
Fermioni di Majorana in sistemi a due dimensioni?

Pasquale Scarlino

Kavli Institute of Nanoscience - TU Delft (NL)

I fermioni di Majorana sono descritti da soluzioni dell'equazione di Dirac per cui vi è una identificazione tra particella ed antiparticella. A livello fondamentale mancano verifiche sperimentali della loro esistenza in qualità di particelle elementari. Lavori teorici hanno però suggerito la presenza di un loro analogo in sistemi allo stato solido. Recentemente, un primo importante segno della loro esistenza sembra esser stato raggiunto.

Origine dei Fermioni di Majorana

In meccanica quantistica relativistica, un fermione, come l'elettrone, è descritto da soluzioni a valori complessi dell'equazione di Dirac. Tuttavia nel 1937, Ettore Majorana, guidato da un principio di semplicità ed eleganza matematica, propose un'equazione modificata, contenente solo quantità reali ed avente soluzioni anch'esse reali (i cosiddetti Fermioni di Majorana). A prima vista, potrebbe sembrare una sottile discussione matematica, ma queste considerazioni hanno profonde implicazioni fisiche. Infatti ad ogni particella corrisponde una specifica antiparticella il cui stato è descritto applicando l'operatore

di coniugazione di carica alla funzione d'onda ψ che la trasforma nella sua complessa coniugata ψ^* . Segue, quindi, che i fermioni proposti da Majorana, essendo descritti da soluzioni reali, sono particelle coincidenti con le proprie antiparticelle ed i relativi operatori di creazione e annichilazione devono essere anch'essi coincidenti e quindi Hermitiani ($\gamma = \gamma^\dagger$).

A questo punto, alcune domande sorgono spontanee. Esistono questi fermioni di Majorana, perché sono così interessanti, e cosa hanno di diverso rispetto ai fermioni normali, detti di Dirac? Per spiegarlo è necessaria una breve premessa. Un'antiparticella è caratterizzata da medesima massa, stesso spin ma opposta carica elettrica rispetto alla sua controparte. Di conseguenza, coincidendo con la propria antiparticella, un eventuale fermione di Majorana dovrebbe necessariamente avere carica nulla. Tuttavia questo non è sufficiente, ed infatti il neutrone ha una sua antiparticella, l'antineutrone. Inizialmente Majorana suggerì l'applicazione della sua equazione per descrivere i neutrini, a quel tempo ancora non identificati, ma l'esistenza di una netta distinzione tra neutrino ed antineutrino è ancora controversa.

Sorprendentemente, negli ultimi anni, i fermioni di Majorana hanno suscitato notevole interesse

Quasiparticelle

In sistemi di stato solido accade spesso che gruppi di elettroni correlino il loro comportamento in seguito ad interazioni reciproche o con l'ambiente circostante legate alla loro carica o spin. Tali interazioni danno vita a nuove "particelle" effettive, spesso chiamate "quasiparticelle" poiché caratterizzate da numeri quantici ben definiti e specifiche caratteristiche fisiche che possono differire di gran lunga da quelle dei loro costituenti fondamentali. Sono esempi di quasiparticelle i fononi, quanti di vibrazione nei cristalli, come anche i plasmoni nei metalli, gli eccitoni nei semiconduttori, i polaritoni nelle cavità, i magnoni nei materiali magnetici, le coppie di Cooper nei superconduttori, ecc.

in un settore totalmente differente rispetto alla fisica delle particelle elementari, la fisica teorica dello stato solido. In sistemi materiali oggi sperimentalmente realizzabili, esisterebbero infatti fermioni di Majorana non come particelle fondamentali, bensì come entità effettive (quasiparticelle) descrittive del comportamento globale di elettroni correlati. Il concetto di eccitazione coincidente con la propria antiparticella non è totalmente estraneo al settore. Un tipico esempio è infatti costituito dall'eccitone, una quasiparticella costituita da un elettrone ed una lacuna legati assieme che soddisfa però una statistica di tipo bosonico.

Fermioni di Majorana in sistemi a stato solido

Come può un sistema allo stato solido, costituito da fermioni tradizionali, contribuire ad originare fermioni di Majorana, e cosa serve per poterli osservare? Gli elementi richiesti sono essenzialmente due: superconduttività e magnetismo.

In un superconduttore, in seguito all'interazione con i fononi circostanti, gli elettroni risultano essere appaiati nelle cosiddette coppie di

Fermioni senza spin?

