazio tra l'oscillatore e lo specchio in cui l'onda non oscillava affatto (i cosiddetti nodi), e altri (detti antinodi) in cui le oscillazioni del campo elettrico erano massime. Notate che nei nodi anche il campo magnetico **B** (perpendicolare a **E**) non oscilla affatto ed è nullo, mentre negli antinodi è massimo, a causa del fatto che **E** e **B** oscillano, come detto, in fase. Le onde non sono visibili, l'unica cosa che vediamo sono l'oscillatore, ovvero l'antenna, e uno specchio. Come provare l'esistenza di cose invisibili? Attraverso l'effetto che producono. E Hertz fu un genio in questo. Conosceva la frequenza  $\nu$  di oscillazione delle cariche (in quanto

aveva impostato lui tale frequenza), e sapeva che la frequenza delle onde prodotte, stando alle leggi di Maxwell, avrebbe dovuto essere la stessa, per cui i nodi avrebbero dovuto trovarsi ad una distanza dallo specchio di un multiplo di mezza lunghezza d'onda (ricordo che la lunghezza d'onda è pari alla velocità della luce diviso la frequenza dell'onda,  $\lambda=c/\nu$ ), ovvero nei punti distanti  $\lambda/2$ ,  $\lambda$ ,  $3\lambda/2$  dallo specchio. Gli antinodi avrebbero invece dovuto trovarsi tra questi. Ad esempio per una frequenza di 37,5 MHz (la frequenza usata da Hertz) la lunghezza d'onda è pari a 8 metri. Quindi il primo antinodo era a 2 metri dallo specchio, a 4 metri vi era un nodo, a 6 metri vi era un altro antinodo e così via. Disponendo un anello circolare conduttore nei nodi, non ci sarebbe stata alcuna oscillazione del campo magnetico. Dunque, per la legge di Faraday (un campo magnetico variabile crea una corrente in un conduttore chiuso), non potrà esserci nessuna corrente indotta nell'anello. Disponendo invece tale anello nei massimi, ovvero negli antinodi, ci sarebbe stato un campo magnetico oscillante (cioè variabile nel tempo) intenso. A patto di disporre l'anello perpendicolarmente a **B**, e quindi nel piano in cui oscilla **E**, si sarebbe vista una corrente indotta. Ma Hertz invece di usare un anello chiuso ne usò uno con un piccolo taglio. La corrente indotta avrebbe così generato un accumulo di cariche alle estremità tali da provocare una scintilla. Immaginate l'effetto visivo: disponete tanti anelli recanti un piccolo taglio come in figura 14, in corrispondenza di quei valori che vi ho detto e perpendicolarmente alla direzione del supposto campo magnetico. Inviare nell'oscillatore una corrente oscillante per produrre le famigerate e invisibili onde e vedrete un anello che non produce nulla, uno che produce una vistosa scarica, quello successivo nulla, quello adiacente a questo ancora una scintilla e via dicendo! E' la conferma che le onde elettromagnetiche della teoria di Maxwell esistono per davvero!

Va precisato però che Hertz non provò affatto che la luce fosse un'onda elettromagnetica, ma al contrario che le onde elettromagnetiche esistevano e che, indipendentemente dalla loro frequenza, si comportavano seguendo le leggi di un raggio di luce ordinario. Provò infatti che le onde da lui prodotte viaggiavano alla velocità



**Figura 14:** *Esperimento di Hertz sulle onde elettromagnetiche. L'oscillatore produce un'onda di pari frequenza, la quale, riflettendosi su di uno specchio riflettente di onde lunghe, genera onde stazionarie presentanti dei nodi localizzati a distanze di mezza lunghezza d'onda. Collocando degli anelli metallici nei nodi non si osserva nulla. Ma traslandoli negli antinodi si osserva corrente indotta (o una scarica nel caso in cui gli anelli rechino una fenditura. Questo avviene purché gli anelli giacciono nel piano di oscillazione del campo elettrico, di modo che il campo magnetico, perpendicolare ad esso, produca corrente indotta a causa della legge di Faraday (figura in alto).*

della luce (come la luce), che si riflettevano sui metalli (come la luce), che si rifrangevano attraverso mezzi più densi seguendo la legge di Snell (come la luce) e che era possibile polarizzarle (come la luce). Del resto avrebbe potuto essere una coincidenza. In fondo anche le onde gravitazionali (appena scoperte) viaggiano alla velocità della luce e sono onde trasversali (polarizzate) ma non ci sogneremmo mai di dire che la luce è un'onda gravitazionale! La dimostrazione che la luce è un'onda trasversale di elettricità e magnetismo vien fuori analizzando come cambiano i campi nel passaggio da un mezzo ad un altro, come aria e acqua o vetro. Usando le equazioni di Maxwell e riconoscendo che l'indice di rifrazione diventa nella teoria di Maxwell la radice quadrata della costante dielettrica relativa del mezzo ( $n = \sqrt{\epsilon_r}$ ), è possibile calcolare il rapporto  $r$  tra il modulo quadro del campo elettrico riflesso e il quello del campo incidente nonché il rapporto  $t$  tra il modulo quadro del campo elettrico trasmesso (o rifratto) e quello incidente, tra due mezzi diversamente densi. Si può fare questo conto (ed è in effetti l'aspetto più interessante) anche in funzione dell'angolo di incidenza del fascio.

Quelle che si ottengono sono le cosiddette leggi di Fresnel per le onde elettromagnetiche. Queste equazioni in particolare tengono conto anche della polarizzazione del campo elettrico.

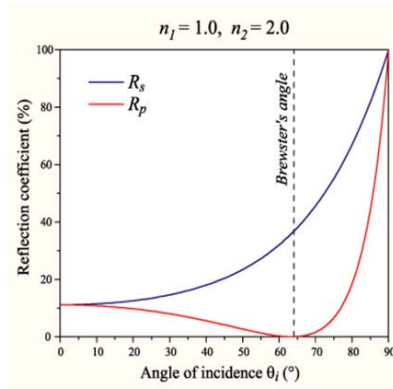
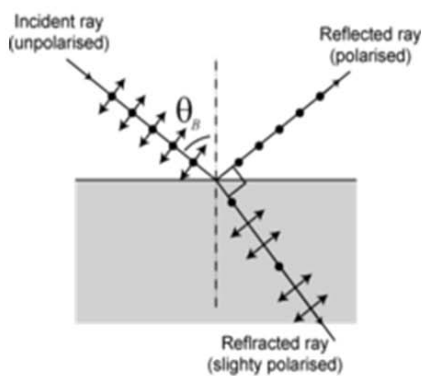
In Fig. 15 un'onda elettromagnetica colpisce la superficie di separazione tra aria e un dielettrico di indice di rifrazione  $n$  producendo un raggio riflesso e uno rifratto. Le due componenti polarizzate perpendicolarmente e parallelamente al piano di incidenza saranno riflesse e trasmesse in modi diversi a causa delle leggi di Maxwell calcolate tra due mezzi con diversa costante dielettrica (*boundary conditions*). L'intensità dell'onda riflessa e trasmessa dipenderà dall'angolo di incidenza. In fig. 15 b potete osservare come variano i coefficienti di riflessione al variare dell'angolo di incidenza per i due campi con oscillazione parallela al piano di incidenza ( $p$ ) e perpendicolare a questa ( $s$ ). Come vedete per piccoli angoli di incidenza (minori di  $30^\circ$ ) la riflettività resta pressoché costante. Se il mezzo su cui l'onda si riflette è il vetro tale percentuale è pari a circa il 4% per svariate lunghezze d'onda. Dopo di che quella dovuta al campo parallelo al piano di incidenza ( $p$ ), indicato con le frecce in figura 15a, diminuisce fino ad annullarsi per poi risalire, mentre quella dovuta al campo perpendicolare, indicato con i puntini in Fig. 15a, aumenta sempre con l'angolo di incidenza. L'angolo a cui il campo parallelo riflesso si annulla si chiama angolo di Brewster e si ha quando

$$\operatorname{tg}\theta_B = n \quad (10)$$

per una riflessione dall'aria al mezzo dielettrico, e

$$\operatorname{tg}\theta_B = 1/n \quad (11)$$

per una riflessione dal mezzo dielettrico all'aria. Bisogna fare esperimenti sofisticati per vedere all'opera queste leggi? No. Infatti sono le stesse leggi che la luce segue. E questo dimostra in modo incontrovertibile che la luce è un'onda elettromagnetica. Osservate la luce riflessa sul pavimento di casa da una finestra (Fig. 16a) e vi renderete conto che, avvicinandovi alla finestra, la luce diminuirà repentinamente di intensità in quanto l'angolo di incidenza sul pavimento diminuirà dello stesso grado. In particolare accadrà che la luce apparirà polarizzata all'ango-



**Figura 15:** a) A sinistra, raggi incidente, riflesso e trasmesso (o rifratto) su uno strato di materiale dielettrico. All'angolo di Brewster ( $\theta_B$ ) delle due polarizzazioni perpendicolare (puntini) e parallelo (freccie) al piano di incidenza individuato dal piano di giacenza dei raggi subiscono delle modifiche sostanziali. Infatti la luce riflessa sarà polarizzata solo perpendicolarmente al piano di incidenza. b) A destra, coefficienti di Fresnel in funzione dell'angolo di incidenza.  $R_p$  indica l'intensità relativa della luce riflessa con polarizzazione parallela al piano di incidenza. Con  $R_s$  è indicata l'intensità relativa della luce riflessa e polarizzata perpendicolarmente.

lo di Brewster, come potrete verificare con un semplice filtro polaroid.

Un secondo fenomeno è la riflessione del sole sulla superficie del mare al tramonto (Fig. 16b). La luce sembra aumentare di intensità man mano che il riflesso si avvicina all'orizzonte. Questo accade per due motivi: affinché i raggi paralleli provenienti dal sole giungano nell'occhio dell'osservatore gli angoli di incidenza aumenteranno man mano che si volge lo sguardo verso il Sole, e le leggi di Fresnel dicono che all'aumentare di tale angolo aumenta la luce riflessa totale. Il secondo motivo, concomitante al primo, è che ci sono delle increspature periodiche sulla superficie del mare (le onde) che appariranno più dense verso l'orizzonte e più distanti vicino a noi per un effetto prospettico. Curioso che la maggior parte delle risposte al perché l'intensità luminosa sembra aumentare volgendo lo sguardo verso l'orizzonte siano quasi tutte del tipo "perché ci avviciniamo alla sorgente, il sole" senza specificarne il senso. Invece dipende dalla prospettiva e dalle leggi di Fresnel, dirette conseguenze delle equazioni di Maxwell. Anche un arcobaleno apparirà polarizzato perché l'angolo a cui la luce è dispersa e riflessa dalle gocce si aggira intorno ai  $42^\circ$  rispetto al centro dell'arco. L'angolo di Brewster per la riflessione interna all'acqua è a circa  $37^\circ$ , come potete calcolare dalla equazione (11), un valore molto vicino al precedente, per cui ci aspettiamo che la luce dell'arcobaleno sia sufficientemente polarizzata

nella direzione ad esso tangente. L'effetto è visibile in Fig. 16c e d. La prossima volta procuratevi un filtro polaroid o un paio di occhiali polarizzati pronti all'uso. Tutte queste sono prove che la luce è un'onda elettromagnetica.

## Parte II: Olismo classico.

### Etere o non etere, questo è il problema.

Poiché ogni onda si propaga in un mezzo come il suono nell'aria, la luce, per Maxwell, non poteva fare eccezioni. Maxwell ipotizzò che lo spazio vuoto non fosse realmente tale ma che fosse riempito di un mezzo battezzato *etere luminifero*. Nelle equazioni di Maxwell compariva la velocità della luce  $c$ , che dipendeva dalle costanti dielettriche e magnetiche del vuoto. In effetti questo era una sorta di indizio che il vuoto fosse in realtà pieno di qualcosa, come una specie di dielettrico. La motivazione per introdurre l'etere come supporto della propagazione delle onde elettromagnetiche derivava non solo da una mentalità "meccanicistica", non tanto newtoniana quanto cartesiana, ma anche dal fatto che nelle equazioni di Maxwell compariva la velocità



**Figura 16:** a) Alto sinistra, riflessione dal pavimento della luce proveniente da una finestra. b) Alto destra, tramonto del sole sulla superficie del mare. La riduzione della intensità della luce riflessa man mano che la direzione in cui si osserva si abbassa deriva dalle leggi di Fresnel, secondo cui riducendo l'angolo di incidenza (e dunque di riflessione) l'intensità diminuisce assestandosi attorno ad un valore costante. c) basso sinistra e d) basso destra: polarizzazione della luce riflessa da un arcobaleno. A causa dell'angolo di Brewster la luce riflessa in una goccia viene polarizzata perpendicolarmente all'angolo di incidenza. Tale angolo è molto vicino a quello di riflessione critica della luce, per cui l'arcobaleno apparirà polarizzato lungo la direzione ad esso tangente in ogni punto, come è possibile osservare mediante un filtro polarizzatore orientato parallelamente (c) e perpendicolarmente (d) a tale direzione.

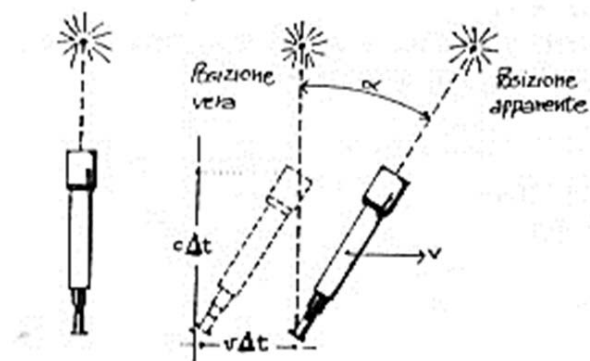
della luce  $c$ , come fosse un parametro assoluto e non relativo al sistema di riferimento. Ne derivava che le equazioni di Maxwell erano valide solo per sistemi immobili rispetto all'etere. Ma qui si poneva la questione: muovendoci rispetto all'etere con una velocità  $v$  le equazioni di Maxwell andavano modificate in modo da sostituire a  $c$  una combinazione delle due? Tutto dipendeva se l'etere veniva o meno trascinato dal moto del riferimento. Facciamo un esempio relativo al suono. Se mi trovo nel vagone di un treno in moto ad una velocità pari a  $v_T$  l'aria viene completamente trascinata al suo interno, per cui un suono si propagherà nella cabina alla velocità  $v_s$  solita del suono, e non mi accorgerei di essere in moto. Se andassi invece sopra il vagone del

treno in corsa e stessi in piedi avvertirei un vento sul mio viso in quanto l'aria a qualche metro di altezza dal vagone non sarebbe affatto trascinata, sicché un suono sarebbe percepito prima o dopo a seconda della direzione del treno. Posso in questo caso stabilire che il treno è in corsa? La risposta è no in quanto esiste anche il vento vero e proprio che trascina più o meno efficacemente un suono, per cui non potrei stabilire se è il treno a creare l'effetto del vento o viceversa vi è un vento a prescindere dal moto del treno. Tuttavia se mi sedessi sul vagone il vento che percepirei sarebbe meno intenso, in quanto l'aria verrebbe parzialmente trascinata a causa dell'attrito con il tetto del vagone. Ora sostituiamo al treno in corsa la Terra, all'aria l'etere che ora permea il

vuoto attorno alla terra e al suono la luce. In perfetta analogia con il treno ci sono tre possibili interazioni tra il nostro pianeta e l'etere:

- 1) La Terra attraversa l'etere senza trascinarlo (come l'aria ben al di sopra del vagone).
- 2) La Terra trascina parzialmente l'etere con sé (come l'aria in prossimità del tetto del vagone).
- 3) La Terra trascina con sé l'etere completamente (come nel caso dell'aria all'interno del vagone).

Queste le tre ipotesi possibili ma contrapposte e contraddittorie. Come discernere? Attraverso l'esperimento, direbbe qualcuno, consapevole che l'unica guida per la verità sia l'esperienza e l'osservazione. Ma proprio qui capiamo come i dati sperimentali nulla ci dicono circa la natura se non attraverso un modello mentale già preconstituito attraverso cui interpretare i fenomeni osservati. Infatti ognuna delle tre ipotesi precedenti riesce a spiegare un preciso fenomeno.



**Figura 17:** Spiegazione dell'aberrazione stellare mediante la composizione delle velocità di Galileo. A sinistra un cannocchiale punta nella direzione della stella in un riferimento immobile rispetto ad essa. Ne caso a destra il sistema di riferimento dell'osservatore è in moto con velocità  $v$ . Per puntare la stella il cannocchiale dovrà essere inclinato di un angolo dato dall'arcotangente del rapporto tra  $v$  e  $c$ . Infatti nello stesso intervallo temporale  $\Delta t$  la terra si sarà spostata di  $v\Delta t$  mentre la luce da una stella si sarà propagata per un tratto  $c\Delta t$ . Alla fine sembrerà che la stella abbia percorso un tragitto inclinato.

### Esperimento 1

L'ipotesi 1 riesce a spiegare il fenomeno della aberrazione stellare (Fig. 17). Brevemente, supponete di osservare una stella dritto sopra la vostra testa. Ebbene la stella non è "realmente" lì.

Potremmo affermarlo se la luce si muovesse con velocità infinita, ma poiché la velocità della luce è di "soli" 300.000km/s e la Terra si muove nell'etere immobile "a ben" 30km/s, noi vedremo la stella in una posizione differente data dalla combinazione delle velocità. L'angolo di aberrazione (deviazione) sarà piccolo ma misurabile con tecniche di precisione.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c} = 0.0001 \quad (12)$$

Il risultato di questo fenomeno torna con i valori previsti nel caso in cui l'etere sia immobile.

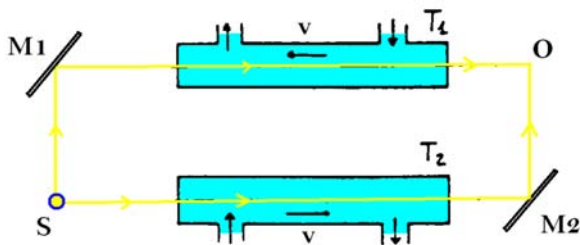
### Esperimento 2

L'ipotesi del trascinamento parziale dell'etere da parte della Terra conduce a spiegare un fenomeno alquanto bizzarro. Supponete di inviare un raggio di luce attraverso un tubo cilindrico pieno d'acqua in movimento come in figura 18. L'acqua potrebbe trascinare l'etere e l'entità di tale trascinamento essere misurata. In tal caso la velocità della luce osservata in laboratorio sarebbe

$$w = \frac{c}{n} \pm fv \quad (13)$$

a seconda che l'etere abbia la stessa direzione (+; tubo inferiore) o direzione opposta (-; tubo superiore) al raggio di luce. Se la frazione è  $f=0$ , allora l'etere resta immobile e la velocità della luce è solamente  $c/n$ , dove  $n$  è il solito indice di rifrazione. Se  $f=1$ , l'etere ha una velocità pari proprio a  $v$ , la velocità dell'acqua, per cui la velocità finale sarà  $c/n+v$ . Ma se l'etere venisse trascinato parzialmente, e dunque con una velocità inferiore a  $v$  ma non nulla, ecco che dovremmo avere la formula di prima, intermedia tra i due casi estremi. Possiamo determinare  $f$ , e dunque capire il risultato? Prendete in considerazione l'apparato riportato in Fig.18, in cui viene mostrato un interferometro modificato di tipo particolare.

Una sorgente  $S$  emette due raggi di luce nello stesso istante ed essi si incontrano nel detector  $O$  grazie alla riflessione prodotta da due specchi  $M1$  ed  $M2$ , dopo aver percorso due tubi in cui viene fatta scorrere acqua con velocità  $v$  ma in direzioni opposte, come in figura. Il raggio superiore sarà rallentato dal flusso opposto di acqua, mentre quello inferiore si muoverà più velocemente, entrambi di una frazione  $fv$  rispet-



**Figura 18:** Esperimento di Fizeau sul trascinamento dell'etere tramite flusso d'acqua. La sorgente  $S$  emette due raggi di luce che si incontrano in  $O$  dopo essere stati riflessi da due specchi  $M_1$  ed  $M_2$  ed aver percorso dei contenitori in cui scorre acqua in direzione opposta.

to all'aria. Poiché si ricongiungeranno in  $O$  con un certo sfasamento produrranno delle frange di interferenza la cui posizione dipenderà proprio dal ritardo. Se variamo quest'ultimo, cambiando la velocità del flusso d'acqua, vedremo variare la posizione delle frange e dedurre quanto vale  $f$ . Se ad esempio non dovessimo vedere alcun cambiamento nelle frange, pur variando  $v$ , è ovvio che  $f$  dovrà esser zero. Louis Fizeau, che condusse un simile esperimento, giunse alla conclusione che quel fattore  $f$  fosse pari a

$$f = 1 - \frac{1}{n^2} \quad (14)$$

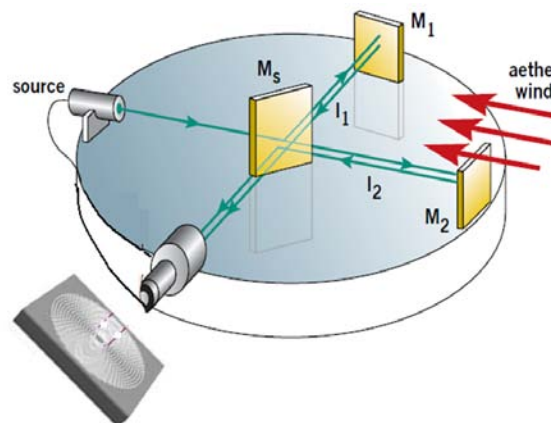
dove  $n$  è il solito indice di rifrazione del mezzo. Nel caso dell'acqua ad esempio, che ha  $n=1.33$ ,  $f$  era uguale a 0.43, un valore quindi a metà strada tra zero e uno. Se ne deducono due conclusioni:

1. L'etere viene trascinato del 43% dal flusso di acqua.
2. L'entità del trascinamento dipende dal mezzo.

### Esperimento 3

Qui si applica un interferometro come nel caso di Fizeau ma non al moto di un flusso d'acqua ma a quello della Terra attorno al Sole. Supponiamo di inviare un raggio di luce da una sorgente ad uno specchio fisso  $M_2$  nella stessa direzione del moto della Terra. Al centro tra la sorgente ed  $M_2$  vi è uno specchio semiriflettente  $M_S$  che divide il fascio in due tragitti perpendicolari tra loro. Uno prosegue nella direzione del moto della Terra percorrendo un tragitto di andata e ritorno pari

a  $L_2$  e l'altro, perpendicolare a questo, prosegue verso un secondo specchio  $M_1$ , distante  $L_1$  dal divisore di fascio, e che verrà da questo riflesso indietro.



**Figura 19:** Esperimento di Michelson e Morley per determinare la velocità della Terra rispetto all'etere. Una sorgente colpisce uno specchio semiriflettente che divide il fascio in due raggi perpendicolari che proseguono uno verso uno specchio riflettente  $M_1$  e l'altro verso  $M_2$  per poi far ritorno e interferire.

