

---

# Cent'anni di relatività

Lorenzo Fatibene

Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano" - Università di Torino

---

**Q**uest'anno cade il centenario della formulazione della relatività generale. In questi cento anni la relatività generale si è imposta come il paradigma per la descrizione della gravità alle scale del sistema solare, astrofisiche e cosmologiche. Anche a scale terrestri, la relatività generale è parte essenziale del sistema GPS che senza la correzione degli effetti relativistici non potrebbe funzionare per più di qualche minuto. La teoria prevede che il campo gravitazionale abbia effetto sul ritmo degli orologi. *Siccome il tempo è quello che gli orologi misurano*, un campo gravitazionale rallenta il tempo stesso. A differenti altezze il campo gravitazionale terrestre ha una diversa intensità, quindi rallenta il tempo in maniera differente. I nuovi orologi ottici sono in grado di misurare gli effetti che la gravità esercita sul tempo in punti ad altezze diverse sulle scale del metro. Quindi, per la prima volta, si può confermare sperimentalmente che la nostra testa è più vecchia dei nostri piedi, a meno che non passiate a letto la maggior parte della giornata. Possiamo dire che gli effetti relativistici della gravità sono ben visibili dalle scale del metro a quelle cosmologiche, quindi tra  $10^0$  e  $10^{27}m$ .

## Cento anni, relativamente

È opinione unanime che Einstein abbia scoperto qualcosa di rivoluzionario, ma non c'è accordo su *cosa* esattamente abbia scoperto. Infatti, non c'è accordo su quali realmente siano i fondamenti della relatività generale, su quali principi meglio esprimano l'essenza della sua nuova teoria. Principi normalmente usati sono il *principio di covarianza generale* (ogni osservatore ha uguali diritti di descrivere la realtà), il *principio di equivalenza* (esistono osservatori che non vedono effetti gravitazionali), il *principio di Mach* (gli effetti inerziali sono determinati dalla distribuzione a grandi scale delle masse dell'universo). Questi principi spesso non sono enunciati in maniera precisa, quando sono enunciati in modo preciso ne esistono diverse versioni non equivalenti e la relazione tra essi è oscura. Il loro utilizzo riflette talvolta lo sviluppo storico che le idee hanno seguito durante il decennio speso da Einstein per formulare la teoria, avendo spesso una importanza euristica che è più cronologica che logica.

Ad esempio, la relazione tra covarianza generale e principio di equivalenza è cambiata nel tempo ed è tuttora mutevole. Einstein originariamente formulava la teoria sulla base del principio di covarianza. Quasi immediatamente Kretschmann notava che qualunque teoria può essere formulata in forma generalmente covariante e che quindi il principio di covarianza non poteva avere un contenuto fisico rilevante. La posizione di Kretschmann, quasi subito avallata da Einstein stesso, con l'andare del tempo è cresciuta, da isolata critica fino a essere opinione condivisa,

purtroppo ancora una volta senza essere enunciata in maniera precisa. Di conseguenza la teoria fondata sul principio di covarianza si è trovata senza un principio fisico fondante, ruolo che è stato assunto via via dal principio di equivalenza che è cresciuto in importanza pian piano quasi sostituendo il principio di covarianza.

Allo stesso tempo, si sono consolidate tecniche standard (ad esempio il teorema di Utiyama nelle sue varie forme) che sono basate sulla covarianza e che mostrano la capacità del principio di covarianza di fare esattamente quello che Kretschmann affermava non potesse fare, cioè selezionare teorie dinamiche.

Il teorema di Utiyama è abbastanza tecnico e forse vale la pena di provarne brevemente il contenuto in modo semplificato. Essenzialmente esso determina tutte le equazioni che dipendono da un insieme fissato di campi e che hanno un determinato insieme di simmetrie. Ad esempio, se conveniamo che in un modello la gravità sia descritta da una metrica (lorentziana) sullo spaziotempo e che le equazioni dipendano *solo* dalla metrica e dalle sue derivate fino al second'ordine e, inoltre, che le equazioni di tale modello debbano essere generalmente covarianti, allora il teorema di Utiyama individua le più generali equazioni con queste caratteristiche. Ora la cosa importante nel nostro discorso è che ci sono moltissime equazioni che vengono scartate, cosa che sembra contraddire ciò che afferma Kretschmann.

Tuttavia non possiamo dire che Utiyama fornisca dei *controesempi* a quello che Kretschmann sosteneva. Piuttosto le ipotesi usate in Utiyama sono diverse dalle assunzioni di Kretschmann e se è vero che ogni teoria possa essere formulata in modo covariante, questo in genere è fatto a un prezzo (l'aggiunta di campi ed equazioni) che non è consentito da Utiyama. In ogni caso Utiyama mostra che limitando ciò che è consentito fare per riformulare una teoria, la covarianza in effetti pone dei vincoli alle teorie ammesse.

La teoria della relatività generale è insieme almeno tre cose distinte: è la definizione di come è possibile formulare una descrizione assoluta della realtà fisica, è la descrizione del campo gravitazionale come geometria dello spaziotempo, ed è, infine, una particolare teoria della gravitazione che implementa i primi due aspetti.

Oggi ci troviamo ancora in una situazione peculiare in cui è molto chiaro cosa sia la relatività generale come specifica teoria della gravitazione, le sue conseguenze sperimentali sono state enucleate e verificate nel sistema solare, a scale astrofisiche e cosmologiche. La teoria ha dimostrato di essere migliore della teoria classica della gravitazione newtoniana ed è perciò divenuta il paradigma della teoria della gravità e, in un certo senso, non esiste osservazione che la contraddica. Malgrado il perfetto accordo tra osservazione e teoria, allo stesso tempo una notevole confusione avvolge la sua interpretazione e il mutuo ruolo del principio di equivalenza e di covarianza.

Il *principio di covarianza (generale)* afferma che è possibile descrivere la realtà in modo indipendente dall'osservatore, le leggi fisiche possono essere scritte in modo da avere la stessa forma per ogni osservatore, in questo modo estendendo il principio galileiano che afferma che le leggi della dinamica debbano essere espresse in modo da essere indipendenti dall'osservatore *inerziale*.

Già Newton aveva ben compreso che la stessa definizione di *osservatore inerziale* era lungi dall'essere chiara. Infatti, noto un osservatore inerziale, è chiaro che tutti gli osservatori in moto rettilineo uniforme rispetto a quello sono anch'essi inerziali. Ma la definizione di quel primo osservatore inerziale risulta essere alquanto problematica, essendo fondata in ultima analisi sulla distinzione tra *forze reali* e *forze fittizie*. Se fosse noto quali forze reali ci si aspetta agiscano su un sistema, allora gli osservatori inerziali potrebbero essere definiti come quegli osservatori per cui queste forze giustificano completamente le accelerazioni osservate. Accelerazioni che risultino non giustificate dalle forze reali sono attribuite a forze fittizie (ad esempio forze centrifughe) che sono imputabili a effetti non inerziali.