Fermioni e bosoni sono generalmente associati a particelle aventi rispettivamente spin semintero o intero. Com'è quindi possibile che si parli di fermioni di Majorana riferendosi a particelle prive di spin? L'utilizzo del termine fermione in questo caso differisce rispetto alla fisica particellare. Infatti, nei sistemi materiali considerati, il termine deriva dalle regole di anticommutazione $\{\gamma_j, \gamma_k^\dagger\} \equiv \gamma_j \gamma_k^\dagger + \gamma_k^\dagger \gamma_j = \delta_{jk}$ che continuano a valere. Tuttavia questi fermioni di Majorana risultano essere privi non solo di carica elettrica ma anche di massa e spin. Inoltre $\gamma^2 = 1$, invece del tradizionale $\gamma^2 = 0$ valido per i fermioni tradizionali (Principio di esclusione di Pauli).

Riguardo alla statistica, non è poi quella fermionica classica ma si ha una statistica non-abeliana. A tal riguardo, va detto che in semiconduttori a bassa dimensionalità, gli elettroni in moto in presenza di un alto campo magnetico possono cooperare alla creazione di quasiparticelle aventi carica frazionaria e statistica intermedia tra quella fermionica e la bosonica. Per tale motivo ci si riferisce ad essi col termine di "anioni", a loro volta distinti in "abeliani" o "non abeliani", in base alla commutabilità o meno delle varie operazioni di scambio di posizione.

Cooper. Attorno al livello di Fermi ($E = 0$, cioè nel mezzo della gap superconduttiva) le eccitazioni (quasiparticelle) risultano essere sovrapposizioni (neutre) di elettroni e lacune, soddisfacendo così la nostra prima richiesta, che però è condizione necessaria ma non sufficiente.

Non è detto infatti che l'operatore di annichilazione di queste quasiparticelle sia hermitiano e coincidente con il rispettivo operatore di creazione ($\gamma = uc_\sigma^\dagger + u^*c_\sigma = \gamma^\dagger$). Il motivo è che, escluse rare eccezioni, la superconduttività ha tipicamente luogo con appaiamento in "simmetria di onda s", cioè tra elettroni con spin opposto che formano un singoletto. Per ragioni di simme-