Sia  $kv$  la velocità relativa della Terra rispetto all'etere dove  $k$  tiene conto del trascinamento dell'etere. Se  $k=0$  la velocità relativa è nulla e l'etere viene completamente trascinato dal moto terrestre attorno al Sole, se  $k=1$  la velocità relativa è proprio pari a quella della Terra,  $v$ , attorno al Sole, per cui l'etere non è affatto trascinato. Quanto tempo impiegherà ciascun raggio per effettuare il moto di andata e ritorno lungo i due tragitti? Introducendo la quantità  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{(kv)^2}{c^2}}$

nel caso del tragitto  $M_S \rightarrow M_2 \rightarrow M_S$  avremo che

$$T_2 = \frac{L_2}{c - kv} + \frac{L_2}{c + kv} = \frac{2L_2}{c} \gamma^2 \quad (15)$$

Notate che il tempo sarà maggiore del tempo impiegato per percorrere lo stesso tragitto, se l'apparato fosse in quiete rispetto all'etere, di una quantità pari a  $\gamma^2$ . E' ovvio che quella frazione è molto vicina a 1 essendo  $(fv)^2/c^2$ , una quantità pari o inferiore a 0.00000001. Così piccola che Maxwell era convinto che non si potesse misurare. Ma non aveva fatto i conti con gli interferometri, in particolare quello di Michelson e Morley riportato in figura 19. Calcoliamo ora il



tempo relativo al tragitto  $M_S \rightarrow M_1 \rightarrow M_S$ . Un semplice calcolo prova che tale tempo, è pari a

$$T_1 = \frac{2L_1}{c} \gamma \quad (16)$$

quindi non più proporzionale a  $\gamma^2$  ma solo a  $\gamma$ . Tenendo conto che i percorsi hanno la stessa lunghezza ( $L_1=L_2=D$ ) e dell'approssimazione per cui il termine in  $\gamma$  pari a  $(kv/c)^2$  è dell'ordine di  $10^{-8}$  allora le lunghezze reali dei percorsi  $H_1$  e  $H_2$  dipenderanno dal moto relativo in prima approssimazione come

$$H_1 = 2D\gamma \cong 2D \left( 1 + \frac{k^2 v^2}{2c^2} \right) \quad (17)$$

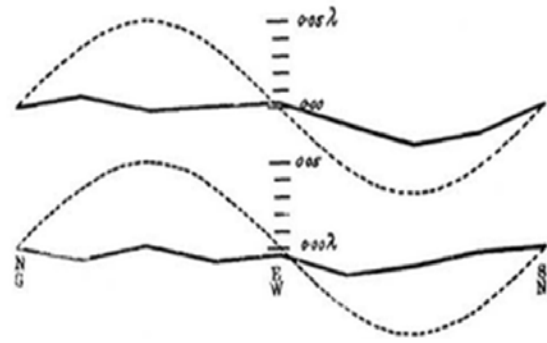
$$H_2 = 2D\gamma^2 \cong 2D \left( 1 + \frac{k^2 v^2}{c^2} \right) \quad (18)$$

Sicché la differenza di cammino ottico reale è pari a

$$\Delta = H_2 - H_1 \cong D \left( \frac{kv}{c} \right)^2 \quad (19)$$

Se questa differenza è pari ad un multiplo intero di mezza lunghezza d'onda si avrà interferenza distruttiva nel detector, altrimenti se è pari a un multiplo intero di lunghezza d'onda l'interferenza sarà costruttiva. Grazie a riflessioni multiple Michelson e Morley resero l'esperimento più preciso, facendo in modo che  $D$  diventasse pari a circa ben 10 metri. Pertanto  $\Delta$  sarà dell'ordine di  $10^{-7}$  m, cioè 100 nm. Usando luce gialla ( $\lambda = 500$ nm)  $\Delta$  è dell'ordine di  $0,2 \lambda$ , una quantità misurabile. Ovviamente se orientiamo l'interferometro, ad esempio ruotandolo di  $45^\circ$  rispetto alla situazione appena discussa, ci aspettiamo che  $\Delta$  dipenderà da tale angolo  $\alpha$  e oscillerà tra 0 e il valore massimo di  $0,2\lambda$ . In figura 20 sono riportati i risultati delle misure eseguite dai due scienziati.

I valori misurati in questo esperimento sono indicati dai tratti continui in Fig. 20 mentre quelli punteggiati indicano l'andamento previsto. Faccio notare che le scale lungo le ordinate si riferiscono ai valori misurati e che le curve teoriche sono state compresse perché fuori scala di circa un fattore 10. Leggiamo le parole dei due scienziati: "lo spostamento reale era certamente inferiore alla ventesima parte di tale spostamento previsto, e probabilmente inferiore alla sua



**Figura 20:** Risultati dell'esperimento di Michelson e Morley (linea continua) rispetto alle previsioni fatte (linea tratteggiata). Lungo l'asse delle ordinate compare lo sfasamento previsto delle frange in unità di lunghezza d'onda, lungo l'asse delle ascisse vi è la direzione di orientamento dell'interferometro rispetto ai punti cardinali.

quarantesima parte". Insomma se un effetto c'era era enormemente inferiore a quello previsto. L'unica spiegazione possibile era che il fattore  $k$  fosse nullo. Morale: se la Terra si muove attorno al Sole ma la sua velocità è nulla rispetto all'etere, allora quest'ultimo partecipa completamente del moto della Terra e ne viene completamente trascinato.

Siamo allora arrivati alla seguente situazione :

1. La spiegazione dell'aberrazione implica che l'etere *non partecipa* al moto dei corpi.
2. L'effetto di Fizeau trova la spiegazione in un etere che *partecipa parzialmente* al moto.
3. La spiegazione dell'esperimento di Michelson e Morley infine è che l'etere *partecipa completamente* al moto dei corpi.

Insomma i tre punti sono in contraddizione reciproca. Che diavolo sta succedendo? Qui la cosa si fa interessante e ci mostra come un dato esperimento non solo non può essere risolutivo per dirimere le questioni scientifiche, ma addirittura è l'indizio di come la teoria trova un limite quando, se applicata ai dati asettici di un esperimento, arriva ad una contraddizione interna. Come già detto, i dati non dicono nulla del mondo se non sono già filtrati mediante uno schema teorico. Ma come risolvere l'enigma? Una via di uscita c'è, ma occorre pagare un prezzo enorme: la simultaneità temporale di due eventi non è un

fatto associato per tutti gli osservatori. Entra in scena Albert Einstein.

## L'illusione della simultaneità

Il 1905 è definito l'*annus mirabilis* di Einstein. In quell'anno quest'uomo straordinario pubblicò, lavorando all'ufficio brevetti di Berna, quattro lavori di cui due fondarono la genesi rispettivamente della teoria della relatività speciale e della meccanica quantistica. L'aspetto interessante dei due lavori è che emerge uno scienziato assolutamente privo di briglie. Infatti mentre il primo articolo parte dall'ipotesi che le leggi di Maxwell siano corrette, il secondo parte dall'assunto che tali leggi sono sbagliate. Nonostante ciò Einstein fonda due visioni del mondo assolutamente nuove e internamente coerenti, sebbene tuttora in contraddizione tra loro almeno negli assunti epistemologici. Nel primo lavoro Einstein parte da due postulati:

- P1) Nessun esperimento né di meccanica e né di elettromagnetismo consentiranno di capire se ci troviamo in un sistema di riferimento fermo o in moto rettilineo uniforme
- P2) La velocità della luce,  $c$ , è indipendente dalla velocità dell'osservatore o della sorgente

Perché arrivò a tali conclusioni? Anzitutto Einstein rilevò una grave contraddizione tra la teoria di Maxwell e le leggi del moto di Galilei-Newton. Nella quarta legge di Maxwell compare la velocità della luce  $c$  (sotto forma del prodotto tra le costanti dielettrica e magnetica). Invece nella seconda legge di Newton compare l'accelerazione  $a$ . Ora mentre la relatività di Galileo è compatibile con la legge di Newton, non lo è con quelle di Maxwell. Infatti l'accelerazione non dipende dall'osservatore ma la velocità sì. In quanto le velocità si combinano sommandosi tra loro. Se un oggetto si muove rispetto ad un osservatore con velocità  $w$ , allora un altro osservatore che si muove rispetto al primo con velocità costante  $v$  vedrà il moto dell'oggetto avvenire con una velocità data dalla legge di composizione di Galileo

$$w' = w \pm v \quad (20)$$

Se deriviamo entrambi i membri rispetto al tempo otteniamo che le accelerazioni  $a'$  e  $a$  del

corpo viste dai due osservatori saranno uguali, in quanto  $v$  è costante. Pertanto nella seconda legge di Newton  $F=ma$  compaiono la massa e l'accelerazione, entrambe quantità invarianti. Invece l'elettromagnetismo sembra che prediliga una velocità nelle sue equazioni:  $c$ . Ma allora questo vuol dire una e una cosa sola: al contrario della legge di Newton le leggi di Maxwell non sono invarianti, esse cambiano da un riferimento all'altro in moto relativo rispetto al primo. Questa idea è compatibile col trascinarsi dell'etere. Eppure abbiamo già visto a quali contraddizioni l'idea di etere porta. Ad Einstein però non sfuggì un fatto. Se abbiamo un magnete e lo muoviamo rispetto ad un anello conduttore ecco che vediamo una corrente indotta, senza dover applicare all'anello alcuna batteria. E' l'esperimento di Faraday, ben descritto dalle leggi di Maxwell. Cosa accade se però, al contrario, muoviamo l'anello rispetto al magnete? Continueremo a vedere corrente, proprio come prima. Come spiega questo fatto la teoria di Maxwell-Lorentz? Con la forza di Lorentz. Il conduttore si sta muovendo nel campo magnetico fisso con velocità  $v$ , ma il conduttore è fatto di elettroni che si stanno muovendo con la velocità  $v$  del conduttore. Allora essi saranno sottoposti ad una forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (21)$$

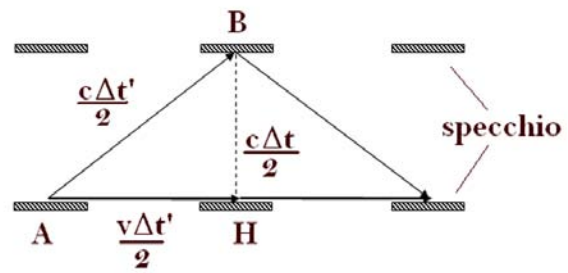
e verranno messi in moto nel conduttore producendo una corrente. Perciò se da un lato è vero che si fa ricorso a due leggi diverse: quella di Faraday nel caso in cui sia il magnete a muoversi, e quella di Lorentz nel caso in cui sia il conduttore a muoversi, è pur vero che tali leggi cospirano in modo da non farci capire chi si muove. Copernico e Galileo possono dormire sogni tranquilli. Di fatto ne deriva che i fenomeni elettromagnetici sono indipendenti dal moto dell'osservatore proprio come il primo postulato di Einstein affermava. Ma allora come mai compare la velocità  $c$  e non una accelerazione nelle equazioni di Maxwell? Ecco la contraddizione nelle due teorie. Bene, Einstein ipotizzò arbitrariamente nel suo secondo postulato che quella quantità  $c$  non può cambiare da un riferimento all'altro. E' l'unico modo per rendere invarianti le leggi di Maxwell. L'aspetto più importante è che tutti e tre gli esperimenti visti prima vengo-

no spiegati in un colpo solo. Vediamo il perché. L'esperimento di Michelson e Morley non mostra nulla in quanto non c'è nulla da vedere. Se non possiamo infatti capire con esperimenti di nessun tipo se la Terra è in moto (postulato P1) non possiamo pretendere di trovare una differenza nei cammini ottici tra i due raggi di luce, esattamente come non lo avremmo trovato se la Terra fosse ferma. La luce si deve muovere alla stessa velocità sia lungo il percorso parallelo al moto terrestre che perpendicolarmente ad esso. Ma se le cose stanno così allora la legge di composizione delle velocità deve cambiare. Einstein provò dai postulati P1 e P2 che le leggi di composizione dei moti divenivano le seguenti

$$w' = \frac{w \pm v}{1 + \frac{vw}{c^2}} \quad (22)$$

Per piccole velocità rispetto a  $c$  la 22 ridiventa uguale alla 20, ridandoci la legge di Galileo, che pertanto è un limite per basse velocità della 22. Da questa relazione si evince inoltre che il limite massimo per la velocità di un segnale è proprio  $c$ . Come mai la legge di composizione delle velocità viene modificata da quei due postulati? Il punto essenziale è che alla base della legge di composizione galileiana delle velocità vi è il fatto che il tempo è una quantità indipendente dall'osservatore. Invece nella relatività speciale ciò che è indipendente dall'osservatore è proprio  $c$ . In questo caso la costanza della velocità della luce nel vuoto impone che il tempo (e anche lo spazio) sia relativo al moto dell'osservatore. In un certo senso nella fisica di Galileo le velocità si adattano per far sì che spazio e tempo restino invarianti, mentre nella fisica di Einstein spazio e tempo si adattano affinché  $c$  resti invariante. Vediamo meglio tale aspetto. Supponiamo di prendere un orologio ottico (Fig. 21), costituito da due specchi tra i quali rimbalza un raggio di luce. La distanza percorsa in mezzo ciclo è pari a  $c\Delta t/2$ . Un osservatore che si muove con velocità  $v$  vedrà invece la luce muoversi lungo la diagonale percorrendo un tratto che, a causa della costanza della velocità della luce, sarà pari a  $c\Delta t'/2$ . Ovviamente il tempo non potrà essere lo stesso perché la velocità della luce è la stessa ma il percorso differente.

Usando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH abbiamo che



**Figura 21:** Orologio ottico di Einstein. A causa della costanza della velocità della luce il tempo si adatta dilatandosi.

$$(c\Delta t')^2 = (v\Delta t')^2 + (c\Delta t)^2 \quad (23)$$

Da cui ricaviamo che il battito di tempo visto dall'osservatore in moto sarà

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad (24)$$

Questa uguaglianza ci dice appunto che il tempo si adatta affinché  $c$  resti invariata. Più in dettaglio, il tempo scorre più lentamente se un osservatore è in moto, e questo rallentamento sarà tanto più evidente quanto più la velocità  $v$  è grande rispetto alla velocità della luce! L'effetto è piccolissimo per le velocità  $v$  a cui siamo abituati ma è stato misurato mediante orologi atomici. A velocità comparabili a quella della luce, invece, il ritardo diventa enorme. Adesso però abbiamo tutti gli strumenti per poter comprendere gli altri due esperimenti sull'etere. Einstein spiega in modo molto semplice l'effetto dell'aberrazione della luce proveniente da una stella con la legge di composizione dei moti. Resta l'esperimento di Fizeau, davvero interessante se visto nell'ottica della relatività. Applicando anche qui la legge di composizione delle velocità  $w'$  e per piccoli valori rispetto a  $c$ , otteniamo che

$$w' = \frac{c/n + v}{1 + \frac{vc/n}{c^2}} \cong \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v - \frac{v^2}{nc} \quad (25)$$

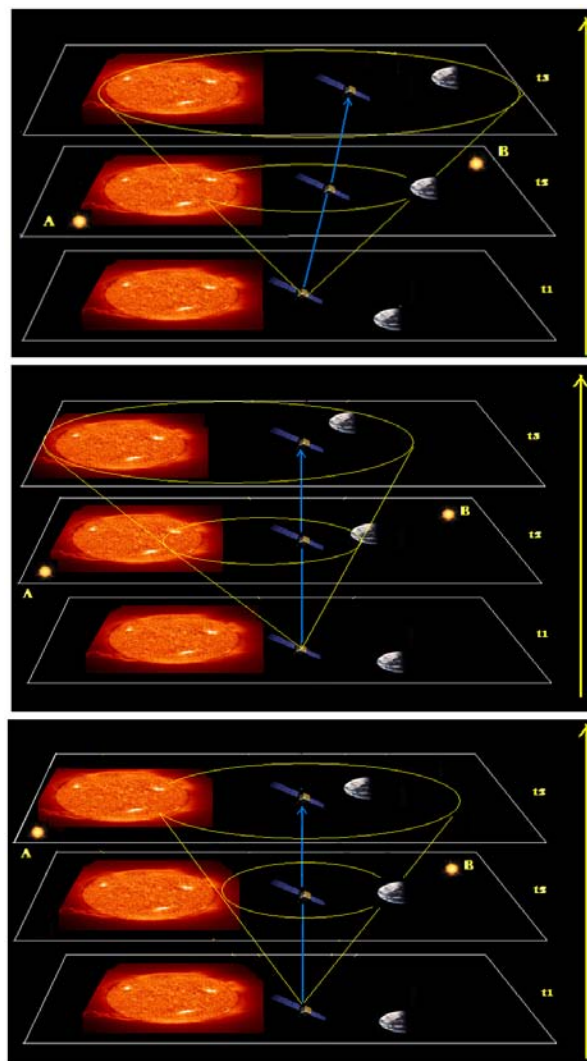
dove  $c/n$  è la velocità della luce in un mezzo con indice di rifrazione  $n$ . Se ora consideriamo che l'ultimo termine è ancora più piccolo e può essere trascurato rispetto agli altri termini ritroviamo che la velocità  $w'$  è in pratica

$$w' = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v \quad (26)$$

Che è la formula di Fizeau. Tutti e tre gli esperimenti entrano in un'unica cornice. Una cornice in cui l'etere non esiste più, non è necessario. Capirete però adesso che se l'etere è stato seppellito nel cimitero delle teorie defunte, ne deriva che la luce è il primo caso di un'onda che si propaga in assenza di un mezzo "meccanico". La luce è una perturbazione del campo elettromagnetico, che è uno stato del vuoto. Punto. Dunque il vuoto ha stati, come la materia? Sì. Il vuoto non è nulla, è qualcosa, ma questo qualcosa non si comporta affatto come un mezzo materiale. L'eliminazione dell'etere ci catapulta in una realtà contro-intuitiva, fatta di un tempo e uno spazio che ritenevamo assoluti e che invece dipendono dallo stato di moto dell'osservatore, per cui non sono enti oggettivi. L'unica realtà oggettiva e non dipendente dallo stato dell'osservatore è la luce e l'esistenza di qualcosa che da allora in avanti sarà chiamato spazio-tempo, in cui eventi simultanei per un osservatore possono non esserlo più per altri in moto relativo ma in cui concetti come la velocità della luce o la continuità topologica dello spazio (non esistono discontinuità atomiche nello spazio) e dello scorrere del tempo (non ci sono salti temporali) sono assoluti. Una realtà in cui c diventa un limite invalicabile, nessun messaggio può essere spedito a velocità superluminali.

## La scienza della causa e dell'effetto

Concludiamo questa prima parte del lavoro con una breve digressione sul concetto di causa-effetto (causalità) che emerge dal quadro teorico osservato e dal concetto di spazio-tempo. Supponiamo di osservare (Fig. 22a) tre sequenze di un evento in un diagramma spaziotemporale. Faccio notare che una dimensione spaziale è stata rimossa per consentire la visualizzazione dei fenomeni spaziali che descriveremo. Ora ciascuna fetta rappresenta una collezione di eventi in tre istanti temporali  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$ . In questa sequenza il Sole è fermo rispetto all'osservatore mentre sia il satellite che la Terra sono in moto. All'istante  $t_1$  il satellite emette un segnale rappresentato da un cerchio (un'onda sferica nella realtà di uno spazio tridimensionale) che si espande sempre più formando un cono detto *cono-luce*.



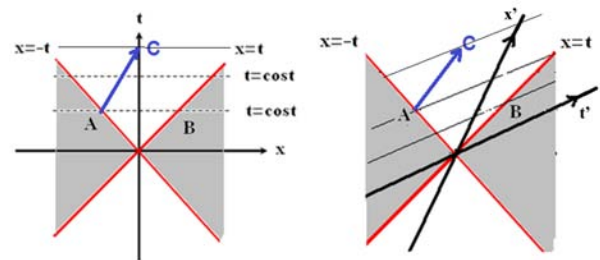
**Figura 22:** a) Alto, sequenza spaziotemporale di un evento (emissione di un segnale sferico di luce da parte di un satellite) rispetto a un osservatore solidale col Sole. I due eventi A e B sono in questo sistema di riferimento simultanei. b) Centro, stessa sequenza vista da un osservatore solidale col satellite ma in uno spaziotempo newtoniano in cui il tempo è assoluto e la simultaneità di due eventi è indipendente dallo stato di moto dell'osservatore. c) Basso, stessa sequenza ma vista in uno spaziotempo relativistico in cui il tempo è relativo. Notate che mentre il cono-luce si deforma nello spaziotempo newtoniano per consentire agli eventi di essere ancora simultanei, gli eventi sono ordinati in una sequenza temporale differente per permettere al cono-luce di essere indipendente dallo stato di moto dell'osservatore.

Ora all'istante  $t_2$  il segnale di luce raggiunge *simultaneamente* sia il Sole che la Terra. In altre parole i due eventi *la luce raggiunge la superficie del Sole* (evento A) e *la luce raggiunge la superficie terrestre* (evento B) sono *simultanei*. Lo spazio-tempo è un concetto che ha senso anche nella fisica di Newton, ma in tale spazio tutti gli eventi che sono simultanei per un osservatore O lo sono anche per un altro O' in moto relativo uniforme per cui è possibile dare la definizione di un tempo oggettivo e comune a tutti. E' possibile quindi, in modo assoluto, oggettivo e universale, cioè valido per tutti gli osservatori in moto relativo,

*sezionare lo spazio-tempo in una sequenza temporale di spazi contenenti gli eventi che sono simultanei per tutti gli osservatori. Il tempo è oggettivo.*

Per la fisica di Newton, collocandoci nel sistema di riferimento solidale al satellite, la sequenza di eventi resta fissa ma il cono-luce cambierà come in figura 22b. Al contrario, nella fisica di Einstein, il cono luce resterà immutato, ma i due eventi A e B non saranno più solidali per un osservatore solidale col satellite. Questo è quanto. Ciò che resta però immutato tra un osservatore e l'altro è anche la sequenza dei due eventi causa effetto. In entrambi i sistemi di riferimento (Fig.22a e c) la causa che farà attivare un sensore posto sia sul Sole che sulla Terra ha la sua origine nel passato, ovvero nell'evento in cui il satellite invia un impulso collocato all'istante  $t_1$  per entrambi gli osservatori in moto relativo. Faccio notare inoltre che i moti del satellite, della Terra e del Sole in entrambe le figure a e c sono individuati da traiettorie che sono meno inclinate di quella della luce rispetto all'asse verticale del tempo. Essi cioè si muovono più lentamente della luce. Possiamo anche esprimere le stesse cose in un modo più incisivo sostenendo che tutti gli eventi fisici connessi causalmente con l'evento iniziale in  $t_1$  avranno linee di universo dentro il cono luce. Faccio notare infine che nessun segnale può connettere istantaneamente il satellite e la Terra. Se ciò fosse possibile la linea di universo di questo segnale che connette il satellite alla Terra sarebbe fuori dal cono-luce. La conclusione è che ognuno ha a che fare con un universo differente e tuttavia lo spaziotempo non è separabile. Non ha senso "affettare" lo spaziotempo in sequenze di eventi assoluti. E'

come se avessimo a disposizione un bel pane che rappresenta lo spazio-tempo e tutto ciò che c'è in esso (ovvero l'universo e tutti i suoi eventi passati, presenti e futuri). Ciascuno di noi, a seconda del proprio moto, lo affetta con tagli più o meno inclinati. C'è chi lo affetta tagliandolo verticalmente, chi lo affetta tagliando fette inclinate di 45 gradi e via dicendo. Ogni fetta rappresenta tutti gli eventi che sono simultanei per quell'osservatore. In effetti Poincarè provò che cambiare riferimento inerziale equivale a deformare (o affettare) lo spaziotempo come accadrebbe ad un quadrato che venisse stirato dai lati per diventare un rombo. Lo spaziotempo cioè si comporta come un foglio piano di gomma che è possibile tirare da un lato e dall'altro senza però cambiare il cono-luce. Queste operazioni corrispondono alle trasformazioni di Lorentz ovvero ai passaggi da un riferimento inerziale all'altro. Osservate la figura 23, dove ho rimosso per semplicità di visualizzazione, una ulteriore dimensione spaziale, di modo che lo spazio e il tempo formano insieme uno spaziotempo bidimensionale.



**Figura 23:** a) Sinistra, spaziotempo per un osservatore per il quale due eventi A e B sono simultanei. b) Destra, spaziotempo per un osservatore in moto relativo al primo, verso la direzione in cui accade B. In questo spaziotempo B viene prima di A. La relatività degli eventi (A prima di B o viceversa) deriva dal fatto che A non è la causa di B e viceversa. Pertanto possiamo sempre trovare degli stati di moto che non concorderanno sulla sequenza temporale di A e B. Se però A è la causa di un altro evento, C, allora A verrebbe temporalmente prima di C per entrambi gli osservatori e non esisterebbe nessuno stato di moto per cui A e C sono simultanei. L'unica differenza tra i due osservatori è che l'intervallo temporale che separa la causa A dall'effetto C è più breve per l'osservatore in moto, come se questo procedesse più speditamente verso il futuro (notate che il collegamento causale tra A e C-la linea blue-è dentro il cono luce che ha origine in A).