Sfortunatamente, questa definizione di forza apparente si fonda sulla nostra capacità di analizzare un sistema e decidere a priori quali forze reali agiscano su di esso, cosa che presuppone una conoscenza assai raffinata delle interazioni fisiche che esistono in natura. Assumere una conoscenza approfondita della natura già prima di formulare una teoria non è di per sé un problema; significa solo che prima di analizzare la realtà fisica abbiamo bisogno di conoscere una massa di dati sperimentali qualitativi. Questo è

giustificato dal fatto che la fisica sia una scienza sperimentale e non puramente deduttiva ma sfortunatamente lascia i suoi fondamenti privi di una base logica precisa.

Il famoso esperimento dell'ascensore illustra bene la situazione. Se siamo chiusi in un ascensore, poniamo una mela davanti ai nostri occhi e la lasciamo, cosa capita? Dipende. Se l'ascensore è fermo al piano, ci si aspetta che sulla mela agisca la forza peso e che conseguentemente essa cada di moto accelerato verso il pavimento.

Cosa possiamo dedurre se osserviamo che una volta lasciata la mela resta sospesa? Ci sono essenzialmente due possibilità: o il nostro ascensore è sospeso nello spazio, non agisce nessuna forza peso e quindi il moto della mela non subisce accelerazioni perché non agisce nessuna forza, oppure l'ascensore sta cadendo anch'esso, quindi sia l'ascensore che la mela cadono con la stessa accelerazione e quindi la mela resta sospesa.

Nel primo caso non agisce alcuna forza, nel secondo agiscono la forza peso e una forza fittizia (dovuta al fatto che il sistema di riferimento non è un riferimento inerziale) che si bilanciano esattamente (almeno nel baricentro dell'ascensore). Ora il punto è che non possiamo misurare direttamente le singole forze che agiscono su un sistema. Le forze sono *definite* dalle accelerazioni che producono e quindi, misurando le accelerazioni possiamo inferire solo la *risultante* delle forze agenti, non le singole forze. Se la mela resta sospesa significa che la risultante delle forze (reali e fittizie) è nulla. Non possiamo sapere se è nulla la sola forza peso se non guardando fuori dalla finestra, controllando se nelle vicinanze si vede la Terra e concludendo se ci si deve *aspettare* una forza peso oppure no, basandoci sull'esperienza che un pianeta in genere produce un campo gravitazionale nelle sue vicinanze.

Questa situazione è meravigliosamente illustrata proprio dalle immagini a cui siamo abituati degli astronauti che fluttuano "in assenza di peso" sulla stazione spaziale (ISS, Figura 1). La ISS vola a circa 300Km dalla superficie terrestre e *certamente* a quella distanza la forza peso prodotta dal campo gravitazionale terrestre è tutto tranne che trascurabile (se tale campo fosse sensibilmente ridotto cosa farebbe girare la Luna intorno alla Terra a più di 1000 volte tale distanza?). Con un semplice conto si può controllare

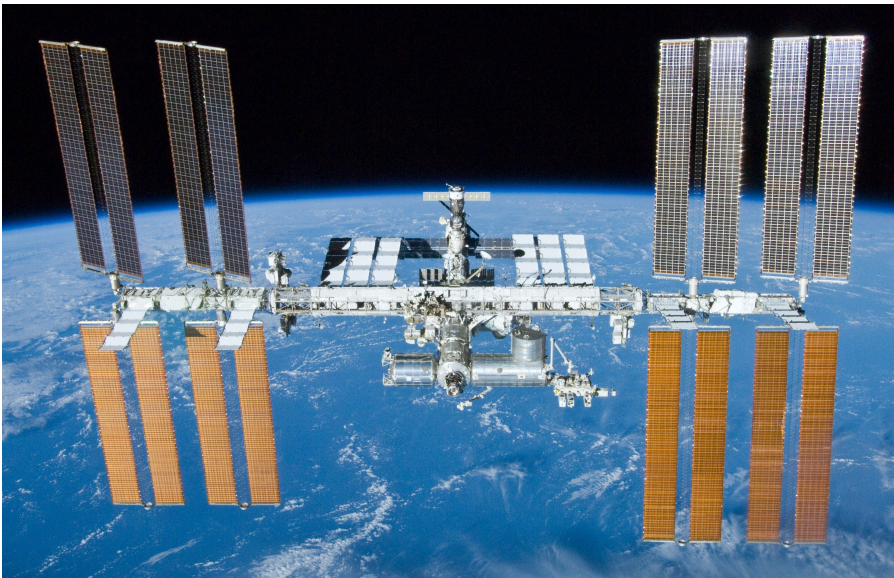
che la forza peso a 300Km dalla superficie è diminuita solo di circa il 10%. In realtà quindi la forza peso agisce sulla ISS quasi come sulla superficie e l'apparente assenza di peso è imputabile al fatto che il peso è esattamente cancellato da una forza apparente (la forza centrifuga) che a sua volta è generata dagli effetti inerziali nel sistema di riferimento della ISS che è accelerato essendo in caduta libera.

Gli effetti del campo gravitazionale possono sempre essere compensati da opportune forze apparenti (principio di equivalenza). Se tutti gli osservatori hanno lo stesso diritto di enunciare le leggi fisiche (principi di covarianza) e per alcuni osservatori (quelli in caduta libera) il campo gravitazionale è compensato da forze apparenti, allora il campo gravitazionale deve essere considerato una forza apparente per tutti? In un certo senso questa osservazione è il cuore della relatività generale in quanto identificazione del campo gravitazionale con le proprietà dello spaziotempo stesso. Proprio in quanto il campo gravitazionale è una proprietà universale come dettato del principio di equivalenza esso può essere considerato una proprietà del corpo che cade o una proprietà dello spaziotempo stesso.

Siccome tutti i corpi cadono nello stesso identico modo, la causa del loro movimento può essere considerata sia il risultato dell'interazione tra un campo di forze e il grave, sia una proprietà dello spazio in cui il grave si muove.

Non si può fare lo stesso con le altre forze. Se il campo elettrico fosse una proprietà dello spaziotempo, perché particelle con cariche diverse dovrebbero subire accelerazioni diverse? La proprietà peculiare del campo gravitazionale è proprio che il moto dei gravi è indipendente da ogni proprietà del grave stesso e dipende solo dalla sua posizione. Proprio per questo il campo gravitazionale può essere identificato con la geometria dello spaziotempo e un grave cadendo non è *soggetto a una forza*, ma semplicemente se ne va seguendo la traiettoria più rettilinea possibile nello spaziotempo.

