

---

# Una geometrizzazione dello spazio degli accordi

*Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi.*

————— **Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 -1716)**

**Mattia G. Bergomi**

*IRCAM - UPMC - CNRS - LIM - Università degli Studi di Milano*

**Riccardo D. Jadanza**

*DISMA - Politecnico di Torino*

**Alessandro Portaluri**

*DISAFA- Università degli Studi di Torino*

---

**S**i può trovare un'equazione per descrivere un brano musicale, o addirittura per prevedere se sarà gradevole all'ascolto? Sarebbe possibile modellare una sinfonia con un certo numero di equazioni? La risposta a tutte queste domande è facilmente intuibile da chiunque addetto e non addetto ai lavori ed è invariabilmente un enfatico **"no!"**. Tuttavia si possono riconoscere alcune strutture matematiche insite in tutte le opere musicali, anche se non sono espresse attraverso equazioni. Il nostro viaggio attraverso **"curiose iper-superfici singolari"** inizia proprio da qui. . .

Musica e Matematica sono strettamente legate. Le connessioni tra questi due mondi sono ovunque: le corde di un'arpa vibrano ad una certa frequenza e hanno lunghezze specifiche regolate da rapporti ben precisi, le onde sonore possono essere descritte da equazioni matematiche, la forma della cassa del violoncello è studiata per farlo

risuonare con quel timbro caldo e suadente che ben conosciamo. La Matematica, in fondo, è il linguaggio che i fisici, i chimici e gli ingegneri (tra gli altri) usano per descrivere il mondo reale e in alcuni casi anche per prevedere il futuro a volte lontano! Nel campo della Musica è un valido strumento per cercare di comprendere, se esistono, alcune strutture astratte sottostanti al metalinguaggio e aiutare così la Teoria Musicale nel suo intento di comunicazione e di educazione all'ascolto. Chiunque abbia mai ascoltato il "Klaviersstück" di Stockhausen, infatti, capisce bene che questo non è sempre facile da fare!

La Teoria Musicale ci fornisce categorie concettuali per organizzare e capire la musica, e attraverso di esse le nostre impressioni auditive diventano idee vivaci. I musicologi attingono spesso alla grande potenza della Matematica per la creazione di tali categorie: i numeri interi, ad esempio, sono particolarmente adatti per l'etichettatura delle note o dei tasti del pianoforte, mentre una disciplina matematica che va sotto il nome di Combinatoria permette di contare i molti modi in cui le note possono essere asso-

ciate tra loro. Questo dà luogo a tassonomie e permette di classificare i diversi scenari che si presentano. La Teoria dei Gruppi, poi, altra importante area della Matematica, descrive il modo in cui le note sono legate e come si passa dall'una all'altra.

Un pianista può suonare migliaia di note in un concerto, senza bisogno di leggere lo spartito. Ma come ci riesce? Sicuramente è necessaria una buona dose di memoria, ma esistono anche alcuni trucchi armonici... Matematicamente parlando, è sufficiente riconoscere una semplicissima *foliazione di un orbifold* (Figura 1)! Ma iniziamo da...



Figura 1: *Foliazione di un orbifold?!*

## Una chiacchierata sugli spazi quoziente

Uno *spazio quoziente* si costruisce identificando, cioè "incollando" fra loro, tutti i punti di uno spazio di partenza (detto *spazio genitore*) secondo una ben determinata famiglia di operazioni  $\mathcal{F}$ , che fornisce opportune "regole di attaccamento" che stabiliscono quali punti debbano essere accoppiati con quali altri. Un *dominio fondamentale* per  $\mathcal{F}$  è una regione nello spazio genitore avente le seguenti proprietà:

- ogni punto dello spazio genitore è legato ad ogni punto del dominio fondamentale tramite qualche operazione di  $\mathcal{F}$ ;
- nessuna coppia di punti del dominio fondamentale è legata tramite una qualsivoglia operazione di  $\mathcal{F}$ .

Intuitivamente, un dominio fondamentale può essere pensato come una singola tessera di un mosaico che permette di riprodurre tutto il disegno.

Ad esempio, il primo quadrante chiuso del piano cartesiano (quello delle ascisse e ordinate non negative,  $x, y \geq 0$ ) è il dominio fondamentale per la famiglia di simmetrie definita dalle rotazioni

di  $180^\circ$ . È facile rendersene conto: ogni punto del piano è infatti legato tramite una rotazione di  $180^\circ$  a un punto di questo quadrante (v. Figura 2).