Immaginiamo che gli eventi A (Alice accende un laser) e B (Bob spegne un laser) avvengano simultaneamente per l'osservatore Charlie, come ho raffigurato a sinistra nella figura. Questo significa che essi sono due punti attraverso cui passa una retta parallela all'asse spaziale, ovvero definiscono un unico istante, essendo appunto simultanei. Charlie ha affettato il pane spazio-temporale con fette parallele al piano orizzontale. Se un quarto osservatore, che chiameremo Michelle, invece è in moto verso Bob (come nel satellite dell'esempio precedente) è come se l'asse temporale e quello spaziale, rispetto all'altro grafico, si siano inclinati verso un lato del cono-luce, formando un angolo più piccolo. Quali saranno per Michelle gli eventi simultanei, ovvero come affetterà il pane spaziotemporale? In questo caso, come nel precedente, gli spazi simultanei sono quelli paralleli all'asse spaziale, qui  $x'$ , ed essi individuano gli eventi simultanei, quelli a  $t'=\text{cost}$ . Come potete vedere però i due eventi A e B sul cono luce verranno visti in momenti differenti nel nuovo riferimento perché si troveranno su spazi simultanei differenti, come deve essere. In particolare l'evento B accadrà prima dell'evento A. Se invece Michelle si muove verso Alice vedrà questa sequenza di eventi ribaltata, prima accadrà A e solo dopo accadrà B. Occorre specificare, a costo di essere pedanti, che A e B non sono in questo caso l'uno la causa dell'altro. Se per Charlie A è la causa di B, ovvero se l'evento B accade solo perché nel passato A ha scatenato una sequenza di eventi che ha causato B, allora A sarà la causa di B anche per Michelle, Alice e Bob. La sequenza causa effetto cioè resta invariata e non può essere invertita. Se fosse così addio razionalità nel nostro universo. Pertanto sebbene lo spazio-tempo non si può separare in spazio e tempo in modo oggettivo, la sequenza causale degli eventi nel nostro universo è oggettiva. Prima di congedarmi da questa seconda parte vorrei volare un po' con la fantasia per arrivare a chiederci: come apparirebbe il mondo a cavallo di un raggio di luce? Gli assi del tempo e dello spazio si inclineranno sempre più man mano che la velocità dell'osservatore aumenta, seguendo la deformazione di Poincarè che abbiamo visto sopra, fin quando, raggiunta la velocità  $c$ , i due assi del tempo e dello spazio coincideranno e l'angolo di separazione degli assi spaziotempo-

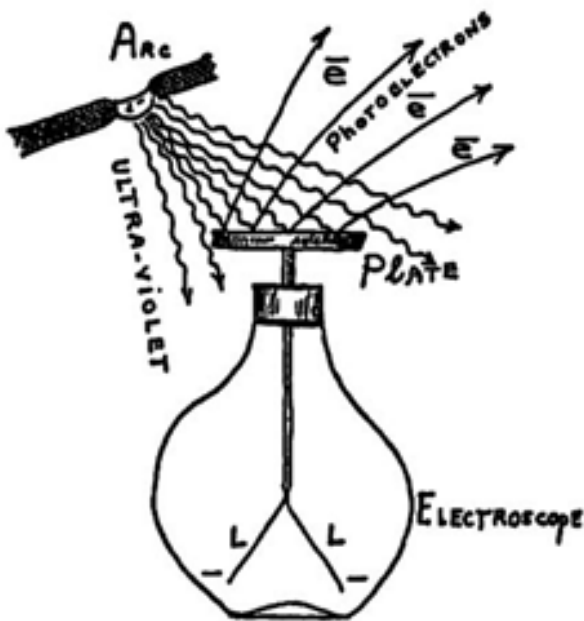
rali dal cono-luce diviene zero. In tal caso per un tale osservatore luminale tutti gli eventi saranno simultanei! Per un raggio di luce il tempo non scorre affatto e lo spazio, dal suo punto di vista, viene percorso all'istante! La luce vivrebbe la sua intera storia, da quando il raggio viene creato a quando viene distrutto, in un attimo. Pensate ad un raggio di luce che parte dalla galassia di Andromeda e giunge ad eccitare la vostra retina. La luce, dal vostro punto di vista, avrà impiegato due milioni di anni per giungere nei vostri occhi, ma dal suo punto di vista, da quando essa è stata emessa a quando è stata assorbita eccitando i fotorecettori del vostro occhio, è passato un istante, anzi nemmeno quello! Un raggio che fosse stato prodotto ai tempi del big bang e che venisse distrutto in un eventuale big crunch finale vedrebbe l'intera storia dell'universo compressa in un istante. È come se la luce saltasse letteralmente l'intervallo temporale intermedio misurato da noi. Questo implica che per osservatori che viaggiano a velocità inferiori a  $c$  rispetto alle stelle fisse, la storia dell'universo (ovvero della evoluzione stellare e di tutto ciò che accade nei loro dintorni) apparirà comunque più breve fintanto che saranno in moto. Questi viaggiatori in poche parole corrono verso il futuro più rapidamente di un osservatore immobile rispetto alle stelle "fisse". Il viaggio nel tempo, e più precisamente verso il futuro, esiste. Viaggiamo tutti nel tempo futuro quando viaggiamo nello spazio.

## Parte III: grani di luce

### Un mondo statistico?

Quello presentato nelle parti precedenti è il quadro offertoci dalle teorie classiche della luce. Il 1905 fu l'anno in cui accanto alla teoria della relatività una nuova visione dell'universo prese piede con la nascita del concetto di grano di luce: il fotone. Era nata l'ottica quantistica, una teoria che ci spingerà in un territorio dalle regole "folli" ma coerenti con tutto ciò che sappiamo sulla luce. Fu sempre Einstein ad introdurre l'idea, ma, contrariamente all'articolo sulla relatività in cui egli

presuppose la validità delle leggi classiche dell'elettromagnetismo di Maxwell, l'articolo sulla natura quantistica della luce faceva leva sui limiti della teoria maxwelliana, e propose che la luce, più che propagarsi nello spazio distribuendo l'energia in modo continuo, si propagasse a pacchetti di energia che battezzò, appunto, fotoni. In questo Einstein dimostra la sua natura di giovane opportunista, nel senso di lavorare a briglie sciolte senza lasciarsi incastrare nella visione accademica a lui contemporanea e sfruttando tutto ciò che proveniva da altre branche, come la teoria dei quanti di Planck. Perché introdurre questa idea? A causa di un fenomeno che non si lasciava inquadrare: l'effetto fotoelettrico.



**Figura 24:** Effetto fotoelettrico.

L'effetto è il seguente: illuminando con luce ultravioletta una placca di metallo collegata ad un elettroscopio si osserva che le foglioline si caricano (Fig.24).

Questo indica che la luce estrae dal piatto delle cariche elettriche, gli elettroni, caricando le foglioline d'oro dell'elettroscopio. Possono le teorie classiche spiegare questo fenomeno? Fino a un certo punto sì, usando il concetto proprio di questa teoria secondo cui la luce cede energia al piatto proporzionalmente al modulo quadro del campo elettrico. Se si usa luce infrarossa, ovvero più lunga della luce ultravioletta, la fisica classica prevede che comunque l'elettrone sarà scalzato e che il tempo necessario affinché

ciò accada dipenderà dalla intensità della luce stessa, ovvero dall'ampiezza del campo elettrico. E invece ciò che si osserva è che se si usa luce infrarossa, indipendentemente dalla intensità e dal tempo atteso, non verrà estratto nemmeno un elettrone. Come si spiega? Questo e altri fenomeni come la radiazione di corpo nero non trovavano alcuna soluzione in seno alla teoria di Maxwell. Ma Einstein ebbe una "illuminazione" e, partendo dall'assunto che la luce non si propaghi nello spazio vuoto come un'onda, ma come dei corpuscoli, che battezzò fotoni, risolse l'enigma. L'ipotesi fu che l'energia di un raggio di luce non dipende dall'ampiezza del campo, ma dal numero  $N$  di proiettili, i fotoni appunto, che colpiscono la piastra e dall'energia del singolo fotone, che, secondo la teoria di Planck è proporzionale alla frequenza  $\nu$  della luce. Pertanto l'intensità  $I$  sarà data da

$$I = Nh\nu \quad (27)$$

dove  $h$  è la costante di Planck. In questo modo Einstein interpretò l'effetto fotoelettrico come un urto tra due biglie: un elettrone e un fotone. L'elettrone ha una energia minima data dalla energia di legame col metallo ( $e\phi$ ), per cui dalla conservazione dell'energia ricaviamo che l'energia cinetica di rilascio dell'elettrone è data dalla differenza tra l'energia del singolo fotone,  $h\nu$ , e tale energia di legame

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - e\phi \quad (28)$$

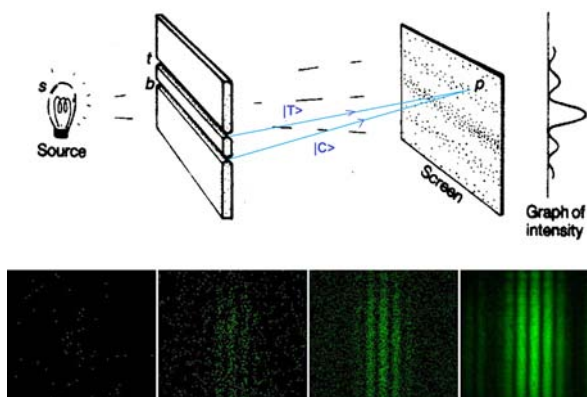
Siccome l'energia cinetica è sempre positiva ne risulta che

$$\nu \geq e\phi/h \quad (29)$$

Ovvero che esiste una frequenza di soglia al di sotto della quale non è possibile estrarre alcunché, a meno di non avere più fotoni che, simultaneamente, colpiscono l'elettrone, evento altamente improbabile. Una teoria del genere spiegava benissimo questi fenomeni che risultavano incomprensibili mediante una teoria elettromagnetica della luce.

L'esistenza dei fotoni come mattoni fondamentali di un raggio di luce pone delle questioni enormi circa la natura della realtà. Tutti gli esperimenti visti prima infatti (la riflessione, l'interfe-

renza e la polarizzazione) devono essere descritti nuovamente usando il concetto discreto di corpuscolo al posto di quello continuo di onda. Come è possibile che un fotone, particella di luce, possa mostrare interferenza, concetto tipico di un'onda? Chiariamo meglio questo concetto. Si potrebbe pensare ad esempio che il fotone in realtà si sparpagli dappertutto come un gomitolo di lana che si srotola, ma ciò non spiegherebbe un fatto sperimentale ormai assodato: abbiamo visto sopra che l'intensità luminosa di un raggio di luce è proporzionale al numero dei fotoni, sicché riducendo l'intensità è possibile mettersi nelle condizioni di avere un fotone alla volta nello spazio. Come viene individuato un fotone? Come una entità delocalizzata e spalmata spazialmente o come un granulo localizzato? Ebbene grazie a detector ultrasensibili si è scoperto che i fotoni si presentano sempre come pacchetti indivisibili e localizzati, ovvero come proiettili. Non si rivelerà mai né delocalizzato né diviso. Difficile pertanto credere che, nello spazio tra sorgente e rivelatore, il fotone non abbia una esistenza "puntiforme".



**Figura 25:** *Interferenza di fotoni che passano tra due fenditure. I fotoni si accumulano sullo schermo in modo casuale e scorrelato ma producendo alla fine un pattern.*

Ecco allora il paradosso: se la luce si individua come pacchetti localizzati, come spiegare la formazione della figura di interferenza in un tipico esperimento a due fenditure? Non avendo più onde delocalizzate ma entità localizzate come spiegare tutti quegli effetti ondulatori tipici di un'onda elettromagnetica? Se si fa passare ciascun fotone dalle fenditure si osserva che col passare del tempo i singoli impatti si distribuiscono, all'inizio, apparentemente in modo casuale,

per poi formare, dopo molti eventi di impatto, un pattern, proprio quello tipico dell'interferenza (Fig.25). I fotoni insomma vengono sempre rilevati come proiettili e l'aspetto periodico delle frange (che prima attribuivamo alla periodicità di un'onda fisica) emerge dall'accumulo statistico degli impatti. Come è possibile che da una serie di impatti casuali emerga lo schema ordinato delle frange di interferenza?

## Testa o Croce?

Il caso in fisica classica, e in generale nella scienza, è un animale strano. Esso denota l'ignoranza che abbiamo dei dettagli. In meccanica il caso è la nostra non conoscenza perfetta delle condizioni iniziali con cui, ad esempio, viene lanciata una moneta. Immaginiamo di porre una moneta in una scatola e di agitarla. Ovviamente non sapremo se, quando la scatola verrà aperta, la moneta mostrerà testa (T) o croce (C). Di fatto essa è un sistema fisico a due stati, T o C, mutuamente esclusivi ma non possiamo dire nulla sullo stato della moneta prima dell'apertura della scatola. La nostra ignoranza è totale. La moneta si troverà ovviamente in uno dei due stati ma noi non sappiamo quale. Se apriamo la scatola e troviamo ad esempio T non sapremmo inoltre prevedere cosa accadrà la volta successiva che ripetiamo l'esperimento. La moneta non ha memoria degli esiti precedenti. Tuttavia, nonostante questa ignoranza nelle previsioni, qualcosa possiamo dire: pur non potendo fare previsioni sugli esiti singoli possiamo fare previsioni statistiche, cioè su un gran numero di prove. Ripetiamo l'esperimento un migliaio di volte, e sappiamo infatti che, per la "legge" dei grandi numeri, dopo molti lanci avremo in media il 50% degli esiti che danno T e il 50% che danno C. In altre parole mentre per l'esito di ogni prova siamo in balia dell'imprevedibilità e dunque del caso, dopo migliaia di lanci possiamo essere sicuri che per lo meno la distribuzione statistica rientrerà nel dominio della prevedibilità. Formalmente posso indicare col simbolo  $|T\rangle$  e  $|C\rangle$  i due stati della moneta e raffigurarli in uno spazio bidimensionale vettoriale. Definisco gli stati testa e croce come stati ortogonali, asserendo con questo termine che, dopo il lancio, la moneta si presenterà o in uno stato o nell'altro, ma dove l'uno esclude



l'altro. Ad ogni apertura della scatola non potrà mai trovare lo stato della moneta testa e croce. Non vale la congiunzione *e* ma la congiunzione *o*: o Testa o Croce. Per indicare questa proprietà di ortogonalità diremo che la proiezione di uno stato sull'altro, ovvero il prodotto scalare tra questi vettori, è *nullo*. Indicheremo questo prodotto scalare mediante i simboli

$$\langle C|T \rangle = \langle T|C \rangle = 0$$

$$\langle C|C \rangle = \langle T|T \rangle = 1 \quad (30)$$

Come possiamo descrivere la nostra ignoranza (o meglio il nostro grado di conoscenza) sullo stato del sistema prima dell'apertura della scatola? Mediante lo stato indeterminato (per noi ma non per chi fosse dentro la scatola come la moneta stessa)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|T\rangle + |C\rangle) \quad (31)$$

indicando con la somma che, a causa della nostra ignoranza sulle condizioni di lancio, l'esito potrà essere indifferentemente  $|T\rangle$  o  $|C\rangle$ . Dico indifferentemente perché ciascuno stato è pesato con lo stesso coefficiente  $1/\sqrt{2}$ . Ma perché proprio questo coefficiente? La componente dello stato su uno dei due vettori unitari, ovvero il prodotto scalare, è esattamente un segmento lungo  $1/\sqrt{2}$ . In poche parole il prodotto scalare  $\langle T|\psi\rangle$  è pari a  $1/\sqrt{2}$ . Elevando al quadrato questo risultato otteniamo proprio la probabilità  $P$  statistica di avere Testa, cioè  $\frac{1}{2}$ .

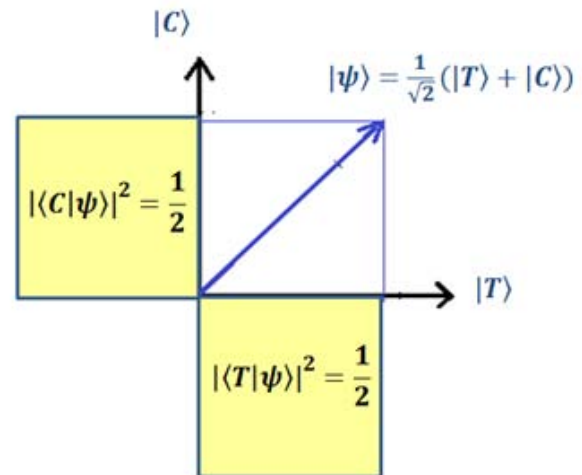
$$P = |\langle T|\psi\rangle|^2 = |\langle C|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad (32)$$

Faccio notare che tale probabilità è di natura *epistemologica* e non *ontologica*, ovvero riguarda la nostra conoscenza e non la realtà esistenziale della moneta. Questo, in quanto *in fisica classica il puro caso non esiste*, riguarda solo la nostra ignoranza sulle condizioni al contorno. Le teorie classiche sono infatti deterministiche, nonostante un sistema fisico non sia il più delle volte prevedibile. Sottolineo, a costo di sembrare pedante, che la moneta si trova comunque in uno dei due stati  $|T\rangle$  o  $|C\rangle$  prima dell'apertura della scatola e che la formula 31 esprime solo la nostra ignoranza. Dopo l'apertura della scatola acquisiamo

informazione sullo stato "reale" della moneta e possiamo dire che l'apertura coincide con una proiezione dello stato di informazione  $|\psi\rangle$  in uno dei due stati, ad esempio  $|T\rangle$ .

$$|\psi\rangle \Rightarrow |T\rangle \quad (33)$$

La freccia indica l'apertura della scatola e l'acquisto di informazione dell'osservatore. La sua ignoranza sullo stato posseduto oggettivamente dalla moneta è sparita istantaneamente.



**Figura 26:** Regole quantistiche di sovrapposizione degli stati e collasso della funzione d'onda.

Supponiamo ora di voler vedere cosa accade a due monete nella scatola, e chiediamoci qual è la probabilità di trovare testa per la moneta A e croce per la moneta B. Lo stato del sistema adesso è descritto dal cosiddetto prodotto tensoriale,  $|\psi_A, \psi_B\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$  che ci avverte che lo stato del sistema è dato dalla presenza di due sottosistemi (le due monete). Il prodotto tensoriale tra stati è molto semplice da descrivere:

$$|\psi_A, \psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|T\rangle + |C\rangle)_A \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|T\rangle + |C\rangle)_B$$

$$= \frac{1}{2}(|T, T\rangle + |T, C\rangle + |C, T\rangle + |C, C\rangle) \quad (34)$$

dove per semplicità abbiamo eliminato gli indici A e B all'ultimo membro. Il formalismo ci avverte di una cosa sensata: le due monete si troveranno in uno dei quattro stati in parentesi, ma noi non sappiamo quale finché non apriremo la scatola. Stando alle regole del prodotto scalare, la probabilità di ottenere simultaneamente testa

per la prima moneta e croce per la seconda è data da

$$P(T, C) = |\langle T, C | \psi_A, \psi_B \rangle|^2 = \frac{1}{4} = 25\% \quad (35)$$

come deve essere. Il formalismo funziona. Notiamo che:

a) adoperiamo il prodotto  $\otimes$  nel caso in cui ci poniamo domande del tipo: cosa accade ad A e simultaneamente a B?

b) lo stato composto  $|\psi_A, \psi_B\rangle$  adesso "vive" in uno spazio vettoriale a quattro dimensioni dove  $|T, T\rangle; |T, C\rangle; |C, T\rangle; |C, C\rangle$  rappresentano gli esiti possibili, ovvero i vettori ortogonali di base.

Prima di congedarci da questo aspetto formale vorrei evidenziare come le probabilità, almeno nel caso della moneta, non dipendono da un eventuale fattore di fase complesso e unitario. Avremmo potuto anche scrivere lo stato della moneta prima dell'apertura della scatola in questo modo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi}|T\rangle + |C\rangle) \quad (36)$$

senza alterare le probabilità finali. Il fattore di fase ruota di un angolo  $\varphi$  lo stato  $|T\rangle$ . Infine possiamo sempre identificare i due vettori  $|T\rangle$  e  $|C\rangle$  con due vettori del tipo  $(1; 0)$  e  $(0; 1)$  (vedi Box3). Lo stato  $|\psi\rangle$  diventa allora  $(e^{i\varphi}/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ . Se l'angolo è  $90^\circ$ , allora  $|\psi\rangle = (i/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$  ma la probabilità che, aprendo la scatola, troviamo testa è comunque  $|i/\sqrt{2}|^2 = 1/2$ . Adesso torniamo ai fotoni sullo schermo.

## La polarizzazione dei fotoni

Cosa determina l'emergere del *pattern* di interferenza dalla casualità con cui avvengono gli impatti? Come può il caso generare ordine? Poiché il fotone o passa dalla fenditura A o passa dalla fenditura B, nei fatti si comporta come un sistema a due stati. I fisici hanno sviluppato un formalismo molto elegante e generale per un tale sistema. Tale formalismo è esattamente quello della moneta vista sopra, in cui lo stato  $|\psi\rangle$  è dato da

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle + |B\rangle) \quad (37)$$

dove A e B sono le due alternative. Tuttavia, come vedremo ora, vi è una differenza notevole tra quanto asserito per una moneta e un oggetto quantistico a due stati. Invece di trattare subito le alternative di traiettoria di un fotone, valuteremo le due alternative di polarizzazione. Proviamo pertanto a descrivere lo stato di polarizzazione di un fotone, una proprietà che si descrive mediante due stati (ad esempio polarizzazione verticale V oppure orizzontale O) e rientra nella cornice formale appena sviluppata. Prima però chiediamoci cosa significa classicamente che la luce è polarizzata V? Vuol dire che se inviamo la luce verso un polarizzatore orientato V la luce passa tutta. Se invece la inviamo contro un polarizzatore orizzontale essa sarà bloccata. Se invece la inviamo contro un polarizzatore orientato lungo un angolo  $\theta$  rispetto alla verticale allora, seguendo la ben nota legge di Malus, l'intensità uscente sarà ridotta di un fattore  $(\cos\theta)^2$ .

Dal punto di vista classico questi esperimenti si spiegano ammettendo che la polarizzazione sia la direzione di oscillazione del campo elettrico che, essendo di natura vettoriale, può essere scomposto lungo due versori tra loro ortogonali qualsiasi  $|\theta\rangle$  e  $|\frac{\pi}{2} + \theta\rangle$  nel seguente modo

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tot} &= \vec{E}_\theta + \vec{E}_{\frac{\pi}{2} + \theta} \\ &= \cos\theta E_{tot} |\theta\rangle - \sin\theta E_{tot} |\frac{\pi}{2} + \theta\rangle \end{aligned} \quad (38)$$

dove intendiamo con  $|\theta\rangle$  e  $|\frac{\pi}{2} + \theta\rangle$  rispettivamente il versore parallelo e ortogonale alla direzione di polarizzazione del polarizzatore. L'intensità dell'onda uscente dal polarizzatore è proporzionale al modulo quadro della componente del campo, ovvero

$$\frac{I_\theta}{I_{tot}} = \left| \frac{E_\theta}{E_{tot}} \right|^2 = (\cos\theta)^2 \quad (39)$$

come detto prima. Osservando il riflesso della luce sulla strada, che è polarizzato "O", esso può essere eliminato con occhiali polaroid, che sono polarizzati "V", in quanto  $\cos 90^\circ = 0$ . Questo se siamo in condizioni di fasci intensi. Ma se abbassiamo l'intensità possiamo descrivere la trasmissione della luce mediante singoli fotoni che attraversano il polarizzatore. Ma che significa che un fotone è polarizzato "V"? Vuol

### Box 3: Il prodotto tensoriale tra stati

Se lo stato di una moneta è dato da  $|T\rangle$ ;  $|C\rangle$  e il generico stato descritto dall'equazione (31) è  $|\psi\rangle$ , questi possiamo definirli mediante le componenti vettoriali di uno spazio cartesiano (ricordiamo però che gli stati in generale sono complessi) in modo da scrivere

$$|T\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |C\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_T \\ \psi_C \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gli stati di due monete "vivono" in due spazi separati. Il prodotto tensoriale produce uno spazio comune definito da:

$$|\psi_A, \psi_B\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = \begin{pmatrix} a_T \\ a_C \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_T \\ b_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_T \begin{pmatrix} b_T \\ b_C \end{pmatrix} \\ a_C \begin{pmatrix} b_T \\ b_C \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_T b_T \\ a_T b_C \\ a_C b_T \\ a_C b_C \end{pmatrix}$$

Ad esempio

$$|T, C\rangle = |T\rangle \otimes |C\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto da due vettori bidimensionali ne otteniamo di quadridimensionali. Lo spazio prodotto ha la dimensione data dal prodotto delle dimensioni dei singoli spazi.

dire che se inviamo questo fotone contro un filtro polarizzatore orientato verticalmente esso lo supererà sempre (Fig. 27), e non supererà mai un polarizzazione orizzontale (Fig. 28). Pertanto le probabilità di trasmissione sono

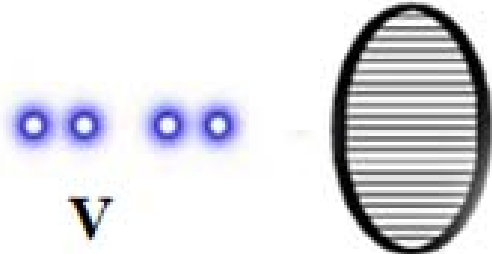
$$P_V = |\langle V|V\rangle|^2 = 1$$

$$P_O = |\langle V|O\rangle|^2 = 0 \quad (40)$$



**Figura 27:** Esperimento di polarizzazione di fotoni polarizzati verticalmente attraverso un polarizzatore verticale. Tutti i fotoni passano.