Se quindi il principio di equivalenza e il principio di covarianza riescono a rendere conto del fatto che il campo gravitazionale si possa interpretare come un prodotto della geometria dello spaziotempo, possiamo rivolgere l'attenzione al primo problema: è possibile una conoscenza



**Figura 1:** La stazione spaziale internazionale (ISS) fotografata dallo space shuttle Atlantis.

assoluta della realtà?

Un buon modo di discutere questo aspetto è chiedersi fino a che punto sia possibile fornire una fondazione deduttiva della fisica, in cui le conoscenze sperimentali abbiano un ruolo euristico ma non logico.

## Relativo e Assoluto

Fin dai tempi di Galileo, più o meno esplicitamente, il termine *relativo* è usato in fisica come sinonimo di *dipendente dall'osservatore*, quindi *soggettivo*. Al contrario, il termine *assoluto* è definito a qualcosa di *indipendente dall'osservatore*, quindi *oggettivo*.

Assoluto e oggettivo, al di là della retorica, non hanno mai avuto molta fortuna in fisica. Lo spazio e il tempo assoluti di Newton si sono rivelati inesistenti, come la quiete assoluta di Aristotele era stata smascherata da Galileo.

Gli osservatori danno una descrizione della realtà che dipende dalle loro convenzioni (che a loro volta sono sensibili al loro stato di moto). Quindi abbiamo un'infinità di descrizioni diverse della stessa realtà fisica.

A questo proposito forse va notato esplicitamente che se riceviamo due telefonate da due diversi osservatori astronomici e in entrambe le chiamate ci notificano l'osservazione di una supernova, da queste comunicazioni noi non guadagniamo alcuna conoscenza del mondo! Estremizzando non siamo neanche in grado di essere

sicuri che i due osservatori abbiano in realtà osservato lo stesso evento. In generale le due notifiche conterranno l'ora e la direzione dell'avvenuta osservazione. Sfortunatamente, a livello fondamentale, per concludere che i due osservatori abbiano osservato la stessa supernova dobbiamo avere una conoscenza dettagliata delle convenzioni usate dai due laboratori, ad esempio per concludere se le loro osservazioni si riferiscono allo stesso tempo ed eventuali differenze di orario siano completamente imputabili a eventuali differenze di fuso orario o differenti sistemi orari.

Il fatto che proprio per evitare questo sulla Terra abbiamo *convenzionalmente* scelto protocolli che rendano semplice questo controllo è irrilevante dal punto di vista fondamentale. Resta il fatto che, per confrontare dati tra laboratori diversi, una massa di convenzioni debba essere esplicitata nel dettaglio e che tali convenzioni siano fondate e motivate da conoscenze e abitudini preesistenti a loro volta fondate su modelli approssimativi della realtà che sono stati storicamente affinati fino a giungere a quello attuale.

Ad esempio le osservazioni astronomiche sono tradizionalmente riportate in coordinate centrate in un sistema geocentrico anche se sappiamo che la scelta di un tale sistema non è fondamentalmente motivata. Se avessimo osservatori su diversi corpi celesti si potrebbe decidere di riferire i dati di ogni osservatorio al suo astro oppure riportare tutti i dati allo stesso sistema. Nel primo caso diventerebbe molto più complesso confrontare dati provenienti da osservatori diversi, nel

secondo caso il moto relativo degli astri viene addirittura nascosto nel protocollo di misura. Il puro dato osservativo non sarebbe più tale ma dipenderebbe da un modello (ad esempio la teoria usata per determinare il moto relativo degli osservatori). Nella pratica la situazione è anche peggiore di quanto possa sembrare! Il moto relativo è determinato essenzialmente dalla teoria newtoniana che si sa essere fondamentalmente superata dalla gravitazione einsteiniana.

Ripetiamo che di per sé ciò non sarebbe un problema ma riflette solo il fatto che la fisica è una disciplina sperimentale. Da un altro punto di vista però disturba il fatto che *logicamente* la formulazione della relatività generale sia fondata su una conoscenza pregressa ottenuta da modelli (la fisica newtoniana) che oggi sappiamo essere *errati* (ben utilizzabili entro certi limiti, ma comunque fondamentalmente errati).

Un altro esempio ci è fornito dallo stesso principio di equivalenza. In una delle sue formulazioni più usate esso afferma che *per ogni punto dello spaziotempo possiamo determinare un osservatore per cui vale (approssimativamente) la relatività speciale*. Ora il punto è: perché dovrebbe occorrere la relatività speciale per enunciare il principio di equivalenza che dovrebbe essere il principio cardine della relatività generale quando la relatività generale è una teoria più fondamentale della teoria della relatività speciale? Uno potrebbe voler formulare la relatività generale e *dopo* ottenere la relatività speciale come il modello in cui il campo gravitazionale è debole, non procedere a ritroso!

Questo modo di procedere è sovente considerato accettabile dai fisici che comunque dicono che la relatività speciale è una teoria fisica ben conosciuta e controllata, ma da un punto di vista logico non c'è dubbio che la relatività speciale è una descrizione inconsistente della realtà a meno che non sia vista come approssimazione di campo debole della relatività generale. Essa è affetta in buona sostanza dagli stessi difetti della dinamica di Newton, gli stessi problemi riguardanti la definizione di osservatore inerziale. Inoltre è una teoria dello spazio vuoto nel senso che, aggiungendo una particella materiale al nostro universo, sappiamo (dalla relatività generale) che essa incurva lo spaziotempo contraddicendo le assunzioni stesse della relatività speciale.

Talvolta si argomenta che la curvatura indotta

da una piccola massa è "piccola" e ciò giustifica l'approssimazione che porta a trascurarla. Se questo è certamente vero in pratica, allo stesso tempo non ha alcun senso logico: in primo luogo una massa, come tutte le quantità dimensionali, non è né "piccola" né "grande" ma è precisamente ciò che deve essere. I numeri puri sono "grandi" o "piccoli" mentre le quantità dimensionali sono piccoli o grandi *relativamente* a qualcos'altro. Una persona è grande rispetto ad un virus e piccola rispetto ad un pianeta ed è per questa ragione, ad esempio, che è buona pratica sviluppare in serie solo rispetto a quantità adimensionali.