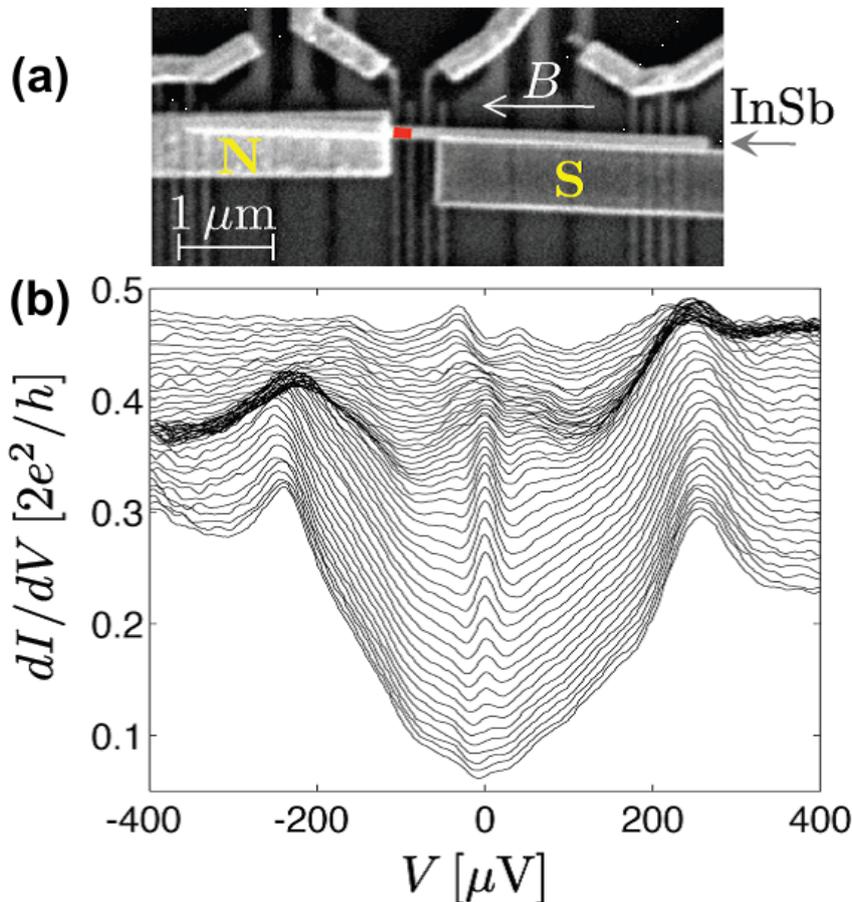


Figura 1: a) Immagine al microscopio elettronico del sistema utilizzato a Delft per evidenziare fermioni di Majorana. Un nanowire di InSb (alto spin-orbita) è ricoperto a sinistra da Ti/Au (contatto metallico-N) ed a destra da NiTiN (superconduttore-S), mentre nella zona intermedia vi sono contatti metallici più sottili, utilizzati per modificare localmente il potenziale elettrochimico (e quindi la densità elettronica) nella porzione di nanowire sovrastante. b) Conduttanza differenziale registrata per campi magnetici tra 0 mT e 500 mT in step da 10 mT. Si possono nettamente discernere due picchi attorno a $\pm 250 \mu\text{V}$ che rappresentano la gap superconduttiva indotta per effetto di prossimità nel nanowire. Un altro picco è visibile attorno a $0 \mu\text{V}$ per campi magnetici compresi tra circa 100 mT e 400 mT; tale picco indica la creazione di una coppia di quasiparticelle di Majorana localizzate all'estremità del nanowire. Adattata da [4].

tria è indispensabile invece che l'appaiamento di Cooper abbia luogo tra elettroni e lacune col medesimo spin (stato di tripletto) e funzione d'onda orbitalica antisimmetrica, di tipo *onda p*. Sfortunatamente però non si possiede tuttora una verifica sperimentale della concreta esistenza di un superconduttore di questo tipo, ed inoltre pare che nei sistemi candidati questo appaiamento sia particolarmente fragile rispetto al disordine. Ad ogni modo il messaggio fondamentale è che serve un meccanismo che forzi gli elettroni ad avere medesimo spin, rimuovendo la degenerazione di spin.

La svolta decisiva nel settore si è avuta nel 2008, ad opera di due teorici dell'università di Pennsylvania, Fu e Kane, che suggerirono la combinazione di un materiale con alto effetto spin-orbita (un cosiddetto "isolante topologico") ed un comune superconduttore di onda-s per realizzare un'interazione di appaiamento equivalente, dal punto di vista formale, a quella di tipo-p [1]. La prossimità dei materiali può determinare infatti una "superconduzione indotta" quando coppie di Cooper provenienti dal superconduttore attraversa-

no l'interfaccia conservandosi integre; ma l'ingrediente fondamentale della ricetta proposta da Fu e Kane è costituito dalla forte interazione spin-orbita che rompe la simmetria tra stati con diverso spin favorendo un appaiamento parallelo di tipo-p. Sfortunatamente, anche questa volta sussiste un problema. Pur avendo effettuato enormi passi avanti, la ricerca sperimentale sugli isolanti topologici non risulta infatti essere ancora abbastanza matura da consentire una realizzazione sperimentale di questa proposta teorica.

Un ulteriore passo in avanti è stato però conseguito nel 2010 dal gruppo teorico di Das Sarma, dell'Università del Maryland, che fece notare come nella ricetta proposta da Fu e Kane fosse possibile sostituire l'isolante topologico semplicemente con un semiconduttore ad alto potenziale di spin-orbita in presenza di un opportuno campo magnetico [2]. Il punto di forza della più recente proposta di Jason Alicea, del Californian Institute of Technology, consiste invece nel ricercarli in un sistema ibrido facilmente realizzabile dal punto di vista sperimentale: un nanowire (cioè un nanofilo monodimensionale) fatto di semicon-

Effetto spin-orbita

In fisica atomica, l'interazione spin-orbita contribuisce a spiegare la struttura fine dei livelli energetici atomici. La sua origine è legata al moto di un elettrone attorno al nucleo. Nel sistema di riferimento dell'elettrone, infatti, il campo elettrico nucleare \mathbf{E} dà luogo ad un campo magnetico effettivo proporzionale a $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$, dove \mathbf{p} è il momento dell'elettrone.

Più in generale un elettrone immerso in un potenziale elettrico $V(\mathbf{r})$ risente di un'interazione spin-orbita della forma: $H_{SO} = -\frac{e\hbar}{4mc^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times (\nabla V))$, dove m è la massa dell'elettrone e $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sono le matrici di Pauli. Questo contributo energetico può essere visto come l'effetto di un campo magnetico interno effettivo che, agendo sullo spin elettronico comporta uno splitting energetico dei due stati di spin, anche in assenza di campo magnetico esterno.