Questo implica che un fotone polarizzato a  $45^\circ$ , che indicheremo con il simbolo  $|+\rangle$ , attraverserà con certezza un filtro polarizzato a



**Figura 28:** Esperimento di polarizzazione di fotoni polarizzati verticalmente attraverso un polarizzatore orizzontale. Non passa nessun fotone.

$45^\circ$  (Fig 29) e non ne attraverserà uno polarizzato perpendicolarmente a tale direzione, cioè a  $135^\circ$ .

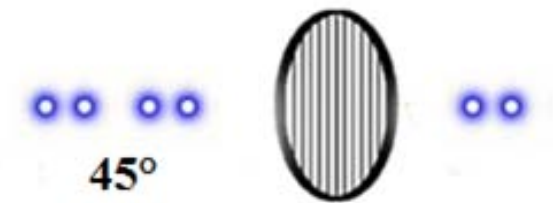
$$P = |\langle 45^\circ|+\rangle|^2 = 1 - |\langle 135^\circ|+\rangle|^2 = 1 \quad (41)$$

Cosa accade però se tale fotone  $|+\rangle$  viene spedito contro un filtro polarizzatore verticale V? Ebbene gli esperimenti a singolo fotone indicano che esso passerà o meno il test in modo assolutamente casuale, col 50% delle probabilità. In altre



**Figura 29:** Esperimento di polarizzazione di fotoni polarizzati a  $45^\circ$  attraverso un polarizzatore a  $45^\circ$ . Passano tutti i fotoni.

parole, spedendo un gran numero di fotoni nello stato  $|+\rangle$  (sappiamo che sono così perché hanno superato un precedente test di polarizzazione a  $45^\circ$ ) contro tale filtro “verticale  $V$ ”, allora metà di questi, in modo assolutamente arbitrario e casuale, passeranno il test, e metà no, proprio come per la moneta.



**Figura 30:** Esperimento di polarizzazione di fotoni polarizzati a  $45^\circ$  attraverso un polarizzatore verticale. Solo il 50% dei fotoni passa.

Prima della misura possiamo dire allora che lo stato del fotone può essere descritto nel modo seguente

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle + |O\rangle) \quad (42)$$

Il significato è il solito: se effettuiamo un test di polarizzazione verticale la probabilità che il fotone superi il test sarà

$$P = |\langle V|+\rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad (43)$$

Come possiamo vedere, il formalismo sviluppato nel caso della moneta è assolutamente in grado di descrivere cosa accade con fotoni inviati contro filtri polarizzatori. Ricordo però che nel caso della moneta classica lo stato  $|\psi\rangle$  rappresentava solo il nostro grado di conoscenza dello stato della moneta. Ad esso non poteva essere associato alcun elemento di realtà, mentre gli stati  $|T\rangle$  e  $|C\rangle$  erano oggettivi. Nel caso del fotone invece lo stato  $|+\rangle$  ha senso reale, anzi è il solo senso reale che possiamo attribuire

al fotone in sovrapposizione  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle + |O\rangle)$ , in quanto un fotone preparato in questo stato supera con certezza un test a  $45^\circ$ . Dunque, essendo in tale stato in modo oggettivo, non può possedere oggettivamente *anche* lo stato  $|V\rangle$  oppure lo stato  $|O\rangle$ , proprio il contrario della moneta! A meno di non immaginare una qualche struttura “nascosta” particolare del fotone. Ecco qui l’apparente paradosso: se accettiamo l’interpretazione quantistica degli stati data sopra anche per la moneta avremmo che essa è sia testa che croce (interpretazione alla Feynman) o non si trova in nessuno dei due stati (interpretazione alla Bohr), ma è possibile trovare un test che dia senso alla sovrapposizione. Ovviamente per sistemi macroscopici come monete tutto questo non ha alcun senso, mentre per fotoni, elettroni, atomi e molecole è proprio quello che accade. A causa di ciò nel formalismo quantistico il processo indicato dalla freccia

$$|+\rangle \implies |V\rangle. \quad (44)$$

adesso non indica più che la nostra conoscenza è aumentata all’improvviso, ma che il sistema improvvisamente è collassato in  $V$  a seguito della misura di polarizzazione (corrispondente all’apertura della scatola).

*La misurazione ha creato, in modo genuinamente casuale, l’elemento di realtà  $V$ .*

Infatti se dopo questo test ne facciamo un altro sullo stesso fotone collassato, esso supererà il test di polarizzazione con certezza. In linea generale se inviamo un fotone polarizzato verticalmente contro un polarizzatore orientato con un angolo  $\theta$  generico allora lo stato del fotone può essere scritto nel modo seguente rispetto al primo

$$|V\rangle = \cos\theta |\theta\rangle - \sin\theta \left| \frac{\pi}{2} + \theta \right\rangle \quad (45)$$

e la probabilità che il detector disposto dopo il polarizzatore suoni sarà

$$P = |\langle \theta|V\rangle|^2 = (\cos\theta)^2 \quad (46)$$

che è la legge di Malus. Quanto detto ci porta a concludere in via del tutto generale che

*Se un fotone (o un generico sistema quantistico) ha due possibili alternative, esso vivrà in una sovrapposizione di queste due possibilità finché, a seguito di una interazione con un apparato di misura classico*

e macroscopico, esso non collassa in una delle due realtà.

Abbiamo visto come nel caso della “moneta classica” nella scatola, lo stato rappresenti la nostra conoscenza (o il suo complementare -l’ignoranza-) sull’esito della “misura”, ma anche la certezza statistica che, eseguendo molte misurazioni, avremo per il 50% teste e per il 50% croci. La moneta tuttavia si trova in uno stato ben definito nella scatola indipendentemente se la apriamo o meno. Possiamo enunciare un criterio di realismo classico (RC) che vale per tutte le teorie classiche standard della fisica.

*RC: Lo stato  $|\psi\rangle$  esprime una conoscenza incompleta circa lo stato della moneta e con la misura (apertura della scatola) possiamo aumentarla; la moneta era oggettivamente in uno dei due stati anche prima dell’apertura della scatola; l’apertura della scatola fa collassare l’incertezza della nostra conoscenza.*

L’ipotesi RC è ciò che rende “classica” una descrizione della realtà. L’interpretazione della  $|\psi\rangle$  in fisica quantistica, nella sua versione alla Bohr, è però totalmente diversa. Essa non solo esprime ciò che sappiamo della moneta nella scatola ma essa esprime in modo completo il suo stato “reale”: la moneta quantistica si trova realmente e in modo oggettivo in uno stato indeterminato di testa e croce, ipotesi che potremmo definire “realismo quantistico (RQ)”.

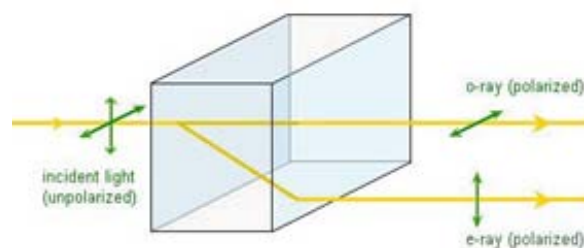
*RQ: la nostra conoscenza del sistema è completa e in nessun modo possiamo aumentarla; la moneta è oggettivamente in sovrapposizione di stati (come se non esistesse in nessuna delle due situazioni separate o esistesse in entrambe le alternative); l’apertura della scatola fa collassare lo stato quantistico in uno stato classicamente sensato che prima non esisteva in senso classico.*

Questa visione RQ va sotto il nome di *interpretazione di Copenaghen* dovuta principalmente a Bohr (principio di complementarità), Heisenberg (principio di indeterminazione) e Born (interpretazione probabilistica). In RQ il coefficiente davanti agli stati non esprime la probabilità che la moneta sia nello stato testa prima di aprire la scatola, ma la probabilità che *aprendo* la scatola, all’atto cioè della misura, lo stato indeterminato della moneta collassi nello stato testa, cioè si *oggettivi*. Torniamo ora alle nostre considerazioni sui fotoni e sulle monete. Fa qualche differenza pratica aderire a RC o a RQ? Per la moneta

no, in quanto aprendo la scatola, la troveremo sempre in uno dei due stati indipendentemente se prima era già nello stato osservato (RC) o in sovrapposizione indeterminata (RQ). Infatti in entrambe le interpretazioni dello stato  $|\psi\rangle$  tutto ciò che è possibile fare è prevedere l’esito statistico delle misure. La faccenda è un po’ simile al caso in cui, uscendo dalla stanza dopo aver scritto questa pagina sul mio PC (il tempo di prendere un caffè), rientrando ritrovo il mio PC sul tavolo in standby. Cosa è successo al computer nell’intervallo di tempo in cui ero fuori dalla stanza? Nel caso della RC diremmo che era andato in modalità standby prima di rientrare nella stanza. Nel caso della RQ diremmo che proprio l’apertura della stanza ha determinato il collasso del PC in quello stato, mentre prima esso era in una sovrapposizione non oggettiva di acceso e spento. Non possiamo verificare quale delle due ipotesi sia vera in quanto gli esiti sono sempre gli stessi. E allora perché preoccuparsi di questi accademismi? Lo vedremo tra qualche riga.

## Sovrapposizione di due cammini

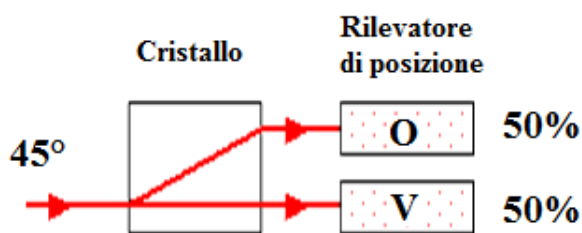
Finché si parla di sovrapposizioni di stati si potrebbe essere tentati ad ammettere che questa interpretazione non epistemologica (non inerente cioè alla nostra ignoranza) ma ontologica (inerente alla realtà dell’oggetto studiato), ovvero l’interpretazione di Copenaghen, sia legata solo a problematiche di polarizzazione. Invece è qualcosa di molto generale e connesso perfino alla propagazione nello spazio. E’ possibile infatti associare a stati di polarizzazione dei percorsi spaziali o traiettorie e vedere cosa accade. Prendiamo un cristallo birifrangente come in figura 31.



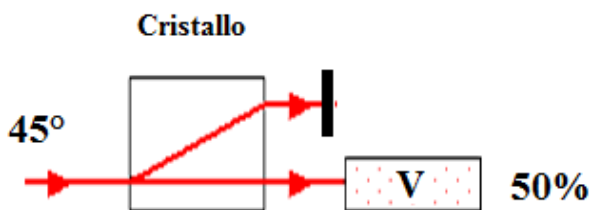
**Figura 31:** Cristallo birifrangente.

Un cristallo birifrangente separa un fascio di luce non polarizzato in due fasci paralleli polariz-

zati ortogonalmente. Il fascio ordinario (ovvero quello che segue la nota legge di Snell della rifrazione) risulterà polarizzato O, mentre quello straordinario sarà polarizzato V. Ovviamente se il fascio incidente è polarizzato già dall'inizio lungo V allora avremo in uscita solo il raggio straordinario. Se è polarizzato O già dall'inizio avremo in uscita solo il raggio ordinario. Se inviamo infine un raggio polarizzato a 45° avremo ovviamente due fasci di pari intensità polarizzati uno O e uno V. Questa situazione è schematizzata in figura 32.



**Figura 32:** Esperimento di separazione di un fascio di fotoni polarizzati a 45° attraverso un cristallo birifrangente.



**Figura 33:** Esperimento di separazione di un fascio di fotoni polarizzati a 45° attraverso un cristallo birifrangente dove un fascio è bloccato.

Ci chiediamo cosa accade se inviamo un fotone alla volta. Ovviamente stando alla sovrapposizione e al fatto che lo stato di polarizzazione O è identificato col percorso superiore (su) e che lo stato di polarizzazione V è identificato col percorso inferiore (giù) avremo che

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle + |O\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|giù\rangle + |su\rangle) \quad (47)$$

Questo implica che il rivelatore inferiore (o superiore) suonerà il 50% dei casi (il quadrato del coefficiente davanti allo stato  $|giù\rangle$ ). Poniamoci una domanda: quando il contatore inferiore fa

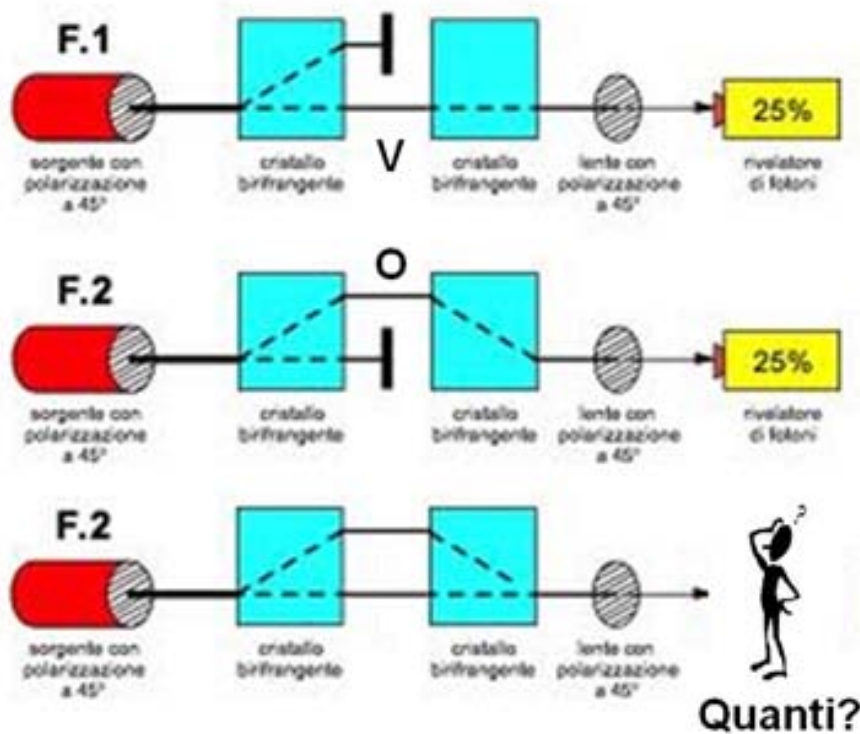
click il fotone polarizzato a 45° è passato per il raggio inferiore o superiore? Ovviamente diremo inferiore. Infatti se blocchiamo il primo fascio il contatore inferiore farà click il 50% delle volte. Quindi il fotone a 45°, concludiamo, a volte passa per il percorso superiore, altre inferiore, a caso. La sovrapposizione di percorsi non è una situazione "reale" più di quanto non lo sia quella della moneta in sovrapposizione testa e croce. Eppure osservate ora cosa accade disponendo un altro cristallo ma ribaltato e disponiamo oltre questo cristallo un filtro polarizzatore a 45° e un contatore di fotoni (Fig. 34F1). Nel primo esperimento blocchiamo il fascio superiore. Quanti fotoni attraverseranno il polarizzatore? Ovviamente la probabilità che il fotone in ingresso  $|+\rangle$  prenda il percorso giù è pari al 50% ( $P_1 = |\langle V|+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$ ). Una volta però che questo percorso sarà stato preso, il fotone sarà polarizzato  $|V\rangle$ , per cui quando incontrerà il filtro avrà una probabilità del 50% di superare il test ( $P_2 = |\langle 45^\circ|V\rangle|^2 = \frac{1}{2}$ ). La probabilità risultante sarà il prodotto delle probabilità, ovvero il 25% e l'intensità del fascio in ingresso sarà ridotto di  $\frac{1}{4}$ . È ciò che si osserva, un fotone dopo l'altro (Figura 34F1).

Nel secondo esperimento blocchiamo il fascio inferiore e otterremo, analogamente a quanto visto nel primo esperimento, sempre il 25% (Figura 34F2).

Nel terzo esperimento ((Figura 34F3) non blocchiamo nulla. Se il fotone in ingresso prendesse o un percorso o un altro (ovvero se collassasse o in V o in O) durante il tempo di volo, ci aspetteremmo un risultato dato dalla somma delle due situazioni viste prima, cioè il contatore suonerà il 50% delle volte. E' davvero così? No: ciò che accade è che *nel terzo esperimento accade che il contatore suonerà il 100% delle volte e non solo la metà dei casi!* Il formalismo ci aiuta a capire questo aspetto. Infatti calcoliamo la probabilità che il fotone in ingresso superi il test di polarizzazione finale a 45°. Tenendo conto dell'equazione (47)

$$P = |\langle 45^\circ|+\rangle|^2 = 1 \quad (48)$$

La fisica quantistica fa le previsioni corrette! Ne concludiamo che l'interpretazione meramente statistica ed epistemologica non regge e il fotone davvero non si trova a possedere in modo oggettivo lo stato V ed O, come nel caso delle mo-



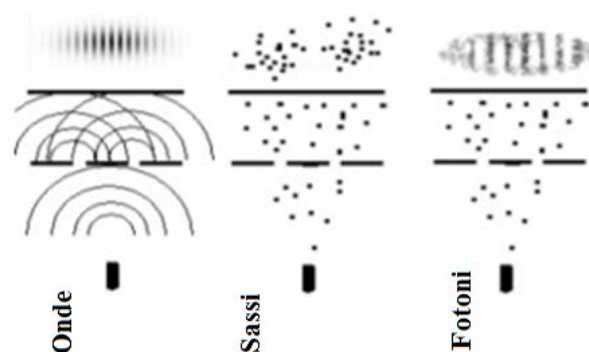
**Figura 34:** Successione di esperimenti con singoli fotoni attraverso due cristalli birifrangenti. I fotoni incidenti sono polarizzati a  $45^\circ$ . In coda all'apparato vi è un filtro polarizzato a  $45^\circ$  e un contatore di fotoni. Nel primo esperimento il fascio superiore è bloccato e vengono conteggiati il 25% dei fotoni incidenti. Nel secondo è bloccato il fascio inferiore e vengono conteggiati il 25% dei fotoni incidenti. Questi due esperimenti si spiegano in modo classico immaginando che il 50% dei fotoni incidenti sono polarizzati oggettivamente V e gli altri O. Nel terzo esperimenti nessun percorso è bloccato. Se le polarizzazioni dei fotoni incidenti fossero oggettivamente una miscela statistica di V e O otterremo che il contatore misura il 50% dei fotoni incidenti. Invece non è così. La risposta alla domanda "quanti?" che lo sperimentatore si pone è nel testo e spiega come mai i "quanti" conteggiati non trovano spiegazione classica in una miscela statistica.

nete. Ma questo implica che non ha nemmeno un percorso oggettivo. L'elemento di realtà *percorso giù* o *percorso su* non è inerente al fotone in questione. E se d'altro canto vogliamo individuare quale percorso il fotone sceglie bloccandone uno ecco che invece di avere il 50% di risultati otterremo solo il 25%, la misura altera i risultati. In effetti possiamo dire che lo stato a  $45^\circ$  è uno stato di interferenza dei fotoni O e V. Ma anche O e V sono stati di interferenza degli stati a  $45^\circ$  e  $135^\circ$ . Solo che queste coppie di stati (O,V) e ( $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ) sono, per dirla alla Bohr, complementari. Non possiamo misurare entrambe le coppie di stati senza alterare la misura. Proprio come non possiamo misurare posizione e velocità di una particella quantistica, in quanto proprietà complementari.

## Interferenza di cammini

Ora siamo in grado di rispondere alla domanda: come può un fotone, che è un proiettile, fare interferenza, che è la proprietà tipica di un'onda? Schematizzo quello che succede se inviamo on-

de, sassi e fotoni contro una doppia fenditura in figura 35.



**Figura 35:** Esperimento di interferenza attraverso due fenditure mediante onde (a sinistra), sassi (al centro) e fotoni (a destra).

Come è possibile che compaia, dunque, la figura di interferenza con sassi quantistici? Prima cerchiamo di calcolare cosa accade se concepiamo la luce come un'onda classica elettromagnetica. Abbiamo detto che il campo elettrico, infatti, è un'utile strumento per fornirci la probabilità di trovare un fotone. In questo senso possiamo usare la propagazione del campo elettrico attra-

verso le due fenditure come fosse una semplice onda trasversale (figura 35 a sinistra). Ricavati i valori dell'intensità finale essa rappresenterà una quantità proporzionale alla probabilità di impatto del fotone sullo schermo. Ecco perché inviando un fotone alla volta esso si comporta casualmente ma poi emerge un "pattern". La meccanica quantistica ci fornisce, mediante il concetto di campo elettrico, la statistica di distribuzione dei fotoni. Nella teoria ondulatoria il fenomeno era facilmente spiegabile come una sovrapposizione dei campi elettrici. In particolare l'intensità  $I$  era proporzionale al modulo quadro del campo totale:

$$I \sim |E_1 + E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + \{E_1^* E_2 + E_1 E_2^*\} \quad (49)$$

I termini tra parentesi sono i termini di interferenza. Volendo scrivere un'onda come un numero complesso del tipo

$$E_1(x, t) = E_0 e^{i\delta_1} = E_0 e^{i(kx_1 - \omega t)}; \\ E_2(x, t) = E_0 e^{i\delta_2} = E_0 e^{i(kx_2 - \omega t)} \quad (50)$$

dove il numero d'onda è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda ( $k=2\pi/\lambda$ ) e la pulsazione è proporzionale alla frequenza ( $\omega = 2\pi\nu$ ), l'equazione (49) diventa

$$I \sim \{1 + \cos(\delta_2 - \delta_1)\} \quad (51)$$

L'intensità della luce diventa nulla se l'argomento del coseno è un multiplo intero dispari di  $\pi$ , ovvero nel caso in cui

$$x_2 - x_1 = m \frac{\lambda}{2} \quad (52)$$

che è la formula (5) trovata nella parte precedente. I minimi si trovano in tutti quei punti le cui posizioni distano dalle fenditure un multiplo di mezza lunghezza d'onda.