In secondo luogo, comunque si introduca la descrizione di un punto materiale, di qualunque massa sia, tale modello si rifarà quasi certamente a una metrica di Schwarzschild. La curvatura di una metrica di Schwarzschild è "piccola" lontano dal raggio di Schwarzschild e cresce quando ci si avvicina alla particella. Quindi al più bisognerebbe dire che la curvatura indotta da una particella è "piccola" quasi ovunque tranne in una regione molto "piccola" vicino alla particella stessa. Se ci si avvicina abbastanza alla particella, qualunque sia la sua massa, la curvatura cresce oltre ogni limite. Il fatto che in genere non si sia interessati ad andare così vicino alla particella è ciò che giustifica l'approssimazione; il fatto che la curvatura non sia in assoluto trascurabile spiega perché la relatività speciale sia essenzialmente una teoria di vuoto incompatibile per sua natura con la descrizione della materia.

Ha senso quindi chiedersi se non sia possibile almeno in linea di principio una descrizione della realtà che si sviluppi logicamente senza affidarsi in modo essenziale a modelli arcaici e che possa essere condivisa indipendentemente da fattori storici. La difficoltà di questo approccio è che una tale impostazione servirebbe come fondamento della nostra descrizione della realtà fisica e dovrebbe collocarsi a priori rispetto alla conoscenza dei dettagli delle teorie fisiche.

Gli inglesi, per esprimere la difficoltà di questo tipo di progetti, hanno un termine, *bootstrap*, che descrive il tentativo di sollevarsi tirandosi per i lacci delle scarpe. La difficoltà in questo caso risiede nel tentativo di formulare dei protocolli osservativi *prima* di avere imparato quasi alcunché sulla realtà fisica che ci circonda.



Durante gli ultimi secoli i filosofi si sono spesso domandati se e in che misura sia possibile una conoscenza oggettiva della realtà. Le risposte sono state varie, andando dalla constatazione che semplicemente una conoscenza oggettiva della realtà fisica fuori di noi non è possibile (una corrente di pensiero che forse può eleggere come campione Hume), alla richiesta di un garante superiore che rendesse possibile la conoscenza della realtà (che possiamo esemplificare forse un po' estremizzando con le tesi di Descartes). Il motivo di queste risposte si può identificare nella sostanziale antinomia tra *oggettivo-assoluto* e *soggettivo-relativo*. Il fatto è che tutto in fisica sembra essere relativo e nulla assoluto.

È quindi possibile una conoscenza fisica assoluta se ogni misura è per sua natura soggettiva? Possiamo vedere la teoria della relatività generale come una risposta a questa domanda, una risposta nuova e in buona misura inaspettata.

Accettiamo che, come sembra, ogni conoscenza del mondo fisico venga attraverso misure per loro natura soggettive e convenzionali. L'entità primaria di agente fisico può essere introdotta come un *laboratorio* formato dai suoi apparati e dalle convenzioni atte a tradurre i fatti osservati in *numeri*. Un laboratorio scruta il cielo e quando vede una supernova riporta l'evento pubblicando l'ora convenzionale e la direzione convenzionale (più altri dettagli che omettiamo per semplicità) dell'osservazione. Resta il fatto che ciò che il laboratorio produce, cioè la serie di numeri, non contiene nessuna conoscenza su ciò che è accaduto. I numeri prodotti sono una descrizione convenzionale di ciò che è accaduto (soggettiva) e acquista significato quando si esplicitano nel dettaglio le convenzioni usate dal laboratorio (relativa). Ad esempio, per determinare la posizione dobbiamo sapere che il telescopio è montato con l'asse ottico parallelo all'asse di rotazione terrestre, conoscere il periodo di rotazione terrestre e compensare il moto diurno apparente degli astri. Per stabilire queste convenzioni, come è evidente, occorre avere conoscenze abbastanza approfondite di ciò che si sta osservando, del moto della Terra, della propagazione della luce.

Un altro esempio elementare è misurare l'istante in cui Giove eclissa una delle sue lune. Il tempo in cui le eclissi sono osservate è affetto da spiccate variabilità stagionali. In particolare,

le previsioni kepleriane sono sistematicamente ritardate di una quantità che è funzione della distanza tra la Terra e Giove. Noi oggi capiamo bene che questi ritardi sono dovuti alla variabilità della distanza tra Giove e la Terra, *unitamente al fatto che la velocità della luce è finita*. Quindi il ritardo nell'osservazione dell'eclissi è imputabile al tempo che la luce impiega a viaggiare tra Giove e la Terra che può variare da circa 35 minuti a circa 51 minuti. L'osservazione della stessa eclissi, a seconda della posizione dei pianeti, può variare di più di un quarto d'ora. Ciò è noto dal XVII secolo, ma comunque si capisce che senza di queste nozioni relativamente elementari (e notoriamente fondate su una fisica errata) noi non saremmo in grado di dare un senso al comunicato stampa dell'osservatorio astronomico.

Per rafforzare questa banale osservazione forse bisogna sottolineare che anche la misura del tempo di volo (di sola andata) della luce da Giove alla Terra presuppone che si specifichi come si debbano sincronizzare l'orologio su Giove che determina l'ora di partenza con l'orologio sulla Terra che determina l'ora di arrivo.

Di fatto, la soggettività delle osservazioni per diventare conoscenza richiede l'analisi delle convenzioni del laboratorio, che richiede la conoscenza di un modello, fondato su una teoria che andrebbe controllata sperimentalmente grazie alle osservazioni stesse. Gli scienziati sono spesso stati soddisfatti da questo stato di cose: la fisica è necessariamente una scienza sperimentale che accumula conoscenza esattamente in questo ciclo teorizzato di raffinamento successivo delle teorie fisiche.

Comunque non può essere ignorato che la relatività generale offre un'altra possibilità interessante che si delinea su due livelli. In primo luogo, se vogliamo enunciare protocolli di misura senza poter ancora essere motivati da conoscenze pregresse, l'unico modo per risolvere questa situazione di *bootstrap* è quello di ammettere *qualunque* protocollo osservativo. Se non so costruire orologi atomici, l'unica alternativa è ammettere inizialmente l'uso di qualunque orologio, finché una goccia che cade da un rubinetto che perde o il battito del cuore (peraltro di galileiana memoria).

Ad un secondo livello, la conoscenza della realtà fisica non sta nelle osservazioni, anche perché

le osservazioni sono state svuotate di significato proprio accettando qualunque convenzione. Tutti sono concordi nel fatto che la conoscenza del mondo vada distillata dalle convenzioni che sono assunte a fondamento delle osservazioni. Ma come si può analizzare le convenzioni se non disponiamo ancora di informazioni sulla realtà fisica? Come possiamo imparare qualcosa sulla realtà fisica quando tutto quello che vediamo è il ticchettio di un orologio e qualche fotone che colpisce la nostra retina? Per rompere il connubio soggettivo-relativo esiste un'altra via oltre a quella dell'analisi minuziosa delle convenzioni dei laboratori, che di fatto è necessariamente relativa a una qualche teoria preesistente.