In un sistema allo stato solido, un elettrone è soggetto al campo elettrico determinato dal reticolo cristallino e conseguentemente si ha un accoppiamento spin-orbita che comporta una modifica della relazione di dispersione ("struttura a bande") che descrive lo spettro energetico dell'elettrone nel cristallo in funzione del suo momento. Per elettroni confinati nel gas bidimensionale di un'eterostruttura i campi elettrici generanti l'effetto spin-orbita presentano due principali origini. Una connessa direttamente alla possibile natura asimmetrica della cella cristallina (che comporta la rottura della simmetria di inversione spaziale) e che dà origine al contributo detto di "Dresselhaus"; l'altra dovuta ad un'asimmetria, lungo la direzione di crescita, dell'eterostruttura nel suo complesso e che dà origine al contributo di spin-orbita detto di "Rashba". Di conseguenza, l'entità dell'interazione spin-orbita risulta dipendere fortemente dal particolare materiale considerato.

duttori con alto spin-orbita quali InSb o InAs e posto in prossimità di un superconduttore in presenza di un campo magnetico non troppo elevato applicato lungo l'asse del nanowire [3].

Prima evidenza sperimentale

Al momento della pubblicazione di questi lavori teorici, il gruppo di Kouwenhoven, dell'Università di Delft, possedeva tutta la tecnologia necessaria per una realizzazione sperimentale dell'ultimo sistema suggerito. Difatti già nel 2008 un esperimento sull'interazione tra nanowires di InAs e superconduttori era stato effettuato nel medesimo gruppo, che successivamente aveva studiato anche nanowire di InSb.

La difficile questione da affrontare riguardava invece quale fosse il modo migliore per identificare la presenza dei fermioni di Majorana in qualità di stati aventi energia, carica elettrica e spin nulli. In altre parole stati "*as close to Nothing as anything can be*", come è solito sottolineare Sergey Frolov, postdoc nel gruppo di Delft. L'immediata conseguenza è che campi elettrici o magnetici, non troppo elevati, non risultano avere alcuna

influenza, sull'energia totale di tali eccitazioni, che rimane ancorata attorno allo zero energetico, rendendo alquanto complicata una loro identificazione sperimentale.

La soluzione ideata dal gruppo di Kouwenhoven risulta particolarmente semplice e geniale al contempo. Consiste nel connettere il nanowire tra un normale contatto metallico ed un contatto superconduttivo (Fig.1a). Iniettando elettroni dal contatto metallico nel nanowire fino a raggiungere la porzione con superconduzione indotta, si può così risalire alla presenza o meno delle quasiparticelle ricercate in quanto le previsioni teoriche associano loro una caratteristica riduzione della resistenza del sistema complessivo. Di conseguenza ci si aspetta di osservare un picco stabile e riproducibile nel grafico della conduttanza in condizioni di assenza di differenza di potenziale (cioè nell'intorno del livello di Fermi) al variare di parametri sperimentali quali potenziale elettrochimico, campo magnetico, temperatura. Questo corrisponde esattamente a quanto osservato dal gruppo di Kouwenhoven (Fig.1b) [4].

Sebbene a rigor di logica, questa evidenza sperimentale risulti essere ancora indiretta, la meti-

colosità e completezza dello studio dello spazio dei parametri evidenzia come sia effettivamente necessaria la presenza di ciascuno degli ingredienti suggeriti dalla ricetta di Alicea e Das Sarma (spin-orbita, campo magnetico, superconduzione indotta) affinché lo stato ad energia zero misurato sperimentalmente, ed identificato con un singolo fermione di Majorana, possa esistere. Non resta che un'ultima domanda. Se confermata la loro esistenza, cosa fare di questi fermioni così speciali? Ebbene, la natura topologica di questi stati conferisce loro speciali proprietà di stabilità rispetto a perturbazioni locali rendendoli sistemi hardware ideali per il controllo e l'immagazzinamento di informazione quantistica. Potrebbero quindi aprire la strada ad un'implementazione reale di futuri computer quantistici con hardware topologicamente protetto.



- [1] L. FU, C. L. KANE: "Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator", *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 096407.
- [2] J. D. SAU ET AL.: "Generic New Platform for Topological Quantum Computation Using Semiconductor Heterostructures", *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 040502.
- [3] J. ALICEA: "Majorana fermions in a tunable semiconductor device", *Phys. Rev. B* **81** (2010) 125318.
- [4] V. MOURIK ET AL.: "Signature of Majorana Fermions in Hybrid Superconductor-Semiconductor Nanowire Devices", *Science* **336** (2012) 1003.

Pasquale Scarlino: ha conseguito la laurea magistrale in Fisica presso l'Università del Salento nell'A.A. 2009-2010 con una tesi dal titolo "Radio-Frequency QPC for Spin-QuBits Read-Out" svolta presso il Kavli Institute of NanoScience, Università di Delft dove attualmente svolge il dottorato di ricerca nel gruppo del Prof. Lieven M. K. Vandersypen.