Ma, visto che abbiamo due fenditure, possiamo eludere il concetto di campo elettrico ed effettuare il calcolo come un sistema a due stati? Sì. Lo stato corrisponde all'alternativa *il fotone descrive la traiettoria sorgente-fenditura top-punto  $x$  (traiettoria  $T$ )* oppure quello corrispondente al-

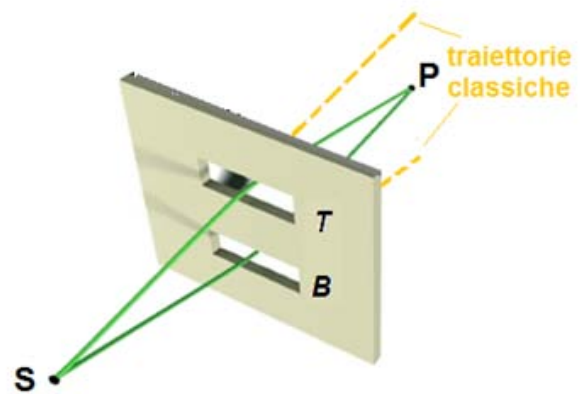
l'alternativa *il fotone descrive la traiettoria sorgente-fenditura bottom-punto  $x$  (traiettoria  $B$ )*. (Figura 36) Come abbiamo visto per la polarizzazione e per i cristalli birifrangenti, se il fotone ha due alternative di percorso, si pone in una sovrapposizione di percorsi (che non normalizzeremo per semplicità)

$$|\psi\rangle \sim |T\rangle + |B\rangle \quad (53)$$

La probabilità che il fotone giunga in  $x$  è allora proporzionale a

$$P = |\langle x|\psi\rangle|^2 \sim |\langle x|T\rangle + \langle x|B\rangle|^2 \quad (54)$$

Notate che questa sovrapposizione tra ampiezze è analoga a quella della catena di uguaglianze vista per i cristalli birifrangenti. Quanto valgono le ampiezze  $\langle x|T\rangle$  o  $\langle x|B\rangle$ ? Ebbene l'aspetto ondulatorio che abbiamo nella trattazione del problema col campo elettrico viene qui ripreso ammettendo che i due stati sono diversi tra loro solo a causa di una fase in quanto i cammini sono equiprobabili. Questo aspetto potrebbe sembrare alquanto strano in quanto i cammini più probabili dovrebbero essere quelli rettilinei che collegano la sorgente a ciascuna fenditura come rappresentati e invece gli altri dovrebbero essere trascurabili, proprio come per i sassi (figura 35).



**Figura 36:** Esperimento di interferenza attraverso due fenditure mediante l'idea dei percorsi in sovrapposizione. Nel caso di traiettorie classiche i fotoni seguirebbero le leggi dell'ottica geometrica e il punto  $P$  non potrebbe mai essere raggiunto.

Tuttavia questo sarebbe contrario a ciò che si sperimenta, ovvero l'emergere del pattern di interferenza. Se ammettiamo invece che *tutti i cam-*



*mini sono equiprobabili* allora lo saranno anche quelli che collegano la sorgente a un punto P (in posizione  $x$ ) qualsiasi dello schermo attraverso le fenditure (figura 36). In linea di principio, classicamente, nessuna "pallina" potrebbe abbandonare S, passare per B e deviare verso P. Classicamente se la luce non fosse un'onda ma fosse fatta di particelle, nella parte di schermo corrispondente allo spazio tra le due fenditure, dovremmo vedere buio. Invece vediamo luce. Ecco perché abbiamo dovuto supporre che la luce fosse un'onda e non costituita da proiettili. Ora invece stiamo asserendo che essa è fatta di proiettili, ma questi sono alquanto strani: si pongono in una sovrapposizione di traiettorie e riescono ad arrivare in P. Tutte le traiettorie sono semplicemente sfasate di un fattore complesso che non altera la probabilità del singolo cammino, per cui

$$\langle x|T\rangle = e^{i\delta_T}; \langle x|B\rangle = e^{i\delta_B} \quad (55)$$

Ora questo implica che la probabilità  $P$  che il fotone impatti sul punto P passando per uno o per l'altro dei cammini sarà

$$P = |\langle x|\psi\rangle|^2 \sim |e^{i\delta_T} + e^{i\delta_B}|^2 \sim 1 + \cos(\delta_B - \delta_T) \quad (56)$$

Che fornisce la figura di interferenza. Cosa esprime fisicamente la differenza di fase  $\delta_B - \delta_T$ ? Ovviamente sarà  $k(x_T - x_B)$  cioè il numero d'onda  $k$  moltiplicato la differenza di cammino ottico dalle fenditure al punto P sullo schermo, proprio come nell'equazione (51). Abbiamo provato che anche l'interferenza può essere spiegata usando il concetto di fotone e di sovrapposizione degli stati. Ma se gli stati sono cammini cosa significa concretamente sovrapposizione dei cammini? Come spiegare il fatto che un fotone, che non si può dividere, sente che entrambe le fenditure sono aperte? Come interpretare cioè la sovrapposizione di stati di un fotone?

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{alternativa A}\rangle + |\text{alternativa B}\rangle) \quad (57)$$

Ebbene esporrò qui brevemente le posizioni tipiche, eccetto quella della decoerenza che

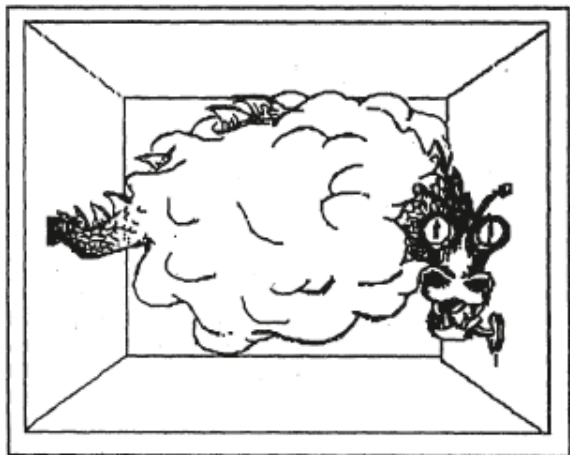
discuterò alla fine del lavoro.

## Non porti troppe domande: l'interpretazione di Copenaghen

In questa interpretazione la funzione d'onda  $\Psi$  descrive in modo completo lo stato di un oggetto quantistico. La  $\Psi$  è un ente matematico che vive in uno spazio astratto e fornisce la probabilità di un evento. La sovrapposizione di alternative indica che il sistema si trova in una sorta di realtà sospesa, nebulosa, che evolve seguendo leggi deterministiche (come l'equazione di Shrodinger) ma che collassa in un elemento di realtà classica in modo genuinamente casuale quando il sistema viene osservato o misurato da un apparato classico. Necessariamente il mondo sarà pertanto diviso in oggetto osservato quantistico e apparato di misura classico e solo alcuni elementi di realtà sono posseduti oggettivamente da un sistema quantistico, altri elementi di realtà sono creati mediante le misure con apparati classici. Ci sono poi elementi di realtà complementari. Impostare un esperimento per misurare un aspetto della realtà non permette di mostrare quello ad esso complementare, se non alterando lo stato del sistema in modo irreversibile. Ad esempio o vediamo frange di interferenza (proprietà ondulatorie) o vediamo due strisce in corrispondenza delle fenditure (proprietà corpuscolari) a seconda se non ci chiediamo o se ci chiediamo da quale fenditura è passato il fotone. Le due domande implicano apparati sperimentali mutuamente esclusivi (principio di complementarità di Bohr) e non è possibile rispondere a tali questioni simultaneamente. La situazione può essere rappresentata dal drago nebuloso di Wheeler che esprime l'intrinseco velo quantistico che parrebbe emergere dalla interpretazione di Copenaghen prima della misura.

Gli svantaggi della interpretazione di Copenaghen è che non risponde a due domande

1. come è possibile avere una descrizione unitaria del mondo se la teoria divide la realtà in un sistema quantistico (il fotone) e un sistema classico (il polarizzatore e il contatore)?
2. Se un oggetto macroscopico è fatto esso stesso da atomi non dovremmo usare la



**Figura 37:** *Il drago nebuloso di Wheeler. Nella interpretazione di Copenhagen la realtà è sospesa prima della misura in stati non identificabili con situazioni classiche oggettive.*

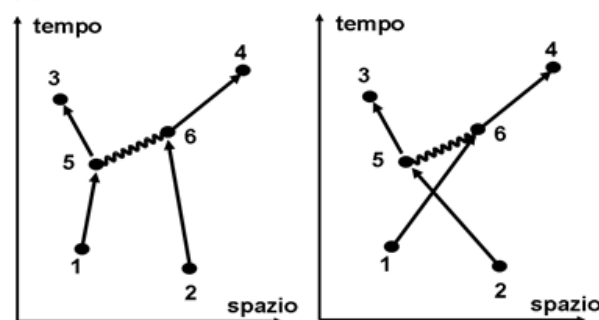
stessa descrizione quantistica usata per il fotone? Ma allora come mai non vediamo sovrapposizioni di stati per oggetti macroscopici?

Circa la prima domanda nei fatti l'interpretazione di Copenhagen fa leva su due descrizioni della realtà: una deterministica (l'evoluzione dello stato mediante l'equazione di Shroedinger) e l'altra basata sul collasso casuale dello stato causato dalla interazione del sistema quantistico con l'apparato di misura classico. Punto. Per buona pace di chi vuole adoperare la fisica quantistica anche in cosmologia per descrivere la funzione d'onda di tutto l'universo al momento del Big Bang. In tal caso chi è l'apparato di misura? Alla seconda domanda in genere si risponde in modo molto ambiguo. Ad esempio dicendo che i corpi classici hanno una lunghezza d'onda di De Broglie molto piccola data la massa per cui tutti gli effetti quantistici sono piccoli. Tuttavia la teoria non fornisce alcun modello di transizione dal microscopico al macroscopico in situazioni più delicate come l'entanglement tra un oggetto micro e un oggetto macro, come nel caso del famoso gatto di Shroedinger.

## Quante storie! I cammini di Feynman

Questa dei cammini simultanei più che essere una visione diversa da quella di Copenhagen è

un diverso punto di vista che val la pena però affrontare. Piuttosto che interpretare la sovrapposizione come una sospensione della realtà in uno stato nebuloso di elementi di realtà (non ha senso chiedersi se il fotone ha uno stato A o B prima della misura al contrario della moneta) Feynman interpreta la sovrapposizione come storie alternative che hanno luogo simultaneamente (il fotone esiste in entrambi gli stati A e B e fa le due cose simultaneamente senza dividerci!). Fu proprio il principio di minima azione (o di Fermat) a spingere Feynman a concepire questo punto di vista che trova riscontro soprattutto nella elettrodinamica quantistica, in cui ad ogni ampiezza di probabilità di un evento, calcolata con metodi matematici rigorosi ma complessi, si associa un grafico che ridona una minima visualizzazione geometrica del processo. Un esempio classico: supponiamo di voler calcolare la probabilità che due elettroni in moto l'uno verso l'altro, interagendo per via della carica, siano deflessi all'indietro. Ebbene in una dinamica spaziotemporale (spazio 1D+tempo) il processo si sviluppa in un piano e gli elettroni si scambiano un fotone.



**Figura 38:** *Processo di interazione tra due elettroni secondo Feynman: i due elettroni 1 e 2 interagiscono scambiandosi un fotone (la linea ondulata tra 5 e 6) e subiscono un rinculo per portarsi in 3 e 4. Data l'indistinguibilità del processo questa storia non è distinguibile nei risultati da quella in cui i due elettroni 1 e 2 si scambiano (a destra). Entrambe le storie vanno conteggiate come reali.*

Il fotone è disegnato inclinato perché segue il cono-luce (vedi seconda parte del lavoro). Tuttavia anche il grafico a destra è consentito e contempla la situazione in cui i due elettroni sono scambiati. A causa delle proprietà fermioniche degli elettroni (ovvero due elettroni non possono avere gli stessi stati quantici) che seguono il principio di esclusione di Pauli e della loro in-

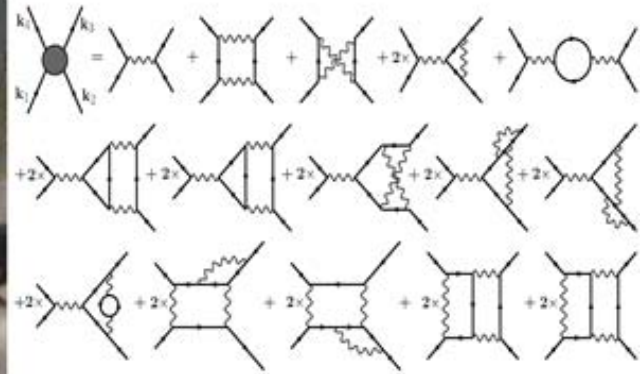
distinguibilità non possiamo a priori capire se ciò che è accaduto è il processo di figura 38 sinistra o 38 destra. Allora, per Feynman, entrambe le storie sono vissute dagli elettroni, e ciascuna storia rappresenta l'ampiezza di probabilità del processo, cioè rappresenta un numero. Poiché le ampiezze e non le probabilità si sommano in MQ, anche qui sommeremo i grafici e ne faremo il modulo quadro per ottenere la probabilità. La potenza di questo metodo è che se da un lato rappresenta un interessante ed efficace strumento matematico per calcolare le probabilità quantistiche d'altro canto ci riconsegna una visualizzazione dei processi, sebbene dobbiamo considerarli tutti e sommarli. Difficilmente possiamo dire che la possibilità è sospesa in questo quadro finché non la si osserva. Piuttosto essa è una sovrapposizione di tutte quante queste realtà. Purtroppo le storie di figura 38 non sono gli unici processi da tenere in conto se vogliamo descrivere in modo preciso i risultati sperimentali. Il processo in questione è molto più complesso e se vogliamo trovare un accordo molto preciso tra teoria ed esperimento bisogna sommare tutti i possibili eventi, come quelli rappresentati sul famoso furgone con cui Feynman girava con la sua famiglia, in figura 39.

Dobbiamo cioè considerare processi, che per far convergere i conti, anche esotici e poco probabili, e che richiedono alla fine dei conti un intervento esterno di chi calcola per eliminare gli infiniti che spesso vengono fuori dalle somme (procedura di rinormalizzazione). Insomma se saltano degli infiniti metterli sotto il tappeto e tacere. Ovviamente se la somma converge nessun problema. Ma se diverge sono guai perché l'intero risultato darà una probabilità infinita, che non ha senso. Per convergere è necessario che il parametro di accoppiamento ( $\alpha$  nel nostro esempio, che vale  $1/137$  ed è chiamata costante fine) della interazione tra particella "materiale" (l'elettrone nel nostro caso) e la particella di "scambio" (il fotone nel nostro caso) sia minore dell'unità. Il termine di accoppiamento è moltiplicato per l'ampiezza un numero di volte pari a quanti vertici ci sono nel grafico. Negli eventi del primo ordine mostrati in figura avremo pertanto che ogni storia sarà moltiplicata per  $\alpha^2$ . Negli eventi di ordine superiore sarà  $\alpha^N$ . La serie converge perché il parametro di accoppiamento è

inferiore a uno e tutto va bene, a tal punto che l'elettrodinamica quantistica è la teoria più precisa mai inventata dall'uomo. Ma in altri modelli come nella Cromodinamica Quantistica (QCD) il termine di accoppiamento della interazione è superiore a uno e la somma va troncata in modo artificiale per evitare esplosioni! Non è un quadro confortante per la fisica teorica. Faccio notare, a costo di essere pedante, che in questo approccio la probabilità non è stata cancellata, siamo ancora in pieno regime di interpretazione standard ma con un punto di vista diverso e degno di un premio Nobel, come fu conferito giustamente a Feynman per aver risolto gran parte dei problemi legati alla quantizzazione dell'elettromagnetismo. Un altro aspetto, a mio avviso molto interessante, è che il vuoto assume uno status di entità dinamica, perché ha un effetto sui processi molto importante. Esso non è assenza di processi ma, al contrario, pullula di eventi e fluttuazioni anche molto violente. Un esempio si ha quando disponiamo un atomo nello stato eccitato stazionario. La MQ standard e classica (cioè non relativistica) prevede che l'elettrone resterà per sempre in quello stato. Eppure esso dopo un po' ricade nello stato fondamentale emettendo un fotone in modo spontaneo. Come mai? In realtà l'elettrodinamica quantistica (QED) ha mostrato che l'emissione non avviene in modo spontaneo ma indotto dalle fluttuazioni del vuoto che generano quanti di campo elettromagnetico (fotoni virtuali) i quali stimolano l'elettrone a decadere. Questi quanti vivono per un tempo molto breve dato dal principio di indeterminazione di Heisenberg  $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$  dove  $\Delta E$  rappresenta l'energia presa in prestito dal vuoto (violando la conservazione dell'energia per quel tempo minuscolo) per creare le fluttuazioni. Restano sospese le problematiche già viste nella interpretazione di Copenaghen, da cui tutto sommato questa visione non si discosta, ovvero come mai non si vedono sovrapposizioni di storie nel mondo macroscopico.

## Il rasoio di Occam? Mai sentito!

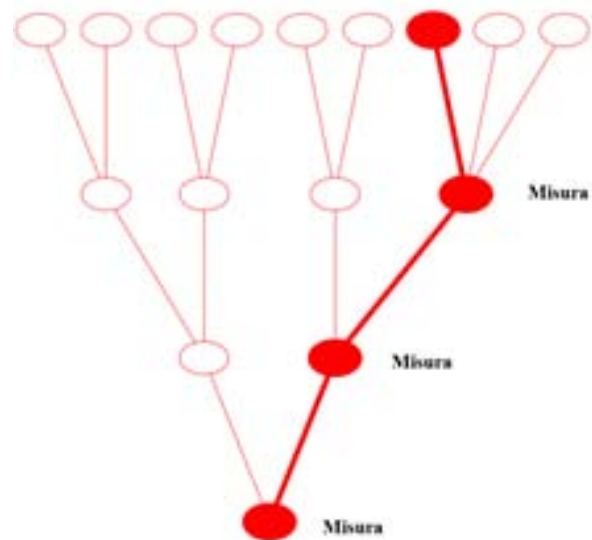
Nel 1957 Hugh Everett propose una diversa interpretazione detta a "molti mondi" in cui tenta di risolvere definitivamente la dicotomia tra il collasso genuinamente casuale dello stato dov-



**Figura 39:** Furgone di Feynman dove sono rappresentati alcune delle storie possibili della interazione tra due fermioni come due elettroni. A destra storie di ordine inferiore ma da conteggiare per avere un riscontro con l'esperimento.

to alla misura e la sua evoluzione deterministica dovuta alla equazione di Shroedinger. La soluzione è che il *collasso casuale* è solo illusorio. Infatti il sistema evolve in modo deterministico e in sovrapposizione di stati. Lo stato A vive in un universo A e lo stato B in un universo B, e questi interagiscono tra loro durante la sovrapposizione. Quando avviene la misura accade che tutto l'universo che interagisce con lo stato quantico si divide esso stesso in due copie, una in cui la particella è collassata in A e una in cui essa è collassata in B. In ciascun universo ci sarà anche l'osservatore che in un universo misurerà lo stato A e nell'altro B. L'osservatore in A perde consapevolezza della sua copia in B. In questo modo il determinismo è ancora vivo e vegeto e la casualità è solo illusoria perché perdiamo conoscenza dell'altro universo. A ben rifletterci quindi mentre in una interpretazione del tutto classica il collasso della funzione d'onda vuol dire prendere conoscenza dello stato reale del sistema, nella interpretazione di Copenaghen il collasso è una oggettivazione dello stato del sistema, nella interpretazione a molti mondi il collasso è altro se non la perdita di informazione perché ci sdoppiamo e noi abbiamo coscienza solo di questo universo A e non dell'altro, come la nostra copia del resto ha consapevolezza solo dell'universo B e non dell'universo A.

Questa teoria ha il vantaggio di rimuovere il problema dell'osservatore e risponde alla domanda: se è necessario un osservatore per oggettivare un sistema quantistico chi osservava l'universo alla sua nascita? I vantaggi sono indubbi per i cosmologi, perché si elude il problema della misura in modo semplice, ma ha come svantag-



**Figura 40:** Interpretazione a molti mondi di Everett. Noi siamo consci solo in una delle storie parallele sviluppatesi a seguito delle misure, ma ci sono copie di noi, altrettanto consci, in tutti gli altri mondi. La funzione d'onda descrive il tutto indiviso della pluralità di mondi e il collasso casuale è dato solo dal fatto che le nostre esperienze coscienti vivono in una "traiettoria" (quella rossa) e non abbiamo esperienza delle altre situazioni (come le nostre copie non hanno esperienza cosciente delle nostre percezioni in questo mondo).

gio il dover postulare infinite copie di sé stessi. Per uno sperimentale come il sottoscritto però non si può non pensare al povero Occam e alla sua frase: "non considerare la pluralità se non è necessario". Everett risponderebbe che è stato necessario. Peccato che è una tesi impossibile da dimostrare oggi. Chissà, magari ci riusciremo con un computer quantistico.

## L'assenza di una prova non è la prova dell'assenza: le teorie a variabili nascoste di Bohm

Di fronte ad un panorama come quello descritto molti fisici gettano la spugna e sostengono che alla fine la fisica debba solo fare previsioni e non modelli di realtà. In fondo ciò che si richiede in genere ad una teoria fisica è che funzioni e la fisica quantistica funziona da Dio (che, parafrasando il famoso motto di Einstein, parrebbe giocare ai dadi) indipendentemente dalle interpretazioni. Il formalismo è neutro rispetto alle interpretazioni e al più ogni interpretazione ci fa vedere aspetti che l'altra non ci fa notare. Ma senza interpretare nulla i conti tornano lo stesso. Insomma, senza fare qualunquismo, è un po' come le politiche economiche impostate dalla destra e dalla sinistra oggi. Indipendentemente dal colore il risultato è lo stesso in quanto è a livello globale che si prendono le vere decisioni e tutto funziona come deve funzionare con questo modello di libero mercato in mente (giudicate voi se bene o male) che è neutro alle interpretazioni circa la natura del capitale. Questa visione è la sindrome del "zitto e calcola e non chiederti altro". Non è la prima volta che accade. In fondo non era così anche la teoria dell'azione a distanza di Newton in cui il suo "non fingo ipotesi" esprimeva un disagio dello stesso padre della meccanica gravitazionale attorno al problema della trasmissione della forza attraverso il vuoto? Eppure la teoria funzionava benissimo nel fare previsioni a tal punto che grazie ad essa fu scoperto il pianeta Nettuno da delle perturbazioni del moto orbitale di Urano. Alcuni tuttavia non si accontentano del zitto e calcola. E direi fortunatamente, perché altrimenti non avremmo oggi la teoria della relatività generale, che spiega il *meccanismo di trasmissione* della forza di gravità come teoria geometrica di campo. La fisica quantistica appartiene nei fatti a quelle teorie che non spiegano i "meccanismi" ma fornisce le regole generali. Ma se ciò fosse vero allora dovremmo rinunciare a dare una spiegazione razionale del mondo, in quanto se un fotone collassa in uno stato di polarizzazione definito lo fa non a seguito di un meccanismo ma in virtù di una "decisione" che non ha cause. Il fotone collassa perché collassa così come io al mattino vado sempre a bere

un cappuccino a un bar A e un giorno appresso al bar B, a caso. Chi mi osservasse dall'esterno direbbe: domani prevedo che quel tizio andrà a prendere il cappuccino al bar A col 50% di probabilità. Perché? Un fisico quantistico ortodosso direbbe: perché così ha deciso. Un fisico però che si interroga sui meccanismi delle cose crede che ci sia dell'altro dietro. Infatti mentre scrivo queste righe sono andato al bar A perché pioveva e ho trovato più conveniente andare in quel bar e non nell'altro per non bagnarmi. Vi è cioè una variabile nascosta (odio bagnarmi durante la pioggia) che spiega come mai ho preso quella decisione. A volte questa variabile non dipende da agenti esterni e misurabili ma dal mio stato d'animo inaccessibile perfino al sottoscritto. Ma questo vuol dire che non vi è una causa nella decisione, per quanto inconscia? Ebbene la posizione di un fisico quantistico ortodosso è proprio questa: non vi è una causa al collasso nello stato A o B. E il contrario di assenze di CAUSA è il CASO, parole simili ma profondamente diverse. Il punto è che da quando la scienza è nata noi interpretiamo gli eventi in termini di causa-effetto. Introdurre il caso ha per molti il sapore di una non spiegazione. E David Bohm era uno di questi. Nel 1952 Bohm scrisse un articolo in due parti in cui iniziò a porsi la questione se non fosse "il caso" di iniziare a pensare che il problema risiedesse nella interpretazione probabilistica della funzione d'onda e non nella realtà ontologica dei quanti (di luce o di materia). Nel suo articolo Bohm esplicita il suo pensiero in poche e semplici mosse: partendo dall'equazione di Shroedinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(x)\psi \quad (58)$$

ed esprimendo la funzione d'onda mediante un'ampiezza  $R$  e una fase  $S$

$$\psi = \langle x|\psi \rangle = R e^{i\frac{S}{\hbar}} \quad (59)$$

si ottiene una coppia di equazioni reali

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m} [R \nabla^2 S + 2 \nabla R \bullet \nabla S] \quad (60)$$