La conoscenza è manifesta proprio nel momento in cui, nota l'osservazione di un laboratorio, siamo in grado di prevedere l'osservazione di un altro laboratorio che guardasse allo stesso fenomeno utilizzando convenzioni differenti. Mentre un laboratorio si limita a osservare e registrare, è solo nel momento in cui prevediamo cosa un altro laboratorio osserverà che per la prima volta *esperiamo*. È solo nel momento in cui siamo in grado di verificare che i due osservatori hanno effettivamente osservato la stessa supernova che possiamo affermare di avere imparato qualcosa di oggettivo sulla realtà fisica. La conoscenza non risiede mai nelle osservazioni pure delle coincidenze che avvengono nei laboratori, ma in queste *unitamente alla relazione tra i diversi laboratori*. Se un laboratorio vede una supernova il 23 febbraio 1987 non abbiamo difficoltà in linea di principio a prevedere la data in cui sarebbe stata vista da un laboratorio che usasse il calendario cinese. È solo quando sappiamo compiere questo passo che possiamo dire che c'è stata una supernova (e non due) nel giorno che noi chiamiamo 23 febbraio 1987.

## La teoria dell'assoluto

Personalmente trovo molto sorprendente che un tale programma (ogni laboratorio ha gli stessi diritti di descrivere la realtà e la descrizione assoluta della realtà fisica emerge dalla relazione tra diversi laboratori) possa essere enunciato in modo matematicamente preciso.

La relatività generale ci insegna che possiamo istituire dei laboratori che osservano la realtà e che sono in grado di tradurla in un resoconto formato da una lista di numeri seguendo un qualunque strampalato insieme di convenzioni. Si accende una lampadina e il laboratorio segnala una lista di tempi (ad esempio le differenze tra i segnali orari di coppie di orologi atomici in orbita in concomitanza con l'accensione della lampadina come succede per il GPS). I dati prodotti dal laboratorio non ci dicono nulla se non abbiamo un resoconto dettagliato della posizione dei satelliti, della sincronizzazione degli orologi a bordo dei satelliti eccetera. Ma tali conoscenze non sono disponibili se non *dopo* che siamo in grado di raccogliere osservazioni, abbiamo formulato un modello della realtà e lo abbiamo usato per descrivere il moto dei satelliti e il funzionamento degli orologi a bordo.

A livello fondamentale questo non è accettabile ma fortunatamente esiste un'altra via. Supponiamo di avere ora due laboratori ognuno con le sue convenzioni che producono la loro descrizione soggettiva degli stessi eventi (ad esempio l'accensione della lampadina). Se sappiamo costruire la descrizione che avrebbe prodotto il laboratorio 2, nota la descrizione del laboratorio 1, qualora quello descriva lo stesso evento osservato da questo, allora e solo allora, possiamo costruire una rappresentazione assoluta della realtà, che sia cioè indipendente dall'osservatore.

Per mostrare come questo sia possibile, non dobbiamo fare altro che considerare l'insieme  $U$  di tutti i possibili resoconti di tutti i possibili laboratori. La lettura del laboratorio 1 ( $L_1$ ) è un elemento  $x \in U$  di questo insieme. La nostra capacità di prevedere la lettura del laboratorio 2 ( $L_2$ ) che osservi lo stesso evento è rappresentato da una funzione  $\varphi_{21} : U \rightarrow U$  che associa alla lettura  $x$  effettuata da  $L_1$ , la lettura  $\varphi_{21}(x) \in U$  effettuata da  $L_2$ . La funzione  $\varphi_{21}$  è quindi chiamata *funzione di transizione* da  $L_1$  a  $L_2$ .

Esiste una funzione di transizione per ogni coppia di laboratori ( $L_a$  e  $L_b$ ) ed esse soddisfano per costruzione alle proprietà

$$\begin{cases} \varphi_{aa} = \text{id} \\ \varphi_{ab} \circ \varphi_{ba} = \text{id} \\ \varphi_{ab} \circ \varphi_{bc} \circ \varphi_{ca} = \text{id} \end{cases}$$

che vengono anche dette *identità di cociclo*.

Forse vale la pena di osservare che per definire l'insieme  $U$  e le famiglie di transizione non si fa mai riferimento alla realtà fisica. Questi concetti chiamano in gioco solo le descrizioni soggettive dei fenomeni, non i fenomeni stessi e per dirla con Descartes, sono *res cogitans* non *res extensa*. Quindi, possiamo definire *equivalenti* due descrizioni  $x_a$  e  $x_b$  date da due laboratori distinti  $L_a$  e  $L_b$  se vale la relazione

$$\varphi_{ab}(x_b) = x_a$$

e proprio in virtù delle identità di cociclo la relazione così definita è una relazione di equivalenza. Come tutte le relazioni di equivalenza essa definisce un quoziente  $M$ . Un punto di  $M$  è per costruzione una classe di equivalenza che contiene tutte le possibili rappresentazioni soggettive dello stesso fenomeno e si dimostra che per costruzione  $M$  è matematicamente rappresentata da una varietà e i laboratori sono automaticamente identificati con le carte di questa varietà.

Ogni fenomeno che può essere misurato da qualche laboratorio è identificato con un punto di  $M$ , ogni punto di  $M$  è descritto tramite tutte le possibili rappresentazioni di un evento. In altri termini, i punti della varietà  $M$  sono in corrispondenza biunivoca con i possibili eventi e quindi lo spaziotempo  $M$  così costruito è una rappresentazione della realtà fisica. Un punto di  $M$  è costituito da ogni possibile rappresentazione di un evento ed è pertanto, lui come classe di equivalenza, indipendente da ogni particolare descrizione di esso, quindi lo spaziotempo è una rappresentazione *assoluta* della realtà. Ed è una rappresentazione assoluta proprio perché, e nella misura in cui, la sua genesi è *intersoggettiva*.

La conoscenza della realtà fisica è contenuta completamente nelle funzioni di transizione scelte e si può dimostrare che dato un cociclo di funzioni di transizione la (classe di diffeomorfismo della) varietà  $M$  risulta univocamente determinata.

Come preannunciato a parole, la conoscenza assoluta della realtà fisica è costruita da rappresentazioni soggettive insensate e la sua struttura assoluta è completamente determinata dalla relazione tra queste rappresentazioni soggettive.

Anche da un punto di vista filosofico si ottiene

una situazione interessante: ogni laboratorio ha lo stesso diritto di descrivere la realtà soggettivamente. Ma (quindi) la conoscenza non risiede in ciò che vede un laboratorio, ma emerge solo dalla relazione tra laboratori diversi.