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + U(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (61)$$

L'equazione (61) può essere vista come l'equazione di Hamilton Jacobi (HJ) di un sistema classico quando  $\hbar$  va a zero o la massa dell'oggetto diventa grande (cioè per strutture macroscopiche). Non vi è quindi una separazione netta tra realtà quantistica e classica. Primo vantaggio. Nella equazione di HJ se si associa alla quantità  $\nabla S$  la velocità  $v$  ( $v = \nabla S/m$ ) della particella, il primo termine a secondo membro non è altro che l'energia cinetica. Per questo motivo la prima equazione, stando alla interpretazione classica in cui la probabilità  $P$  di un processo è data dal quadrato dell'ampiezza dell'onda ( $P = R^2$ ) può essere scritta in un altro modo ovvero come un'equazione di continuità per la densità di probabilità dell'insieme di particelle dell'esperimento. Riscriviamo pertanto la coppia di equazioni

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \bullet (Pv) = 0 \quad (62)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + U(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0 \quad (63)$$

La seconda ci indica che la particella quantistica è sottoposta a due tipi di potenziale: quello classico  $U$  e un potenziale quantistico che chiameremo  $Q$

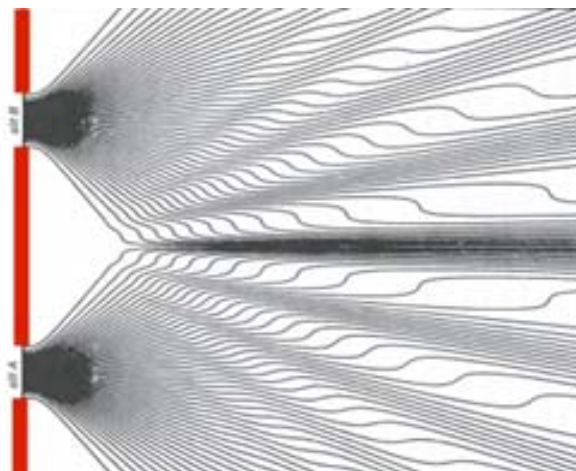
$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (64)$$

che dipenderà dalla scala del fenomeno, dalla massa del sistema e dalla ampiezza della funzione d'onda. La seconda equazione è analoga a quanto visto nella prima parte di questo lavoro a proposito della equazione *iconale* modificata per tener conto degli effetti di diffrazione e interferenza della luce e che per comodità riportiamo qui sotto per un onda elettromagnetica in cui la fase  $S$  è indipendente dal tempo

$$|\nabla S|^2 = n^2 + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{\nabla^2 E_0}{E_0} \quad (65)$$

In questo caso l'indice di rifrazione prende il posto della energia potenziale  $U$ , l'ampiezza del campo elettrico il posto dell'ampiezza della funzione d'onda (in accordo con la nostra interpretazione attuale del campo elettrico), e la lunghezza d'onda ha a che vedere con la massa della particella. In sostanza la particella si muove sotto un

campo di forze non dovuto solo all'interazione della particella con un altro sistema "materiale" (o nel caso del fotone in mezzi con un dato indice di rifrazione), ma è determinato anche da questo potenziale quantico che dipende dalla funzione d'onda o dal campo elettrico per un elettrone e per un fotone rispettivamente. In questa interpretazione la funzione d'onda rappresenta un vero e proprio campo e non una interpretazione statistica del sistema. Un tale potenziale non è osservabile su grandi scale in quanto la costante di Planck è troppo piccola o la massa del sistema troppo grande. Un esperimento a doppia fenditura viene perciò interpretato da Bohm come un processo in cui la particella ha una esistenza in un punto oggettivo dello spazio e del tempo e viene "guidata" dall'onda. La particella non è incastonata come propose De Broglie ma è la manifestazione dell'onda stessa.



**Figura 41:** *Onda pilota di Bohm a seguito della interferenza da due fenditure. La particella segue, come manifestazione dell'onda stessa, una traiettoria di tipo oggettivo.*

In questo caso il fotone, una manifestazione del campo elettrico, è pilotato da questo lungo una delle possibili traiettorie, come un serfista su un'onda marina. A seconda della sua posizione il fotone può prendere una direzione o l'altra e impattare sullo schermo nelle regioni dove l'onda ha la massima ampiezza. Il caso non esiste ma è solo apparente in quanto noi non conosciamo esattamente da quale punto della fenditura il fotone è passato, né da quale fenditura. Se proviamo a chiederci infatti quale fessura il fotone ha attraversato dovremmo inserire un detector subito dopo una delle due fenditure ma questo

altera la modalità di diffusione dell'onda producendo le due tipiche strisce luminose sullo schermo. Perché un modello così semplice non è stato preso in considerazione in modo serio? Va detto che probabilmente la ragione risiede nel fatto che postulare variabili inaccessibili (come la posizione del fotone) ad alcuni sembra inutile. Ma è anche vero che in altri campi questo si fa senza problemi, come postulare l'esistenza dei quark che non sono direttamente accessibili a causa della proprietà del confinamento. E' questa una proprietà oggettiva o piuttosto un modo per risolvere il problema del perché i quark non sono stati mai osservati se non nei loro effetti? Se è così anche le variabili nascoste di posizione di Bohm hanno degli effetti: l'apparente casualità di un processo di misura. Va detto però, come vedremo ora, che ci sono altri aspetti che complicano la partita: i fenomeni di entanglement da un lato e dall'altra il fatto che tali variabili sono contestuali, cioè dipendono dalle variabili del resto dell'universo.

## Parte IV: Olismo quantistico

### Il dado è tratto

L'entanglement è uno dei fenomeni più distintivi dell'approccio quantistico alla luce (e a tutte le altre particelle fondamentali). Prima di procedere nella disamina di questo comportamento tutto quantistico e che non trova alcun corrispettivo classico, cerchiamo di rispondere ad una domanda: dopo aver capito il comportamento di una singola particella quantistica come un singolo fotone, come descrivere un sistema composto? Questo è un aspetto importantissimo e che pilota la nostra ricerca nel tentativo di rispondere alle questioni aperte sugli aspetti macroscopici non quantistici della realtà. Supponiamo di prendere una moneta ed un dado. La moneta "vive" in uno spazio a due stati distinti, se siamo interessati allo stato testa o croce, mentre il dado vive in uno spazio a sei stati, se siamo interessati al numero che compare sulla sua faccia. Lo spazio degli stati della moneta è uno spazio di

Hilbert bidimensionale mentre quello del dado è uno spazio di Hilbert esadimensionale. Possiamo chiamare gli stati della moneta  $|T\rangle$  e  $|C\rangle$  come prima e quelli dei dadi  $|1\rangle; |2\rangle; \dots |6\rangle$ . Il sistema combinato si descrive mediante lo spazio prodotto. Siccome possiamo avere dodici combinazioni possibili, ad esempio  $|T; 3\rangle$  indicando con T lo stato della moneta e con 3 lo stato del dado, lo spazio in cui vive il sistema combinato *moneta+dado* è dodecadimensionale. Questo è lo stato prodotto discusso nel box 3. Ora eseguiremo tre esperimenti con una moneta e un dado.

### Esperimento 1

Uno sperimentatore di nome Charlie inserisce in una scatola la moneta e in un'altra il dado per poi consegnarli in due scatole separate a due colleghi di nome Alice e Bob. Poi questi partono per due destinazioni molto lontane, ad esempio possiamo immaginare che Bob vada su una colonia vicino a Saturno mentre Alice resta sulla Terra. Prima di partire i due personaggi hanno sincronizzato il loro orologi e si sono accordati che alle 12 ore terrestri dell'anno 2025 (il viaggio verso Saturno è lungo come testimonia il film di Chris Nolan *Interstellar*) apriranno le scatole. Cosa scopriranno? Se Alice trova una moneta nella sua scatola Bob troverà un dado e viceversa. Cosa c'è di strano in questo? Nulla! Infatti i sistemi sono separati. Ma attenzione: il fatto che Alice prima di aprire la scatola non sapesse cosa ci fosse dentro e né tantomeno cosa Bob avesse nella scatola, non vuol dire che dentro la scatola non ci sia una moneta o un dado prima di aprirla. Lo abbiamo già visto nel caso della moneta: in fisica classica vale il principio RC. L'informazione che dentro la scatola di Alice ci fosse una moneta e dentro la scatola di Bob un dado era già contenuta nel cono luce passato di entrambi, quando Alice e Bob hanno ricevuto la scatola da Charlie. Semplicemente la loro ignoranza sullo stato interno della scatole è svanita immediatamente appena aperta la scatola, ma non c'è nulla di metafisico in ciò.

Il sistema prima dell'apertura delle scatole è descrivibile in questo modo

## Esperimento 2

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|Moneta; Dado\rangle + |Dado; Moneta\rangle) \quad (66)$$

Questo vuol dire che vi è una probabilità che, quando le scatole vengono aperte, Alice trovi una moneta e Bob un dado e viceversa. Nel primo caso il sistema collassa in

$$|\psi\rangle \Rightarrow |Moneta; Dado\rangle \quad (67)$$

dove la parte sinistra dello stato collassato riguarda cosa trova Alice e la parte destra cosa trova Bob. Questo collasso non è come quello della polarizzazione del fotone, ma come quello della moneta singola ed esprime solo il fatto che aprendo la scatola Alice e Bob rileveranno istantaneamente una informazione. In altre parole se prepariamo l'esperimento N volte avremo sempre che, quando Alice troverà una moneta Bob troverà un dado e viceversa. Data la casualità presunta nella distribuzione delle scatole ci si aspetta che sia Alice che Bob troveranno la moneta o il dado il 50% dei casi, come indicato dal formalismo

$$|\langle Moneta; Dado | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad (68)$$

Supponiamo di associare alla moneta il valore +1 e al dado il valore -1. Queste in effetti sono delle misure che indicheremo con  $\sigma^A$  nel caso di Alice e  $\sigma^B$  nel caso di Bob. La media dei risultati sarà ovviamente 0 per entrambi, in quanto Alice e Bob troveranno casualmente a volte una moneta (+1) e volte un dado (-1) cioè

$$\langle \sigma^A \rangle = \langle \sigma^B \rangle = 0 \quad (69)$$

sicché la somma diviso il numero N di prove (la media) darà zero. Tuttavia se proviamo a calcolare la media del prodotto delle misure otterremo

$$\langle \sigma^A \sigma^B \rangle = -1 \quad (70)$$

cioè le misure sono *anticorrelate*. Questo significa che ogni volta che Alice trova un dado ( $\sigma^A = -1$ ) Bob troverà una moneta ( $\sigma^B = +1$ ) sicché il prodotto è -1 e il valor medio dei prodotti calcolato su tutte le coppie di scatole sarà parimenti -1. Ma, lo ripeto, nulla da eccepire e nulla di strano.

Supponiamo ora di cambiare esperimento e di interessarci a rispondere alla domanda: quale faccia Alice e Bob troveranno esposta nella scatola? Supponiamo che uno dei due riceva sempre una moneta (Alice) e l'altro sempre il dado (Bob), e che ora siamo interessati a capire quale faccia esposta essi troveranno, se una testa o una croce nel caso di Alice, oppure un numero pari (p) o dispari (d) nel caso di Bob. Immaginiamo anche di formalizzare il test come prima. Se Alice trova testa associa un +1, se trova croce vi associa -1. Invece se Bob trova una faccia dispari vi associa un +1 e se trova una faccia pari vi associa -1. La probabilità che Alice trovi testa sarà del 50% (una faccia su due possibili), così come la probabilità che Bob trovi un numero pari è anch'essa del 50% (tre facce pari su sei facce possibili). La probabilità che Alice trovi testa e Bob pari simultaneamente sarà dato dal prodotto delle probabilità, cioè il 25%. Formalmente lo stato sarà il seguente

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|T; p\rangle + |T; d\rangle + |C; p\rangle + |C; d\rangle) \quad (71)$$

Facciamo un esempio e supponiamo di calcolare la probabilità che Alice trovi Testa e Bob un numero pari. La probabilità sarà data dal quadrato del coefficiente davanti allo stato  $|T; p\rangle$  che è  $\frac{1}{4}$ , ovvero 25% come ci aspettavamo. Cosa ci aspettiamo che accada alla media delle misure nel caso in cui Charlie abbia distribuito ad Alice e Bob N coppie di pacchi? Ci aspettiamo che, se la preparazione dei pacchi da parte di Charlie è avvenuta in modo casuale, troveremo ancora una volta

$$\langle \sigma^A \rangle = \langle \sigma^B \rangle = 0 \quad (72)$$

(fate la media dei valori casuali +1 e -1 ottenuti nelle singole misurazioni e troverete zero). Ma cosa accadrà alla media dei prodotti? Cioè cosa accade se confrontiamo le misure per ciascuna coppia? Poiché ora, contrariamente a prima, sia Alice che Bob troveranno casualmente +1 e -1 nelle loro rispettive misure, il prodotto potrà dare sia +1 che -1 (mentre prima forniva sempre -1) e il valor medio sarà nullo, ovvero



$$\langle \sigma^A \sigma^B \rangle = 0 \quad (73)$$

Le misure in questo caso sono assolutamente *scorrelate*. Anche qui nulla di strano.

### Esperimento 3

Stesso esperimento del 2 ma ora supponiamo che, per qualche strana ragione, ogni volta che Alice trova testa (+1) Bob trovi *sempre* un numero pari (-1) mentre ogni volta che Alice trova croce (-1) Bob trova *sempre* dispari (+1). Il sistema sarà formalmente descritto da

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|T; p\rangle + |C; d\rangle) \quad (74)$$

La media delle misure per ciascuno sarà ancora nulla, ovvero

$$\langle \sigma^A \rangle = \langle \sigma^B \rangle = 0 \quad (75)$$

ma il prodotto medio delle loro misure non sarà più nullo in quanto le misure mostreranno un schema di anti-correlazione.

$$\langle \sigma^A \sigma^B \rangle = -1 \quad (76)$$

Cosa penseremmo? Come minimo che il gioco è truccato o stiamo assistendo a pura magia. E' ovvio infatti che abbiamo solo tre possibili spiegazioni:

1. *E' magia mentale*: Alice comunica a Bob il risultato telepaticamente e istantaneamente e Bob altera il suo risultato con qualche meccanismo non appena viene a conoscenza (telepaticamente) del risultato di Alice.
2. *E' fisica quantistica*: gli stati della moneta e del dado non esistono prima che le scatole vengano aperte. Non appena Alice apre la scatola la moneta "collassa" nello stato testa e il dado di Bob nello stato "pari". La realtà non è definita prima della misura.
3. *E' frode classica* (o meglio è la classica frode): Charlie ha barato e ha preparato la moneta e il dado già a monte.

Quale alternativa scegliamo? Dipende. Ebbene, vi sorprenderà sapere che la gente a volte opta per la prima ipotesi (basta andare in libreria al reparto pseudoscienza, e ahimè spesso anche al reparto scienza, per trovare libri a riguardo). Se

apparteniamo pertanto alla schiera di coloro che credono nel paranormale o nei *poteri telepatici* del cervello opteremo per la prima. La seconda ipotesi invece richiederebbe che la moneta e il dado non hanno una realtà oggettiva prima che Alice o Bob aprano il pacco. Se accettiamo questa ipotesi apparteniamo alla schiera di coloro che sostengono che noi creiamo la realtà classica aprendo le scatole. I più ragionevoli tra noi tuttavia opteranno per la terza ipotesi. Per quale motivo? Perché sotto sotto crediamo nella oggettività del mondo reale (lo stato della moneta "testa" e il numero pari "4" del dado erano presenti nelle rispettive scatole già prima di aprirle). La realtà segue il principio RC e non il principio della "magia" quantistica. Ma non basta: infatti non crediamo alla telepatia, dunque non crediamo che l'informazione possa attraversare i cervelli e soprattutto che lo faccia all'istante (infatti ricordo che Alice e Bob si trovano a 45 minuti luce l'uno dall'altro). Se crediamo che l'informazione non possa viaggiare più velocemente della luce, allora crediamo nel principio di località di Einstein (un evento ne può influenzare un altro che si trova nel suo cono-luce futuro). Del resto se vediamo una persona che si arrabbia e mostra una faccia contrita in realtà stiamo osservando com'era la sua faccia qualche frazione di secondo fa, giusto il tempo che la sua immagine percorra la distanza che ci separa. Lo stato mentale del suo cervello è stato comunicato al mio cervello attraverso i muscoli facciali ma in tempi che sono compatibili con la relatività di Einstein e non mediante telepatia. Voglio far notare che la teoria gravitazionale di Newton, in cui due pianeti si attraggono mediante un'azione a distanza, non soddisfa il criterio 2 ma soddisfa una specie di criterio 1. Infatti molti la contestarono definendola un ritorno alla magia e ai concetti di affinità (concetti che sono rimasti almeno nella terminologia in chimica). Eppure la teoria di Newton è crollata sotto la sferza della relatività lasciando il posto alla curvatura dello spazio-tempo, una teoria compatibile col principio di località, a causa del quale sia il criterio 1 che il 2 sono impossibili da accettare senza creare paradossi. Da notare che tutte le teorie classiche del mondo (anche quelle sulla luce) aderiscono al criterio 3, e pertanto sia al criterio di realismo classico (RC) che di località (L). Quando entrambi questi principi

vengono considerati insieme parleremo di principio RL (*realismo locale*). Fin qui monete e dadi truccati. Ma la realtà dei fotoni qual è?

## Entanglement: la “spettrale” azione a distanza

Se la teoria elettromagnetica poteva spiegare molti fenomeni purché non si abbassava troppo l'intensità luminosa, di certo l'entanglement è proprio un fenomeno impossibile da descrivere con criteri classici. Supponiamo di prendere due fotoni, ciascuno descritto mediante il suo stato di polarizzazione (verticale V od orizzontale O). Ciascuno di essi vive in un spazio di Hilbert bidimensionale. Abbiamo detto che se il fotone non ha alcuna proprietà del tipo O o V di sicuro una qualche proprietà oggettiva che l'avrà: ad esempio la polarizzazione a 45° (|+>) o a 135° (|->)) (Fig. 42).

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|O\rangle \pm |V\rangle) \quad (77)$$

La MQ asserisce che il fotone in questione, pur non avendo alcuna proprietà oggettiva inerente alla polarizzazione orizzontale o verticale, una qualche realtà oggettiva di sicuro ce l'ha: la polarizzazione a 45° o a 135°. Non solo: supponiamo che il fotone superi un test di polarizzazione V, allora in uscita lo stato del fotone sarà |V>. Ebbene se disponiamo un filtro polarizzatore a 45° subito possiamo prevedere cosa accadrà? Dalla coppia di equazioni precedente possiamo vedere che (Fig. 42)

$$|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) \quad (78)$$

Quindi il fotone ha una proprietà oggettiva (possiede polarizzazione V) ma non ha alcuna proprietà oggettiva (secondo l'interpretazione RQ) dello stato di polarizzazione a 45° o 135°. Il fotone supererà un test a 45° il 50% delle volte.

Consideriamo ora il sistema “coppia di fotoni”. Lo stato che descrive questo sistema vivrà in uno spazio di Hilbert dato dallo spazio prodotto dei due, le cui basi saranno non più |V> o |O>, come per i fotoni separati, ma |OO>; |OV>; |VO>; |VV>. Ora, stando alla MQ, se è possibile produrre una coppia di due fotoni in ciascuno di questi quattro stati allora è possibile impostare

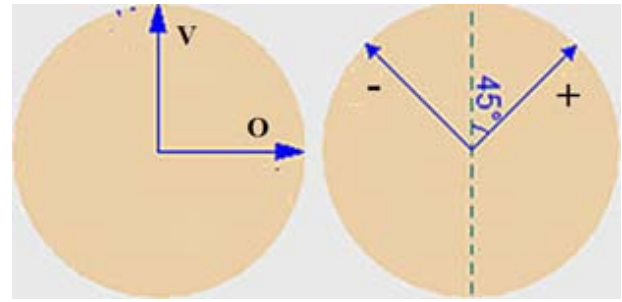


Figura 42: Stati (V ; O) e (+; -) corrispondenti a misure di polarizzazione (verticale, orizzontale) e (45°, 135°) rispettivamente.

un esperimento per il quale lo stato  $|\psi\rangle$  della coppia è una sovrapposizione lineare delle quattro basi

$$|\psi\rangle = a |OO\rangle + b |OV\rangle + c |VO\rangle + d |VV\rangle \quad (79)$$

dove a, b, c e d sono numeri complessi tali che la somma dei loro quadrati è pari all'unità per la normalizzazione delle probabilità. Prenderemo, come esempio, tre tipi di coppie per semplificare.

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|OO\rangle + |VO\rangle) \quad (80)$$

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|OV\rangle - |VO\rangle) \quad (81)$$

$$|T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|OO\rangle + |VV\rangle) \quad (82)$$

Nonostante questi tre stati siano stati ammissibili nello spazio di Hilbert prodotto, c'è una grande differenza tra il primo stato e gli altri due. Il primo stato si dice *fattorizzato* in quanto possiamo “mettere in evidenza” lo stato |O> a destra e scrivere lo stato |F> come il prodotto tra uno stato che “vive” nello stato di Hilbert del primo fotone (spazio di Alice) e uno stato che vive nello spazio di Hilbert del secondo fotone (spazio di Bob):

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|O\rangle + |V\rangle)_A \otimes |O\rangle_B \quad (83)$$

Questo invece non è possibile per gli stati |S> e |T>, (chiamati stato di Singoletto e Tripletto) i quali saranno detti *stati entangled*. In sostanza negli stati entangled non è possibile separare i sottosistemi, lo stato sarà indivisibile anche concettualmente e non potremo intenderlo come la semplice somma dei due sottosistemi, come invece accade per lo stato fattorizzato. Semplice-

mente i due fotoni che costituiscono il sistema totale non possiedono proprietà indipendenti. Quando è possibile fattorizzare il sistema, ovvero scriverlo come un prodotto di un vettore appartenente allo spazio di Alice per un vettore appartenente allo spazio di Bob, cioè ai due stati di partenza considerati separati? Lo stato generico  $|\psi\rangle$  è fattorizzabile solo se siamo in grado di scrivere questo stato come  $|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$  altrimenti sarà entangled.



**Figura 43:** Spazio di Hilbert di stati prodotto. Gli stati si suddividono in stati fattorizzabili e stati entangled.

Questi stati esistono davvero in natura? Vediamo qual è la loro natura stando al formalismo quantistico. Supponiamo che Alice e Bob compiano le stesse misure come per il caso della moneta e del dado in due laboratori diversi, uno sulla Terra e l'altro su Saturno. Immaginiamo che Charlie sia riuscito a produrre coppie di fotoni nello stato  $|F\rangle$  e che Alice e Bob decidano di effettuare ad un certo istante (dopo essersi sincronizzati) una misura di polarizzazione verticale e orizzontale rispettivamente. Il formalismo quantistico del secondo membro dello stato  $|F\rangle$  indica che Alice avrà il 50% di probabilità che il suo fotone passi il test e altrettanto che non lo passi. Supponiamo che il fotone superi il test. Allora per Alice lo stato sarà collassato da  $|F\rangle$  a  $|VO\rangle$ . Cosa accadrà a Bob? Poiché lo stato è collassato in  $|VO\rangle$  Bob troverà lo stato del suo fotone in O ed esso anche supererà il test di Bob (polarizzazione orizzontale). Cosa c'è di strano? Nulla. Infatti possiamo riscrivere lo stato  $|F\rangle$  in un modo più chiaro

$$|F\rangle = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} |O\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |V\rangle \right]_A \otimes [1 |O\rangle + 0 |V\rangle]_B \quad (84)$$

Essendo separati, il formalismo ci sta dicendo che Alice ha il 50% di probabilità di vedere il proprio fotone superare il test di polarizzazione verticale, mentre Bob il 100% di vedere il suo fotone superare il test di polarizzazione orizzontale. Perciò il fotone di Alice non ha alcuna proprietà definita di polarizzazione orizzontale o verticale prima della misura mentre il fotone di Bob è certamente polarizzato orizzontalmente. Questo significa che il fotone di Alice, al contrario di quello di Bob, non ha alcuna polarizzazione? Certo che sì. Ricordiamo che finora abbiamo trovato che un sistema ha sempre uno stato oggettivo, pur non potendo definire tutti gli stati come posseduti oggettivamente. Infatti lo stato del fotone di Alice è proprio quello di polarizzazione a  $45^\circ$  e lo stato della coppia si può anche scrivere

$$|F\rangle = [1 |+\rangle + 0 |-\rangle]_A \otimes [1 |O\rangle + 0 |V\rangle]_B = |+, O\rangle \quad (85)$$

che equivale a dire che sia il fotone di Alice che quello di Bob hanno uno stato di polarizzazione ben definito, cioè la polarizzazione a  $45^\circ$  e quella orizzontale sono due proprietà possedute oggettivamente dai due fotoni rispettivamente di Alice e Bob, indipendentemente se la misura viene o meno eseguita. Questo caso è identico al primo esempio della moneta e del dado. In un certo senso i fotoni esistono nel loro stato oggettivo di polarizzazione prima della misura proprio come la moneta e il dado esistono nella loro rispettiva configurazione prima che le scatole vengano aperte (RC). L'unica differenza tutta quantistica è che il fotone di Alice, se rappresentato in una base  $|O\rangle$  e  $|V\rangle$  non ha uno stato orizzontale o verticale definito, avendolo definito a  $45^\circ$ .

Analizziamo ora uno dei due stati entangled, ad esempio  $|S\rangle$ . Questo è simile agli stati 66 e 74. In questo caso, se Alice trova che il suo fotone ha superato il test, allora lo stato della coppia è collassato in  $|VO\rangle$ . Se Alice trova V allora necessariamente Bob trova O e il suo fotone supera il suo test (che ricordiamo essere orizzontale). Ma cosa accade se il fotone di Alice non supera il test

di polarizzazione verticale? Accade che lo stato collassa in  $|OV\rangle$ . Contrariamente allo stato fattorizzato se Alice cioè trova O allora Bob troverà V. Cioè se il fotone non supera il test *polarizzazione verticale* di Alice nemmeno il fotone di Bob supererà il suo test di *polarizzazione orizzontale*. In altre parole, il sistema si comporterà, *indipendentemente dalla distanza*, come il terzo caso della moneta e del dado. Ciò che fa un fotone farà l'altro, e ciò che non fa un fotone non farà l'altro. In altre parole, ciascun fotone ha una probabilità del 50% di superare o meno il relativo test, proprio come Alice poteva trovare testa con una probabilità del 50% e Bob un numero pari con probabilità del 50%. Ora tuttavia la coppia di fotoni si comporta proprio come il caso in cui ogni volta che Alice trova testa Bob trova un numero pari (2, 4, 6) e ogni volta che Alice trova Croce Bob trova un numero dispari (1,3,5). Eliminando l'ipotesi della telepatia le possibili spiegazioni sono due

1. *Fisica quantistica*: Gli stati dei due fotoni non esistono prima che le misure di polarizzazione vengano effettuate (ovvero prima che le scatole vengano aperte). Non appena Alice misura V il fotone di Bob "collassa" nello stato O. In questo senso la realtà non è definita prima della misura di Alice.
2. *Frode classica*: l'apparato che produce i fotoni (Charlie) "ha barato" e ha preparato i fotoni ad esempio nello stato  $|VO\rangle$  già a monte. (In realtà non sarebbe frode ma fisica classica).

Ovviamente ora siamo svezzati per poter accettare la "magia quantistica" almeno per i fotoni e non pensare alla frode classica. Tuttavia qualcosa non torna. Se accettiamo la prima ipotesi, infatti, il collasso del fotone di Alice si propagherà all'istante dalla Terra fino a Saturno, superando i limiti imposti dalla velocità della luce  $c$  e violando la relatività, o meglio il principio di località L. Se invece accettiamo la seconda ipotesi allora stiamo supponendo che i fotoni stessero già nello stato  $|VO\rangle$  proprio come la moneta era già nello stato "Testa" e il dado nello stato "numero pari" anche prima dell'apertura delle scatole e il collasso dello stato è realmente un'istantanea presa di conoscenza dello stato nella scatola. In tal caso durante il viaggio dei due fotoni o delle due scatole fino alle postazioni di Alice e Bob

gli stati dei sottosistemi erano già predeterminati oggettivamente e non avverrebbe così alcuna violazione di L. Insomma la spiegazione 1 viola il realismo locale RL, mentre la 2 rispetta RL.

## Essere o non essere

Il punto cruciale per accettare una ipotesi o l'altra è capire cosa sia davvero uno stato entangled come lo stato di singoletto. Ricorderete che quand'anche la MQ asseriva che un fotone in sovrapposizione non possedeva oggettivamente nessuno dei due stati  $|O\rangle$  o  $|V\rangle$  ne possedeva tuttavia certamente uno (ad esempio  $|+\rangle$ ) Ebbene lo stato di singoletto ha una proprietà molto strana:

*contrariamente a particelle separate, le due particelle dello stato entangled di singoletto S, se prese separatamente, non hanno alcuna proprietà di polarizzazione di alcun tipo.*

Sviluppiamo infatti questo stato nella base  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$  che corrispondono agli stati a  $45^\circ$  e  $135^\circ$ .

$$\begin{aligned}
 |S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |O\rangle \otimes |V\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |V\rangle \otimes |O\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle \right) \otimes \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle \right) \otimes \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle \right) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|+,+\rangle + |+,-\rangle - |-,+\rangle - |-, -\rangle) \\
 &\quad - |+,+\rangle + |+,-\rangle - |-,+\rangle + |-, -\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} |+,-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-,+\rangle \quad (86)
 \end{aligned}$$

Ho evidenziato i termini che si elidono con lo stesso colore. In sostanza lo stato di singoletto assume la stessa forma nelle basi complementari dei test a  $45^\circ$  e  $135^\circ$ . In generale si può provare che, date due direzioni qualsiasi di polarizzazione perpendicolari tra loro  $\theta = n$  e  $\theta + \frac{\pi}{2} = p$ , lo stato di singoletto può sempre scriversi come

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |n;p\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |p;n\rangle \quad (87)$$

per qualsiasi coppia di polarizzazioni ortogonali tra loro. La conseguenza è drammatica: per la MQ il sistema si troverà sempre in una sovrapposizione di stati indipendentemente da quale misura di polarizzazione scegliamo, ovvero non vi

è alcun test di polarizzazione del tipo  $\theta$  e  $\pi/2 + \theta$  per il quale il fotone di Alice o di Bob supererà col 100% delle probabilità, ma accadrà sempre che il fotone passerà il 50% delle volte in modo casuale. Pertanto, contrariamente al caso di fotoni separabili, i fotoni *entangled* presi singolarmente non possiederanno alcuna proprietà di polarizzazione oggettiva. Solo la misura di Alice (o di Bob) oggettiverà il sistema a seconda del tipo di test che si vorrà effettuare. Ne derivano delle conseguenze di portata enorme:

1. *In fisica classica possiamo determinare lo stato di un sistema composto solo conoscendo in modo completo lo stato (oggettivo) di ciascuno dei suoi sottosistemi. Se non conosciamo tali sottostati possiamo solo dare una descrizione statistica del sistema. In fisica quantistica possiamo conoscere in modo completo la proprietà totale del sistema senza conoscere le proprietà dei sottosistemi in quanto, per l'interpretazione RQ, questi non hanno alcuna proprietà di polarizzazione oggettiva.*
2. *lo stato di Bob collasserà istantaneamente a seguito della misura di Alice e diverrà oggettivo all'istante, indipendentemente dalla distanza e indipendentemente dagli angoli di polarizzazione dei polarizzatori scelti.*

Queste due considerazioni ci portano ad alcune conseguenze. Anzitutto solo la totalità indivisa ha senso oggettivo (olismo), non avendo le sottoparti alcuna proprietà fisica. Pertanto il *riduzionismo* ontologico, cioè la visione secondo cui le proprietà di un sistema sono date dalle proprietà possedute oggettivamente dai suoi componenti, viene scosso dalle fondamenta. Inoltre nessuna proprietà può essere attribuita ai sottosistemi di un sistema *entangled*. Quando, a causa della misura, uno di essi acquista un elemento di realtà, il formalismo quantistico asserisce che l'altro sottosistema immediatamente acquisterà la proprietà opposta, senza che la distanza ritardi l'effetto di collasso dello stato. Questa parrebbe una seria violazione del principio di Località L. Non solo la meccanica quantistica, se completa, viola il presupposto RC, ma violerebbe anche L. Quindi la MQ non soddisfa RL. O la realtà non è oggettiva, o non è locale o entrambe. Come ebbe a dire Paolo di Tarso, tutto ciò fu scandalo per alcuni, follia

per altri, incluso Einstein. Nel 1935 Einstein insieme ai colleghi Podolski e Rosen (EPR), scrisse un lavoro dal titolo "*can the quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*" [8] da cui si evince che la fisica quantistica non può essere completa, a meno di non rinunciare alla località o al realismo classico oggettivo. Se infatti è da completare allora

1. i sottosistemi possiedono delle proprietà oggettive anche prima della misura,
2. non c'è alcun segnale superluminale da inviare perché non c'è alcun collasso, ma solo una presa di conoscenza degli stati dei sottosistemi.

Se non fossero state eseguite misure su tali stati io personalmente avrei concluso che gli stati *entangled* sono soluzioni della teoria da scartare (soluzioni spurie-SOSP). Quando una SOSP appare viene il SOSPetto che essa sia da scartare in quanto fisicamente non sostenibile. E' già accaduto con la soluzione dell'atomo di idrogeno mediante l'equazione di Shroedinger. Alcune soluzioni esplodono all'infinito esponenzialmente e vanno scartate perché prive di significato fisico. Altre volte tuttavia scartare tali soluzioni si è rivelato un grave errore, come nel caso delle soluzioni ad energia negativa che indicano l'esistenza dell'antimateria. Nel caso delle soluzioni *entangled*, data la follia dei risultati, ci verrebbe da dire, per salvare sia la MQ che la relatività, che non sono soluzioni accettabili. Il punto è però che tali soluzioni non sono come gli esponenziali infiniti di probabilità dell'equazione di Shroedinger ma come quelle ad energia negativa dell'antimateria. Esse cioè sono state verificate in laboratorio. Coppie di fotoni *entangled* in polarizzazione possono essere prodotte oramai quotidianamente nei laboratori irraggiando un cristallo non lineare con fotoni ultravioletti. Se i fotoni *entangled* esistono (ed esistono) ha ragione la MQ oppure è possibile completare la MQ con una teoria in cui la descrizione dello stato quantico è solo da intendere come descrizione statistica e legata alla nostra conoscenza (o ignoranza)? EPR concludono il lavoro così

*"We left open the question of whether or not such a description exists. We believe, however, that such a theory is possible".*

E' possibile capire se una siffatta teoria, oggettiva e locale, in sostituzione della MQ, esiste?

## La disuguaglianza di Bell e gli esperimenti di Aspect

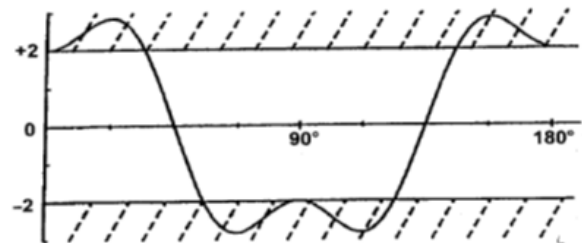
Un passo in avanti decisivo si ebbe nel 1962, quando il fisico John Bell pubblicò [10] un lavoro in cui provò che le teorie locali e oggettive (RL) ponevano un limite al grado di correlazione tra due particelle. Il suo teorema, riformulato poi da Clauser, Horne, Shimony e Holt (teorema SHSH), [11] fa leva sulla misura congiunta di varie situazioni. Supponiamo di avere due basi  $|O\rangle, |V\rangle$  per Alice e  $|+\rangle, |-\rangle$  per Bob e di misurare congiuntamente le probabilità per i due fotoni  $P(O,+), P(O,-), P(V,+), P(V,-)$ . Come potete vedere in questo caso i due polarizzatori di Alice e Bob non usano la stessa base ma basi complementari (Fig. 42). Ebbene la disuguaglianza di Bell asserisce che, se i due fotoni hanno polarizzazioni oggettive e nessun segnale può essere trasmesso più velocemente della luce (RL), allora vale la seguente disuguaglianza

$$|P(O,+) - P(O,-)| + |P(V,+) + P(V,-)| \leq 2 \quad (88)$$

In sostanza la probabilità che Alice misuri "O" e la probabilità che Bob misuri "+" tranne la probabilità che Alice misuri "O" e Bob misuri "-" oppure la probabilità che Alice misuri "V" e Bob misuri "+" oppure che Alice misuri "V" e Bob misuri "-" sarà minore di 2. Fate la prova sostituendo a "O" lo stato "pantalone di Jeans" e a "+" lo stato "occhiali". V sta ad indicare "nessun pantalone di jeans" e "-" indica "nessun paio di occhiali". Questi sono stati classici. Ovviamente infatti nessuno si sognerebbe di credere che lo stato del pantalone che indossate sia indeterminato prima di osservarlo. Prendete un po' di persone statisticamente significative e verificate che la seguente disuguaglianza sia soddisfatta

$$\begin{aligned} & |n(\text{Jeans}, \text{Occh.}) - n(\text{Jeans}, \text{No Occh.})| + \\ & |n(\text{No Jeans}, \text{Occh.}) + n(\text{No Jeans}, \text{No Occh.})| \\ & \leq 2 \quad (89) \end{aligned}$$

dove n rappresenta il numero che conteggiate con quella coppia di caratteristiche in parentesi diviso il numero totale di persone. Torniamo ai fotoni. Se è possibile trovare una teoria locale e oggettiva che ha la pretesa di spiegare i risultati quantistici allora essa prevede che il massimo grado di correlazione tra queste probabilità congiunte oscillerà tra -2 e +2.



**Figura 44:** Le teorie classiche del mondo che rispondono al requisito RL (realismo locale) fanno previsioni probabilistiche congiunte alla Bell sono nell'intervallo tra -2 e 2. I fenomeni di entanglement previsti dalla MQ violano la disuguaglianza (linee della curva nelle zone tratteggiate). In figura sono mostrate le previsioni teoriche di probabilità congiunte per esperimenti di polarizzazione di fotoni. Gli angoli indicano la direzione reciproca di polarizzazione dei filtri di polarizzazione.

Quali previsioni da la MQ? Essa prevede che misure del genere congiunte, ovvero  $\langle \sigma^A \bullet \sigma^B \rangle$ , diano per uno stato di singoletto il valore di  $-\cos(\theta)$  dove  $\theta$  è l'angolo tra le polarizzazioni dei polarizzatori di Alice e Bob, cioè

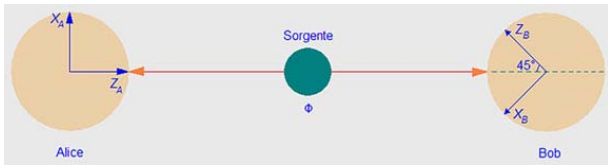
$$\langle \sigma^A \bullet \sigma^B \rangle = -\cos \theta_{AB} \quad (90)$$

Infatti se tale angolo è nullo vi è anticorrelazione,  $\langle \sigma^A \bullet \sigma^B \rangle = -1$ , come abbiamo potuto appurare.

Pertanto la MQ per gli stati di cui sopra fornisce

$$\begin{aligned} & |P(O,+) - P(O,-)| + |P(V,+) + P(V,-)| = \\ & |-\cos \pi/4 - \cos 3\pi/4| + |-\cos \pi/4 - \cos \pi/4| \\ & = 2\sqrt{2} \quad (91) \end{aligned}$$

Che è palesemente superiore a 2! La MQ, pertanto, fa la previsione che esisterebbero stati che violerebbero le disuguaglianze di Bell per alcuni angoli, come riportato in fig.44. Questo implica che gli stati entangled non esistono nella real-

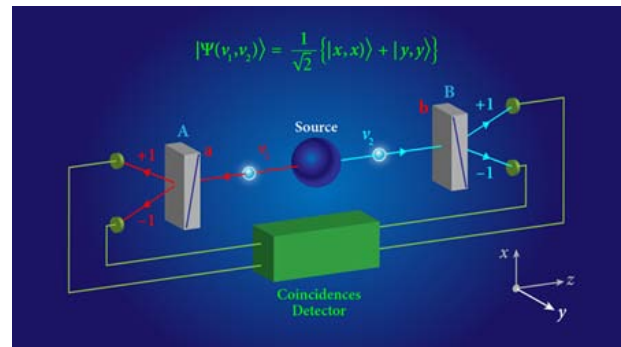


**Figura 45:** Tipica configurazione di un esperimento con fotoni entangled per trovare gli effetti di correlazione massima che violano le disuguaglianze di Bell.

tà? Oppure che esistono ma non possono essere descritti da alcuna teoria locale e oggettiva che abbia la pretesa di completare la MQ?

Nel 1982 Alain Aspect (dopo altri tentativi precedenti ma meno convincenti) dimostrò sperimentalmente all'istituto di ottica teorica e applicata di Parigi che era non solo possibile produrre coppie entangled ma che tali sistemi si comportavano violando le disuguaglianze di Bell. L'apparato è mostrato in fig. 45 e 46. Una sorgente di atomi di calcio, a seguito di eccitazione laser, produceva a cascata coppie di fotoni entangled in polarizzazione i quali erano inviati verso due detector A e B. Tuttavia Aspect decise di rendere inefficace una improbabile ma potenziale via di comunicazione luminale tra i rivelatori, che avrebbe impedito di accertare che la località fosse stata violata. L'idea fu geniale: spedire i due fotoni verso due apparati in cui uno specchio cambiava orientazione in modo casuale mentre i fotoni erano ancora in volo. In questo modo ciascun fotone poteva essere o meno riflesso, a caso, verso uno di due polarizzatori. Era come scegliere all'ultimo secondo quale polarizzatore usare (i due polarizzatori, per ciascun fotone, sono indicati con +1 e -1 in figura). Ebbene grazie a questi accorgimenti gli esperimenti di Aspect provarono che le disuguaglianze di Bell erano violate con uno scarto superiore a quaranta deviazioni standard. Per dare un'idea dell'efficacia dei risultati basti pensare che oggi il Bosone di Higgs è stato rilevato e confermato con uno scarto di sole 5 deviazioni standard!

Cosa ne deduciamo? La conclusione è che il comportamento dei fotoni suggerisce che la realtà non può essere simultaneamente *oggettiva e locale*. Il realismo locale è morto! L'aspetto che non dobbiamo trascurare è che è stata la MQ a consentirci di effettuare tali esperimenti, in quanto è proprio la MQ ad aver fatto la previsione di



**Figura 46:** Esperimento di Aspect (1982). La sorgente emette coppie EPR di fotoni polarizzati. Alice (a sinistra) e Bob (a destra) possiedono due rivelatori di polarizzazione che segnano +1 e -1 come autovalori.

esistenza delle coppie entangled. Ma se ora ribaltassimo lo sviluppo storico e dicessimo di realizzare un esperimento *à la Aspect* senza preconcetti teorici, dopo aver visto le correlazioni in atto cosa dedurremmo? Ne dedurremmo che qualsiasi teoria (incluso la MQ) che debba descrivere tali esperimenti non potrà soddisfare simultaneamente i criteri RC e L in quanto i fotoni entangled sono *troppo correlati* rispetto al massimo grado di correlazione previsto da una qualsiasi possibile teoria oggettiva e locale.

## Il senso della non località

Vorrei spendere due parole sullo status finale della descrizione quantistica della realtà degli stati entangled che abbiamo visto sopra, ovvero qual è il senso della non località. Spesso si sente dire che gli esperimenti con i fotoni condotti da Aspect avrebbero decretato la vittoria della meccanica quantistica contro le teorie a variabili nascoste. La frase va assolutamente precisata. Anzitutto, come già più volte ripetuto, gli esperimenti di Aspect, e altri simili, hanno provato che *nessuna teoria* seria può essere *simultaneamente locale e oggettiva* in senso classico. Punto. Una volta che sia stata fatta piazza pulita di teorie di questo tipo, questo lascia tuttavia spazio sia a teorie *non oggettive e non locali* (la trattazione ortodossa della MQ nelle varie interpretazioni) e sia a teorie *oggettive e non locali* (come la teoria di Bohm). La vittoria è di un insieme di versioni della MQ (Copenaghen, Bohm, Teoria degli stati relativi ecc) su teorie oggettive e locali, ormai

defunte. Il punto ora è scegliere tra le diverse teorie MQ. In quell'insieme le problematiche sono più sottili ed è sbagliato dire che la MQ coincide con la versione alla Bohr, ovvero con l'interpretazione di Copenaghen. Sennò non si chiamerebbe interpretazione. Riassumo le posizioni alla Copenaghen (che va per la maggiore) e alla Bohm (a mio avviso l'unica alternativa seria alla interpretazione standard) per ciò che concerne l'entanglement

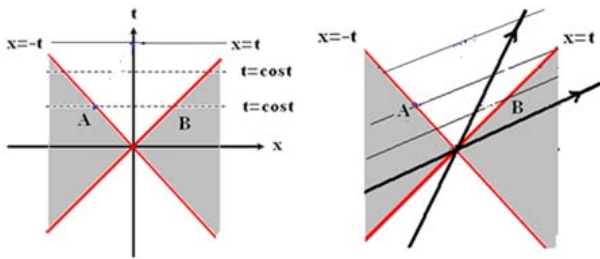
1. *nella interpretazione di Copenaghen i sottosistemi che formano lo stato di singoletto non hanno alcuna realtà oggettiva finché non lo si osserva. Una volta che ciò sia accaduto l'oggettivazione della realtà del sottosistema A determina all'istante l'oggettivazione del sottosistema B violando la località.*
2. *Nella interpretazione di Bohm i sottosistemi che formano lo stato di singoletto hanno una realtà oggettiva indipendentemente se li si osserva o meno. Tuttavia una misura sul sistema A ne può perturbare lo stato e all'istante l'onda di Bohm (il potenziale quantico) comunica al sottosistema B tale perturbazione, violando la località. La teoria presuppone un tipo di campo non locale ad hoc (l'ampiezza della funzione d'onda) che non trasporta energia, mentre le variabili nascoste non sono accessibili.*

Rispetto a tali interpretazioni dovremmo forse essere più pragmatici ed accettare uno o l'altro modello a seconda del potere predittivo che hanno e della capacità di consentire uno sviluppo ulteriore della ricerca. L'interpretazione statistica di Copenaghen, ad esempio, permette di poter effettuare calcoli su situazioni diverse senza postulare alcun modello strutturale delle particelle elementari. Tuttavia è possibile che una tale interpretazione vincoli la ricerca ad una visione limitata, mentre, come ha fatto rilevare Bohm, probabilmente la funzione d'onda ha un contenuto più ricco e ci sta informando che lo spazio o il tempo sono strutture ben più esotiche di quanto immaginiamo. E una interpretazione o l'altra può fare la differenza sulla direzione da dare alla ricerca. Ma alla fine, la realtà quantistica, al di là delle interpretazioni, è in conflitto o no con la relatività? La risposta è sottile e richiede una spiegazione precisa.

Nella interpretazione ortodossa di Copenaghen la relatività è fatta salva perché i risultati di Alice e Bob sono genuinamente casuali. Non c'è possibilità per Bob, da una lettura delle sue proprie misure i cui esiti sono casuali, capire se Alice ha o meno condotto l'esperimento. Supponiamo che Alice conduca l'esperimento ogni volta che è raggiunta da un fotone della coppia, e che ottenga su quindici esperimenti la seguente stringa di dati [010001011001011] (per semplicità al risultato 1 abbiamo associato 1, e al risultato -1 abbiamo associato 0). Allora Bob otterrà una stringa di risultati casuale correlato, ovvero [101110100110100]. Se Alice non avesse eseguito tutti gli esperimenti (o addirittura nessuno) in modo da far collassare lo stato del fotone di Bob, allora quest'ultimo avrebbe ottenuto una stringa diversa dalla prima ma sempre casuale, ad esempio del tipo [110110001010100], a causa questa volta del collasso dovuto alla propria misura. A causa della casualità di entrambe le misure, Bob non può dedurre dalla semplice lettura dei suoi esiti, se Alice ha condotto o meno la misura. In altre parole non potrà capire se la causa del collasso del suo fotone B sia stata la misura effettuata col polarizzatore B o se la causa sia da attribuire al collasso del fotone A mediante la misura che Alice ha compiuto col suo polarizzatore A. L'unica cosa che Bob può fare è "telefonare" ad Alice e confrontare gli esiti e le modalità delle misure, ma questo include l'uso di un canale non superluminale classico di comunicazione. Grazie alla casualità, nonostante la non località, non è possibile inviare informazione o materia o energia a velocità superluminali. In questo senso la località è salva. Il punto cruciale è che nel caso delle misure di Alice e Bob non ha senso nemmeno dire chi è la causa di chi. Riprendiamo l'esempio fatto nella seconda parte di questo lavoro quando, a proposito della relatività, abbiamo discusso come appaiono eventi simultanei e causalmente connessi quando sono visti da due osservatori in moto relativo.