Il principio di covarianza generale emerge naturalmente come proprietà logica di questo schema conoscitivo. Ogni osservatore fornisce una rappresentazione soggettiva della realtà che lo circonda che vale tanto quanto qualunque altra descrizione. Non si può avere una conoscenza assoluta della realtà al di fuori dello schema tracciato dal principio di covarianza generale semplicemente perché le varie descrizioni della realtà devono stare tutte sullo stesso piano, proprio in quanto tutte prive di un qualunque significato.

In questo senso la covarianza generale non predilige nessuna teoria particolare, non seleziona nessuna particolare qualità fisica ma è semplicemente la condizione per cui ha un qualche senso fare affermazioni sulla realtà.

Supponiamo ora di voler enunciare una legge fisica. Possiamo aspettarci che una tale legge sia un legame, un vincolo sulle proprietà degli eventi rappresentati in  $M$ . Ma come tutte le varietà,  $M$  può essere descritta solo attraverso una collezione di carte, cioè una collezione di rappresentazioni locali che descrivono convenzionalmente, cioè soggettivamente, la realtà fisica. Le carte mischiano proprietà assolute dello spaziotempo con proprietà relative delle convenzioni dei laboratori ed è difficile determinare quando una proprietà in questo scenario dipende dalla realtà assoluta e quando dipende dalle rappresentazioni soggettive.

La situazione è simile a quello che è successo in geometria differenziale durante il secolo precedente alla relatività. La geometria differenziale è nata come lo studio delle superfici immerse nello spazio ed è subito apparso evidente che tali superfici possono essere descritte solo in modo convenzionale, ad esempio dandone parametrizzazioni locali.

Le parametrizzazioni locali mischiano caratteristiche della superficie a informazioni convenzionali (in linguaggio moderno le coordinate) che sono una scelta della rappresentazione e ben poco hanno a che fare con le proprietà della superficie. Volendo formulare delle quantità che rappresentassero le proprietà assolute della su-



perficie si potrebbe usare oggetti costruiti con la parametrizzazione? Certamente questo è possibile, ma ad un patto: che nota l'espressione della proprietà in una parametrizzazione noi si sia in grado di prevedere la forma della stessa proprietà in ogni altra parametrizzazione, cioè la proprietà sia covariante per cambiamenti di parametrizzazione.

Un esempio classico di tutto questo è la definizione degli integrali sulle varietà. Una volta fissata una parametrizzazione una varietà è localmente indistinguibile da un aperto di  $\mathbb{R}^m$ . E sugli aperti di  $\mathbb{R}^m$  si può calcolare qualunque integrale multiplo per definire dei numeri. Ora ci si chiede se i numeri così ottenuti siano delle proprietà della superficie o della particolare descrizione scelta con la parametrizzazione. È noto che in generale un integrale multiplo dipende dalla parametrizzazione e quindi non costituisce una proprietà assoluta della superficie. Ma è anche noto che esistono particolari integrali multipli (ad esempio gli integrali superficiali) che hanno la proprietà caratteristica di essere indipendenti dalla parametrizzazione. Se si calcola l'integrale superficiale su una varietà (o il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie) il risultato è indipendente dalla particolare rappresentazione scelta ed esso è una proprietà della superficie.

Detto in altri termini, la geometria differenziale studia le proprietà intrinseche delle superfici (o più in generale delle varietà) che sono quelle proprietà che anche quando sono calcolate usando una parametrizzazione della superficie, a posteriori risultano essere indipendenti da essa. Cioè possiamo *definire* le proprietà intrinseche delle superfici come quelle proprietà che risultano indipendenti dalla parametrizzazione.

L'analogia con la fisica a questo punto dovrebbe essere evidente: la realtà fisica è descrivibile solo attraverso la descrizione soggettiva fornita dagli osservatori nei loro laboratori (come le varietà possono essere rappresentate solo in termini di parametrizzazioni). Le leggi fisiche sono quelle proprietà che, per definizione, possono essere descritte in modo indipendente dall'osservatore (come le proprietà geometriche delle superfici possono essere descritte da quantità invarianti). Le quantità che dipendono dall'osservatore in modo essenziale sono proprietà del-

l'osservatore, non proprietà assolute della realtà fisica.

Quindi le leggi fisiche *devono* poter essere formulate in modo indipendente dalle convenzioni e per questa ragione gli osservatori devono avere tutti lo stesso diritto di descrivere la realtà. Questo è il presupposto per l'esistenza di una rappresentazione assoluta della realtà fisica. Il principio di covarianza è il nucleo di ogni teoria fisica assoluta quale la relatività generale si candida ad essere.

Lo stesso Einstein concedeva che il nome scelto per la sua teoria era stato particolarmente infelice e che si sarebbe dovuta chiamare la teoria assoluta della gravitazione piuttosto che teoria della relatività generale.

## Il principio di equivalenza

In tutto il discorso sul principio di covarianza e sulla descrizione assoluta della realtà fisica non abbiamo neanche nominato il principio di equivalenza, come non abbiamo neanche nominato la gravità. Tutto quello di cui abbiamo discusso finora non riguarda la gravità se non molto indirettamente. Finora abbiamo semplicemente mostrato come si possa dare una descrizione assoluta della realtà, utilizzando descrizioni soggettive e come sia *esattamente* la natura intersoggettiva della conoscenza a garantire l'oggettività della descrizione che ne emerge in questo modo.

Ora possiamo discutere sommariamente come tutto questo possa essere utile a descrivere la gravità nello specifico. In che modo adottando questo schema possiamo costruire una descrizione assoluta della gravità? Anche a questa domanda si può dare una risposta precisa che qui riassumiamo per sommi capi.

Sappiamo qualitativamente che le mele talvolta cadono e chiamiamo questo fenomeno *gravità*. Come possiamo descrivere le leggi fisiche che modellano questo ambito di fenomeni?

Possiamo ipotizzare alcuni fatti generici sulla gravità. In primo luogo ci aspettiamo che il moto dei gravi sia determinato da equazioni differenziali ordinarie, del secondo ordine, perché sappiamo che un moto è univocamente determinato dalla posizione e velocità iniziale. Inoltre il moto dei gravi è una successione di eventi che

quindi è descritta da una traiettoria nello spaziotempo  $M$  che abbiamo costruito sopra. Resta quindi solo da scegliere quali equazioni del secondo ordine possano descrivere il moto dei gravi in modo che valga una qualche forma del teorema di Cauchy che garantisce che date delle condizioni iniziali queste determinino in modo univoco la traiettoria del grave. Potremmo anche cercare di descrivere una fisica non deterministica, ma per ora manterremo un atteggiamento conservatore e ci limiteremo alle equazioni per cui vale il teorema di Cauchy per garantire in forma matematica il determinismo.

Sappiamo che almeno a livello classico (cioè non quantistico) possiamo derivare le grandezze fisiche e possiamo assumere la necessaria regolarità per  $M$  e per le equazioni che descrivono il moto dei gravi. Inoltre queste equazioni devono essere leggi fisiche e quindi covarianti. Ogni laboratorio descrive i gravi in modo diverso ma noi dobbiamo controllare come le diverse descrizioni siano in relazione tra loro, perché sappiamo che lì si nasconde la descrizione assoluta della fisica.

Se ci limitassimo a questo, le nostre considerazioni non sarebbero specifiche dei corpi soggetti alla sola gravità ma si applicherebbero a particelle soggette a qualunque tipo di forza. Il punto è che il principio di covarianza non si applica specificatamente alla gravità ma più in generale alla descrizione assoluta della realtà fisica. Abbiamo quindi bisogno di caratterizzare il moto dei corpi soggetti alla sola gravità, cioè dobbiamo caratterizzare la gravità rispetto alle altre forze. Per ciò possiamo ispirarci a quello che Einstein stesso fece e riconsiderare l'esperimento dell'ascensore descritto sopra in una maniera un po' diversa da quello che si fa di solito. In genere l'esperimento dell'ascensore è utilizzato per mostrare come esistono degli osservatori (quelli in caduta libera) che non avvertono campo gravitazionale (Figura 2).

Per il nostro discorso ci serve andare in una direzione approssimativamente opposta. È anche vero che l'esperimento dell'ascensore mostra che in qualunque circostanza ci sono osservatori che vedono un campo gravitazionale. Anche quando gli osservatori in caduta libera non percepiscono campo gravitazionale, gli altri lo percepiscono. Anche quando siamo sospesi nello spazio pro-

fondo, lontano da ogni corpo celeste, rinchiusi nel nostro ascensore, se l'ascensore accelera verso l'alto percepiamo una forza indistinguibile da un campo gravitazionale diretto verso il basso.

In altri termini, il campo gravitazionale non può essere nullo per tutti e questa è una caratteristica della gravità. Se infatti consideriamo come la forza di Coulomb agisce su una particella, se questa particella è carica subirà delle accelerazioni. Ma se lasciamo descrivere il moto della particella carica da un osservatore con la stessa carica esso subirà la stessa accelerazione e non misurerà alcuna accelerazione della particella. Da questo punto di vista non c'è molta differenza tra campo gravitazionale e campo elettrico.

Ma se usiamo una particella elettricamente neutra essa non risentirà affatto del campo elettrico e non subirà nessuna accelerazione imputabile all'azione del campo elettrico. Su questo qualunque osservatore sarà concorde! In altre parole, il campo elettrico (come qualunque altra forza eccetto la gravità) può essere spento *in modo assoluto* mentre il campo gravitazionale no. Quindi *definiamo* il campo gravitazionale come ciò che resta quando abbiamo spento tutte le interazioni che possono essere spente in modo assoluto e indipendente dall'osservatore.

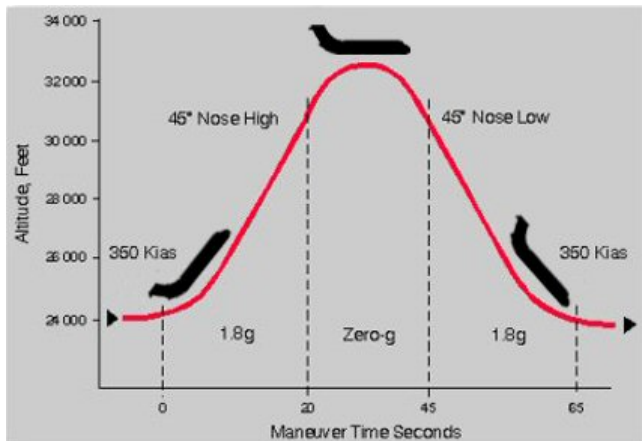
Risparmiando il conto, si può dimostrare matematicamente che esiste un'unica equazione ordinaria del secondo ordine, deterministica (in un opportuno senso) in cui le forze non possono essere spente in modo assoluto, e cioè

$$\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = \lambda \dot{q}^\lambda \quad (1)$$

Quindi il campo gravitazionale deve essere codificato dalle funzioni  $(\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda, \lambda)$  che in effetti determinano completamente la caduta libera dei gravi.

Se andiamo a vedere come le funzioni  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ , si trasformano per cambiamenti di laboratori si scopre facilmente che esse determinano una connessione sullo spaziotempo. Il parametro  $\lambda$  può sempre essere annullato scegliendo opportunamente la parametrizzazione della traiettoria  $q(s)$  e l'equazione (1) ha un preciso significato geometrico: è detta equazione delle geodetiche della connessione  $\Gamma$ .

Il fatto che i gravi siano descritti da questa equazione è una delle forme (la più debole) in



**Figura 2:** Una esperienza di caduta libera può essere effettuata con un aeroplano: dopo una iniziale cabrata il velivolo è mantenuto lungo la traiettoria parabolica che seguirebbe, in assenza di atmosfera, se i motori fossero spenti (a sinistra). All'interno i passeggeri non percepiscono la forza di gravità (a destra), fino a che l'aeroplano non cambia traiettoria.

cui viene formulato il principio di equivalenza. In effetti la connessione  $\Gamma$  non dipende dal grave ma è una struttura geometrica sullo spaziotempo che determina la caduta di tutti i gravi e conseguentemente tutti i gravi cadono secondo le stesse traiettorie nello spaziotempo, indipendentemente da ogni caratteristica del grave stesso.

Possiamo quindi dire che il principio di covarianza (unitamente alla definizione data sopra di gravità) identifica le strutture geometriche che descrivono il campo gravitazionale. Non si tratta ancora della relatività generale così come formulata da Einstein, ma ci si avvicina considerevolmente.

All'epoca della formulazione della relatività generale la teoria generale delle connessioni era agli albori ed erano ben conosciute solo una particolare classe di connessioni che vengono generate da una metrica  $g$  e che oggi sono note come connessioni di Levi-Civita. È stato quindi storicamente e relativamente *facile* per Einstein formulare la relatività generale descrivendo il campo gravitazionale mediante una metrica sullo spaziotempo che induce la caduta dei gravi in termini della connessione di Levi-Civita indotta dal campo gravitazionale.

In relatività generale nella versione formulata da Einstein esiste un'unica metrica  $g$  che in un sol colpo descrive il campo gravitazionale, determina la caduta dei gravi e consente di misurare distanze nello spazio e misurare gli intervalli di tempo (cioè definire gli orologi standard).