Supponiamo che al centro degli assi coordinati vi sia la sorgente EPR che invia i due fotoni verso Alice e Bob lungo il cono luce (in quanto i fotoni viaggiano a velocità  $c$ ). Quando i due fotoni intercettano le linee universo di Alice e Bob essi vengono misurati simultaneamente e nessuno è la causa di nessuno. Tuttavia possiamo sempre





**Figura 47:** *Esperimento di Aspect in una prospettiva spaziotemporale relativistica. A sinistra l'osservatore è fermo rispetto ad Alice e Bob. A destra l'osservatore è in moto verso Bob. Ciò che prima era simultaneo ora è una sequenza di eventi in cui la misura di Bob viene prima di quella di Alice.*

scegliere un riferimento in moto verso B (figura a destra) in cui l'evento B avviene prima di A.

In questo sistema di riferimento concludiamo che B è la causa di A. Se invece ci poniamo in un riferimento verso Alice allora l'evento che descrive la misura fatta da Alice avverrebbe sicuramente prima della misura di Bob e concluderemmo che la misura di Alice è la causa del risultato che ottiene Bob. Ma sbagliaremmo perché semplicemente il concetto di prima e dopo causale è relativo solo ad eventi connessi all'interno del cono-luce, mentre questi eventi A e B sono fuori dal cono-luce di ciascuno (B si trova fuori dal cono Luce futuro e passato di Alice e viceversa). Ecco perché dire che uno è la causa dell'altro è sbagliato. Possiamo solo dire che gli eventi sono correlati ma non causalmente connessi.

Nella teoria di Bohm accade qualcosa di simile. Come interpreta questa teoria gli stati entangled? Se due particelle di massa  $m_1$  e  $m_2$  sono inviate contro due detector la loro velocità sarà in relazione con la fase  $S$ , ovvero

$$m_1 v_1 = \nabla_1 S(1, 2); m_2 v_2 = \nabla_2 S(1, 2) \quad (92)$$

E' ovvio che se si altera la velocità di una particella allora anche  $S$  sarà alterata e la velocità della seconda particella subirà una variazione istantanea. In questo caso è evidente come la funzione d'onda sia non locale. Nonostante la non località della funzione d'onda, non è possibile tuttavia nemmeno in questo caso inviare messaggi superluminali perché, per farlo, bisognerebbe accedere alle variabili nascoste e modificarle per cambiare la casualità epistemologica

degli esiti delle misure. Se Alice accedesse a tali variabili, Bob, misurando il suo fotone, potrebbe trovare una stringa palesemente non casuale, del tipo [10101010101010]. Sarebbe un po' come lanciare una moneta e avere successivamente Testa, Croce, Testa, Croce e così via. Si potrebbe così inviare, grazie alla non località della funzione d'onda, messaggi superluminali binari. Ma ciò non è possibile proprio perché le variabili nascoste restano nascoste. Né tanto meno la funzione d'onda potrebbe trasportare energia e materia a velocità superluminali. E allora come mai spesso si dice che le teorie a variabili nascoste (non quelle RL ma quella alla Bohm, oggettive e non locali) sono roba da cimitero delle cose vecchie e non si insegnano nei corsi universitari? La risposta richiederebbe un lavoro a cavallo tra scienza e sociologia e non ci addentreremo nella disamina. Tuttavia la teoria di Bohm non viene tipicamente considerata nei corsi accademici. Purtroppo anche l'oggettività di alcuni scienziati (a volte tra i più quotati) spesso non è garantita, sebbene ne sia garantita la località in riviste prestigiose che trascurano i *border lines*. Per lealtà nei confronti del lettore, farò la mia professione di fede. Credo che la teoria di Bohm sia la più razionale tra tutte quelle che siano state prese in considerazione e che forse non accettarla a volte deriva dal fatto che essa ruba un po' di fascino a ipotesi fantascientifiche come quella degli universi paralleli, oggi di moda. Se accettiamo la teoria di Bohm, però, dobbiamo accettare che la funzione d'onda non sia una astrazione matematica vincolata necessariamente a una descrizione probabilistica, ma fa parte della struttura stessa della realtà. E dovremmo piuttosto domandarci: quale tipo di spazio-tempo può ammettere funzioni d'onda alla Bohm, ovvero non locali e tali da non trasportare energia? Ci sono molti elementi a mio avviso che provano che seguire questa traccia sia conveniente. Se il campo elettrico ad esempio (o il potenziale vettore) è la funzione d'onda del fotone, come mai attribuiamo una realtà fisica al campo ma non alla funzione d'onda dell'elettrone, che ne è il suo analogo? Se accettiamo ciò si aprirebbero nuove prospettive di indagine nei confronti delle quali l'interpretazione probabilistica di Copenaghen è assolutamente neutra. Alcune di queste ipotesi potrebbero dar ragione dell'esistenza dello spin in termini di struttura

delle particelle elementari, della loro connessione con altre strutture come lo spazio-tempo, nonché della gravità quantistica. Sono solo ipotesi di lavoro, ma degne di essere perlustrate. La situazione a mio avviso è simile a quando si usava a proposito della nascita del cosmo e della vita l'ipotesi di Dio creatore che, anche se sembrava spiegare la complessità dell'esistente biologico e non possiamo escluderla a priori, tuttavia costituiva un ostacolo metodologico alla scoperta di altre spiegazioni naturalistiche e oggi, forse, non avremmo avuto la meravigliosa teoria di Darwin o la meno bella ma pur sempre affascinante teoria dell'universo inflazionario. C'è un'ultima osservazione da fare. In un certo senso, qualsiasi descrizione usiate (alla Bohr o alla Bohm), la meccanica quantistica salva la relatività ristretta (mediante la casualità alla Bohr o la non accessibilità delle variabili nascoste alla Bohm) e viceversa la relatività ristretta protegge la causalità nella meccanica quantistica. La casualità regge la causalità e questo senza che nella discussione quantomeccanica si sia fatto uso di una ipotesi relativistica come nelle teorie quantistiche relativistiche di campo. Forse, le due strutture teoriche sono più connesse di quanto immaginiamo. E' un po' come la teoria di Darwin e la genetica di Mendel. L'una può esistere senza l'altra, ma l'una salva l'altra e la connessione tra le due è il DNA che spiega sia le leggi di Mendel dell'ereditarietà e sia l'evoluzione delle specie. Manca una teoria fondamentale per far luce su questo quadro singolare delle due teorie? A mio avviso sì, ma occorre indagare meglio il campo di Bohm.

## Imbarazzi e gatti

Toccheremo adesso un aspetto cruciale della fisica quantistica che ha a che vedere con gli stati entangled: la descrizione dei sistemi macroscopici. Nei fatti ogni fisico divide il mondo in due: una realtà "sensibile" e macroscopica fatta di sassi, apparati di misura e gatti e una realtà fatta di fotoni, elettroni e altre particelle elementari. Il primo mondo segue comportamenti classici fatti di traiettorie ben definite, localizzazioni nel teatro dello spaziotempo e viene chiamato mondo classico, a cui appartengono anche le nostre percezioni di esseri macroscopici. Il secondo mondo segue comportamenti quantistici, fatti di sovrapposizioni di traiettorie, bilocazione ed elementi di realtà non oggettive.

Il primo è legato a leggi di causa-effetto reali (come la seconda legge di Newton) e probabilità epistemologiche (come nel caso della meccanica statistica), il secondo a leggi di causa-effetto di funzioni d'onda che vivono in spazi matematici astratti (come l'equazione di Shroedinger) e a probabilità ontologiche (come il collasso della funzione d'onda). Insomma non potrebbero essere mondi così diversi. Eppure tra questi due mondi vi è un doppio legame. Anzitutto il collasso della funzione d'onda di un oggetto quantistico è determinato da un apparato di misura, che per definizione è classico. Anche il nostro occhio è un apparato classico. Pertanto per poter accedere sperimentalmente al mondo quantistico occorre postulare il mondo classico. E tuttavia molte proprietà classiche, come la fluidità, possono essere comprese appieno solo postulando proprietà quantistiche. Le due visioni teoriche sembrano interconnesse e non potrebbero sembrare più diverse. Il punto è che gli oggetti classici, che servono per descrivere il mondo quantistico come viene da noi percepito, sono una combinazione di oggetti quantistici (le particelle elementari) ma si comportano in modo assolutamente non quantistico. Viceversa per descrivere il mondo quantistico mettiamo in combinazione storie classiche che spesso si comportano in modi strani (stati discreti, simultaneità di eventi, effetti non locali). Questi aspetti e i paradossi che ne emergono furono chiariti da Shroedinger nel suo famoso argomento del gatto. In questo esperimento ideale e macabro, che modificheremo, si predispose un laser a singolo fotone che spara fotoni polarizzati a 45° verso un cristallo birifrangente dietro cui vi sono due detector collegati a un martello posizionato sopra una fiala di veleno. Il tutto è collocato in una scatola. Ora viene la parte macabra. Prenderemo il nostro gatto e lo infileremo nella scatola la quale verrà poi chiusa. A un certo punto decidiamo di accendere il laser il quale invierà il singolo fotone. Ora se il fotone percorrerà il raggio ordinario il detector superiore suonerà e non attiverà il martello e il gatto vivrà. Se invece percorrerà il tratto inferiore (il raggio straordinario) esso giungerà nel detector inferiore facendo attivare il martello il quale romperà la fiala il cui veleno sarà respirato dal gatto il quale morirà subito dopo.

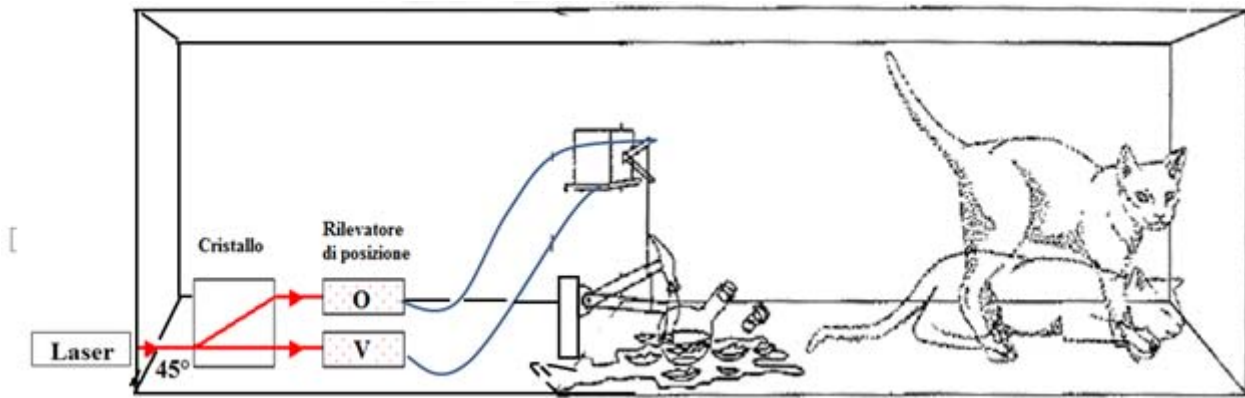


Figura 48: Paradosso del gatto di Shroedinger con fotoni.

Classicamente il fotone prenderebbe una strada o l'altra dando vita a due storie alternative

$$|fotone\ passa\ gi\grave{u};\ detector\ V\ clicca;\ gatto\ morto\rangle \quad (93)$$

$$|fotone\ passa\ su;\ detector\ O\ clicca;\ gatto\ vivo\rangle \quad (94)$$

Noi non sappiamo quale delle due alternative si manifesta nella scatola chiusa finché non la osserviamo. Tuttavia, stando al formalismo standard, ciascun sistema (fotone o gatto che sia) potrà essere descritto in una sovrapposizione di questo tipo:

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \quad (95)$$

Nel caso del fotone e del gatto i due stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  sono rispettivamente  $|V\rangle$  e  $|O\rangle$  e  $|gattovivo\rangle$  e  $|gattomorto\rangle$ . Il punto però è che i due sistemi sono descritti dai fisici in modo completamente differente perché il fotone è un oggetto appartenente al mondo quantistico e quella sovrapposizione rappresenta un effetto reale e misurabile (l'interferenza), mentre il gatto è un oggetto classico e quella sovrapposizione rappresenta solo una manifestazione della nostra ignoranza prima dell'apertura della scatola. Se i due sistemi fossero separati da una barriera invalicabile tutto andrebbe bene e potremmo accontentarci di due descrizioni alternative del mondo. Tuttavia il gatto è fatto di organi, questi di cellule, queste di molecole che sono fatte di atomi, i quali sono costituiti da particelle elementari ciascuno dei quali si comporta in modo quantistico. Pertanto questa barriera non dovrebbe esistere e la descri-

zione dovrebbe essere unica. Ma qui avviene il paradosso. Se la descrizione è unica dobbiamo cambiare l'interpretazione dell'eq. (95) del fotone rendendo la sovrapposizione di natura epistemologica come accade per descrivere il gatto, o al contrario dobbiamo cambiare l'interpretazione dell'eq. (95) del gatto rendendo gli stati in sovrapposizione vivo e morto reali e non oggettivi? La faccenda è resa ancora più paradossale proprio dall'entanglement e dal fatto che gli oggetti possono essere composti mediante il prodotto tensoriale. Se usiamo il formalismo della fisica quantistica, poiché ogni sistema (fotone e gatto) vive in uno spazio a due stati, abbiamo che lo spazio prodotto in cui vive il sistema composto è fornito dal prodotto delle seguenti basi

$$|V; vivo\rangle; |O; morto\rangle; |O; vivo\rangle; |V; morto\rangle \quad (96)$$

Tuttavia stati come  $|V; vivo\rangle$  e  $|O; morto\rangle$  non sono stati da prendere in considerazione perché non sono causalmente connessi. Se il fotone è V allora a scattare non è il detector sù e il gatto non può restare vivo. Se il fotone è O, a scattare non è il detector giù e il gatto non può essere morto. Gli stati causalmente connessi sono solo quelli in cui il fotone è O e il gatto vivo, e il fotone è V e il gatto morto. Gli altri due stati sono una collezione di eventi non connessi e non permessi. Ora il punto è che, se sono permessi quei due stati e accettiamo una descrizione quantistica dell'intero sistema, allora lo stato seguente è permesso

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V; morto\rangle + |O; vivo\rangle) \quad (97)$$

Come possiamo descrivere questo sistema entangled tra un sistema microscopico e uno macroscopico? Mediante una interpretazione epistemologica od ontologica? Se è epistemologica allora non si capisce perché i fotoni vivono realmente in sovrapposizione e mostrano interferenza, se è ontologica non si capisce perché non vediamo mai gatti in sovrapposizione. Per uscire dalla scappatoia potremmo pensare che uno stato descritto dalla equazione (97) non sia permesso. Tuttavia il punto è che un sistema quantistico in breve tempo entra in stato entangled col suo ambiente e con tutto ciò con cui interagisce (vedi i cammini di Feynman per le interazioni). Insomma in men che non si dica ogni oggetto macroscopico dovrebbe essere entangled con tutto. L'universo intero apparirebbe una mescolanza di stati in sovrapposizione non fattorizzabili. Ecco il paradosso. E per uscirne o occorre completare la meccanica quantistica introducendo elementi di oggettività o occorre capire come la realtà classica emerga dalla realtà quantistica a causa di qualche ingrediente che manca in entrambe le descrizioni a qualche livello intermedio tra un fotone e un gatto. Abbiamo già visto che completare la fisica quantistica in modo oggettivo implica l'introduzione di variabili nascoste non accessibili e una non località della funzione d'onda che però non spiega il perché tali non località non si manifestino a livello macroscopico. L'ampiezza della funzione d'onda  $R$  nella teoria di Bohm rappresenta il potenziale quantistico che descrive come viene pilotata la particella nello spazio, mentre la fase  $S$  determina le correlazioni descritte dalla eq. (92) tra le particelle. Mentre si comprende come mai nel mondo macroscopico (per grandi masse) il potenziale quantico è trascurabile, non si capisce come gli effetti di entanglement possano essere evitati. D'altro canto tutti gli studi volti a identificare un qualche livello intermedio in cui si ha una sorta di transizione tra realtà quantistica e realtà classica non hanno mostrato alcun successo, anche se la strada è ancora lunga.

## Una interpretazione FAPP: la decoerenza

Recentemente per spiegare come mai non vediamo allo stesso tempo gatti vivi e morti è stata proposta la teoria della decoerenza ambientale.[12] Purtroppo lo spazio non è sufficiente per poterci addentrare nella disamina di questo modello che sarà affrontata altrove. Il punto cruciale è proprio che, man mano che il sistema interagisce con strutture sempre più grandi, la sovrapposizione tende a mescolarsi (entanglement) con il grande numero di stati di cui è composto un macrosistema finché non è più possibile osservare la sovrapposizione dello stato quantico che appare invece in una miscela statistica classica. La matrice densità è un utile strumento per tale descrizione. Per la situazione 97 la matrice densità è la seguente

$$\begin{aligned} \rho &= (|\Psi\rangle \langle\Psi|) \\ &= \frac{1}{2} (|V; morto\rangle \langle V; morto| + |O; vivo\rangle \langle O; vivo|) \\ &\quad + \frac{1}{2} (|V; morto\rangle \langle O; vivo| + |O; vivo\rangle \langle V; morto|) \end{aligned} \quad (98)$$

Nella base  $|V; morto\rangle; |V; vivo\rangle; |O; morto\rangle; |O; vivo\rangle$  la matrice diventa

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (99)$$

La matrice densità contiene termini non nulli non solo lungo la diagonale (gli stati classici) ma anche fuori dalla diagonale (termini puramente quantistici di interferenza detti di coerenza). Con la matrice densità possiamo evidenziare i termini puramente di interferenza separandoli da quelli puramente classici. Ora il punto è che se questo sistema interagisce con un ambiente a molti stati (ad esempio l'aria nella scatola che il gatto respira e con cui interagisce termicamente) il fotone, il gatto e l'ambiente dovrebbero entrare in entanglement dopo un certo tempo

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V; morto\rangle |A_1\rangle + |O; vivo\rangle |A_2\rangle) \quad (100)$$

dove  $|A_1\rangle$  ed  $|A_2\rangle$  sono stati dell'ambiente ortogonali ma non distinguibili sperimentalmente. In tal caso l'idea, poiché non possiamo distinguere  $A_1$  da  $A_2$  data la complessità ambientale, è quella di sommare sugli stati indistinguibili e questo ci porta alla fine, a causa dell'enorme numero di molecole di cui è costituito sia il gatto che l'ambiente, ad avere solo una miscela statistica analoga alla diagonalizzazione della matrice

$$\sum_{statik=1,2} |\Psi_k\rangle \langle\Psi_k| = \frac{1}{2} (|V; morto\rangle \langle V; morto| + |O; vivo\rangle \langle O; vivo|) \quad (101)$$

Insomma non vediamo sovrapposizioni di gatti perché tali effetti risultano così mescolati all'ambiente che non sono sperimentalmente distinguibili da miscele statistiche. Per poter evidenziare gli effetti di coerenza quantistica o l'interferenza in un ambiente così complesso occorrerebbero dei sistemi di misura troppo precisi. E' come se vedessimo in un certo senso una realtà sfocata che ci impedisce di osservare le sovrapposizioni. Va detto che questa interpretazione non è considerata soddisfacente da molti autori, i quali la reputano solo una "diavoleria" formale per nascondere sotto il tappeto problemi seri.

## Conclusioni

Abbiamo mostrato in questo lungo viaggio a cavallo di un raggio di luce e attraverso le teorie classiche e quantistiche le idee fondamentali che abbiamo sviluppato sul mondo. Siamo passati dalla teoria geometrica a quella ondulatoria ed elettromagnetica. Abbiamo esplorato la relatività e visto i grandi enigmi lasciati aperti dalla fisica quantistica: entrambe teorie esatte del mondo, ma quanto sono diverse! Qual è oggi l'immagine del mondo che abbiamo noi fisici? E' una immagine coerente? Nel suo conciso ma profondissimo libro "sette brevi lezioni di fisica"

Carlo Rovelli dà una immagine molto concreta di qual è la situazione oggi: [13]

*"Uno studente universitario che assista alle lezioni di relatività generale il mattino e a quelle di meccanica quantistica il pomeriggio non può che concludere che i professori sono citrulli, o hanno dimenticato di parlarsi da un secolo: gli stanno insegnando due immagini del mondo in completa contraddizione. La mattina il mondo è uno spazio curvo dove tutto è continuo; il pomeriggio, il mondo è uno spazio piatto dove saltano quanti di energia. Il paradosso è che entrambe le teorie funzionano terribilmente bene. La Natura si sta comportando con noi come quell'anziano rabbino da cui erano andati due uomini per dirimere una contesa. Ascoltato il primo, il rabbino dice «hai ragione». Il secondo insiste di essere ascoltato, il rabbino lo ascolta, e gli dice «hai ragione anche tu». Allora la moglie del rabbino, che orecchiava dalla cucina, urla: «ma non possono avere ragione entrambi!». Il rabbino ci pensa, annuisce, e conclude «hai ragione anche tu»."*

Parole che dipingono in modo schietto e lucido lo status attuale della fisica. Tuttavia dalla fisica classica a quella quantistica possiamo concludere che il tutto indiviso è probabilmente la vera natura delle cose. Un tutto indiviso fatto di parti che non possono essere scorrelate tra di loro. C'è ancora tanto da fare e tanto da capire. In fondo, siamo solo agli inizi.



- [1] I. NEWTON, A CURA DI F. GIUDICE: *Scritti sulla luce e i colori*. BUR, Milano (2006).
- [2] J. C. MAXWELL: *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover Publications, New York (1873).
- [3] A. EINSTEIN: "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", *Annalen der Physik und Chemie* **17** (1905) 891-921.
- [4] A. EINSTEIN: *Emissione e trasformazione della luce, da un punto di vista euristico, tratto da Teoria dei quanti di Luce*. Edizioni Newton Compton, Roma (1972).
- [5] P. R. FEYNMAN: *QED: la strana teoria della luce e della materia*. Adelphi, Milano (2010).
- [6] H. EVERETT: "Relative state, formulation quantum mechanics", *Rev.Mod.Phys* **29** (1957) .
- [7] D. BOHM: "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables", *Phys. Rev.* **85** (1952) 166.
- [8] A. EINSTEIN, B. PODOLSKI, N. ROSEN: "Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?", *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.
- [9] J. S. BELL: "On the Einstein- Podolski – Rosen paradox", *Physics* **1** (1964) 195.

- [10] J. F. CLAUSER, M. A. HORNE, A. SHIMONY, R. A. HOLT: “Proposed experiment to test local hidden-variable theories”, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 880.
- [11] A. ASPECT, J. DALIBARD AND G. ROGER: “Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers”, *Physical Review Letters* **49(25)** (1982) 1804.
- [12] W. H. ZUREK: “Decoherence and the Transition from Quantum to Classical—Revisited”, *Los Alamos Science* **27** (2002) 1-25. <http://vukuz.ru/books/zurek.pdf>
- [13] C. ROVELLI: *Sette brevi lezioni di fisica*. Piccola Biblioteca Adelphi, Milano (2014).



**Marco Mazzeo:** è ricercatore in Fisica sperimentale presso il Dipartimento di Matematica e Fisica “E. De Giorgi” dell’Università del Salento. Si occupa di nanofotonica e sviluppo di dispositivi molecolari che vanno dalla generazione di luce incoerente (OLED) e coerente (Laser) allo studio di condensati di Bose Einstein a temperatura ambiente in composti organici. Appassionato di storia della scienza e storia delle religioni.