Più tardi Ehlers-Pirani-Schild (EPS) all'inizio degli anni settanta hanno tentato di dare una formulazione assiomatica della relatività generale di Einstein fondata sul comportamento di gravi e

raggi di luce. Il loro risultato arriva sorprendentemente vicino all'obiettivo. EPS trovano che la connessione  $\Gamma$  che determina la caduta dei gravi è funzione della metrica e di un campo vettoriale ausiliario sullo spaziotempo. Se il campo vettoriale ammette un potenziale  $\phi$  allora si ottiene la relatività standard di Einstein riferita a una metrica conforme, costruita con la metrica di partenza e il potenziale  $\phi$ . Gli stessi EPS commentano sulla possibilità di aggiungere un assioma che implichi automaticamente la riduzione alla relatività generale standard nella forma originale e lo individuano in una richiesta sulle misure del tempo.

## Il tempo

Il tempo è ciò che gli orologi misurano. Esistono (almeno) due modi diversi di costruire orologi: in uno si prende un sistema il cui comportamento è periodico, ad esempio una molecola che oscilla, e si usa questo sistema per contare le oscillazioni. Questo tipo di orologi in genere usa un sistema quantistico ed è chiamato *orologio atomico*. In alternativa, possiamo prendere due specchi, porli a distanza costante (qualunque cosa ciò significhi visto che oggi noi definiamo le distanze misurando il tempo che impiega la luce a percorrerle) e contando quante volte un raggio di luce rimbalza tra gli specchi. Questo secondo tipo di orologio dipende solo dal campo gravitazionale (visto che le distanze sono definite con la metrica che descrive tale campo) e dal comportamento della luce nello spaziotempo ed è pertanto detto *orologio gravitazionale*.

Ora la relatività generale standard fa una assunzione molto netta sulla relazione tra orologi gravitazionali e atomici. Supponiamo di costruire due orologi, uno gravitazionale e uno atomico e di usare uno di essi per controllare se il ritmo dell'altro si mantiene costante relativamente al primo. Ebbene secondo la relatività generale i due orologi segnano per sempre lo stesso tempo e se EPS accettano questa ipotesi come assioma allora la loro teoria riproduce esattamente la relatività generale standard, la metrica che descrive il campo gravitazionale è la stessa metrica che determina la caduta dei gravi, è la stessa metrica che misura le distanze e i tempi, è la stessa metrica che descrive la propagazione della luce.

Ma, come si sono chiesti gli stessi EPS, quanto possiamo essere certi che orologi atomici e orologi gravitazionali davvero misurano lo stesso tempo? È chiaro che i due tempi sono approssimativamente uguali, ma quanto possiamo spingerci nel definirli *esattamente* uguali? Se non lo fossero, quali effetti dovremmo aspettarci?

## Conclusioni

Finire con delle domande è sempre un buon modo di finire. Possiamo quindi riassumere quanto abbiamo detto.

La teoria della relatività è tre cose insieme.

È la definizione di uno schema fondato sul principio di covarianza generale per ottenere una descrizione assoluta della realtà fisica senza assumere dettagliate teorie preesistenti. Si parte dalla definizione dei laboratori che scelgono arbitrariamente delle convenzioni, osservano il mondo e lo descrivono in termini di liste di numeri. Queste descrizioni sono soggettive in quanto mischiano i dati ottenuti sperando la realtà con le convenzioni del laboratorio.

Quando aggiungiamo la capacità di tradurre i risultati di un laboratorio nel risultato degli altri, automaticamente riusciamo a definire lo spaziotempo che è una descrizione assoluta della realtà osservata dai laboratori.

Parafrasando in termini filosofici, si potrebbe dire che lo spaziotempo è un modello fedele della realtà. Il modello è assoluto in quanto intersoggettivo, cioè se è vero che un osservatore non può conoscere la realtà a quanto pare la collettività

può, a patto di considerare le descrizioni di tutti sullo stesso piano. Si può dire che la conoscenza è possibile solo nella misura in cui la scienza è un processo collettivo e democratico. E questa è di per sé una conclusione suggestiva.

In secondo luogo la relatività generale è la constatazione che il campo gravitazionale può essere identificato con la struttura geometrica dello spaziotempo. Tale constatazione è possibile in virtù del principio di equivalenza, nella sua forma più debole che è descritta in pratica dall'esperimento dell'ascensore e che è indipendente dal ogni conoscenza della relatività speciale. Il campo gravitazionale è quello che resta quando spegniamo tutto quello che è possibile spegnere in modo assoluto.

Infine, la relatività generale è una teoria particolare del campo gravitazionale formulata da Einstein e Hilbert cento anni fa che sceglie una particolare dinamica del campo gravitazionale, quella (essenzialmente unica) dinamica che è compatibile con l'assunzione che orologi atomici e gravitazionali misurino lo stesso tempo. In tale teoria il campo gravitazionale è la struttura geometrica dello spaziotempo, come prescritto al punto 2, ed è generalmente covariante, come prescritto al punto 1. Questa specifica teoria è stata confermata da tutte le osservazioni fatte nell'ultimo secolo e nel prossimo futuro altre conferme arriveranno.

Se questa teoria fallirà, le sue debolezze probabilmente, come è già avvenuto per la teoria di Newton, non saranno in prima battuta evidenziate dalle osservazioni. Le sfide che la teoria deve affrontare vengono dalla compatibilità con la meccanica quantistica, o da osservazioni che siano sensibili alle scale galattiche o cosmologiche, che quindi attualmente sono concepibili solo in qualità di esperimenti concettuali.



- [1] J.D. NORTON: *General covariance, gauge theories and the Kretschmann objection*, in: Katherine Brading and Elena Castellani (eds.), *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. Cambridge University Press. 110–123 (2003)
- [2] J.M. LEE: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag (2006).
- [3] [Wiki on Manifolds](#)

- [4] V. PERLICK: "Characterisation of Standard Clocks by Means of Light Rays and Freely Falling Particles", *Gen. Rel. Grav.* **19** (1987) 1059–1073.
- [5] J. EHLERS, F.A.E. PIRANI, A. SCHILD: *The geometry of free fall and light propagation* In: O’Raifeartaigh, L. (ed.) *General Relativity: Papers in Honour of J. L. Synge*, pp. 63–84. Clarendon Press, Oxford (1972)
- [6] [Wiki on GPS](#)



**Lorenzo Fatibene:** è professore di fisica matematica presso l’Università di Torino. Si occupa di metodi geometrici per le teorie di campo, in particolare per teorie relativistiche e covarianti.