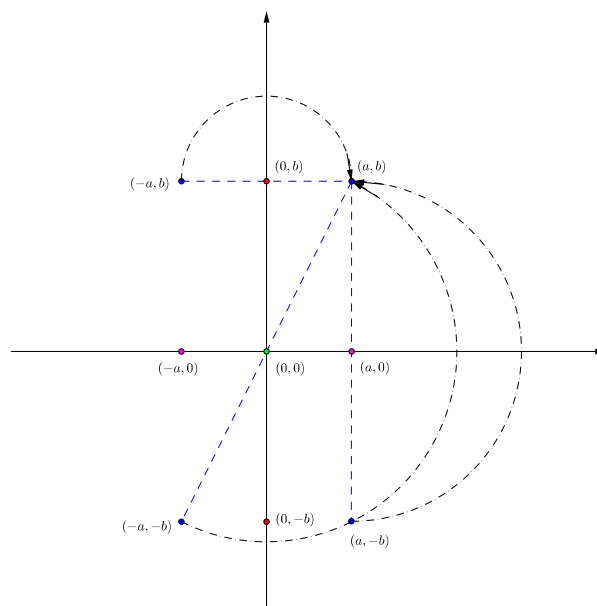


Figura 2: *Regola di incollamento sullo spazio genitore.*

Si osserva facilmente che che il semiasse negativo delle ascisse deve essere incollato al semiasse positivo in modo che  $-1$  coincida con  $1$ ,  $-\pi$  con  $\pi$  e in generale ogni  $-x \in \mathbb{R}^-$  con il suo opposto  $x \in \mathbb{R}^+$ . Il punto  $(0, 0)$  invece si identifica con se stesso (v. Figura 3).

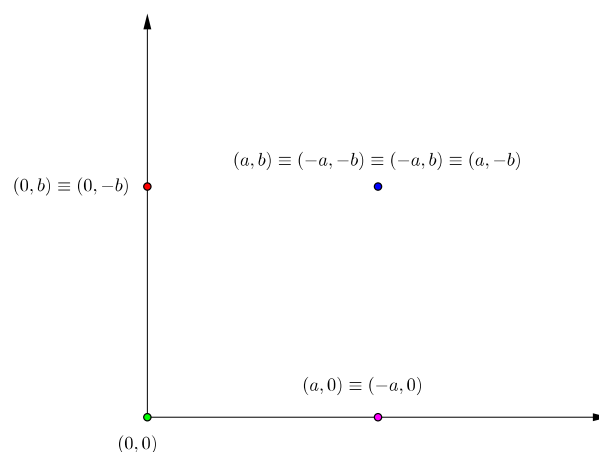


Figura 3: *Spazio quoziente con identificazioni.*

## Note, accordi e orbifolds

Il *temperamento equabile* è il sistema musicale per la costruzione della scala fondato sulla suddivisione dell'ottava in intervalli uguali tra loro. Nell'uso più frequente l'ottava è suddivisa in 12

### Notazione anglosassone

Una notazione utile per indicare le note pure (cioè senza alterazioni) è la seguente:

$$A = \text{La}, \quad B = \text{Si}, \quad C = \text{Do}, \quad D = \text{Re}, \\ E = \text{Mi}, \quad F = \text{Fa}, \quad G = \text{Sol}.$$

Un pedice numerico indica l'ottava a cui la nota appartiene. Ad esempio  $A_4$  è il La sopra al Do centrale e ha una frequenza fondamentale pari a 440 Hz.

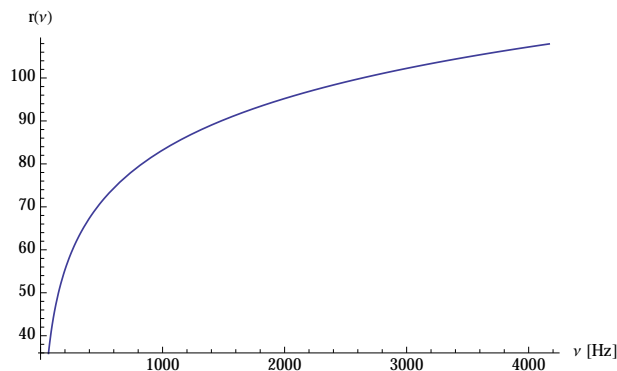


Figura 4: La funzione  $r$  per frequenze comprese tra 65 Hz e 4186 Hz, ovvero da  $C_2$  a  $C_8$ .

parti uguali, i *semitoni*, e un buon modo per modellarla matematicamente è usare l'insieme dei numeri reali, che indicheremo con  $\mathbb{R}$ .

### Dallo spazio lineare delle note...

Un modo di associare ad ogni nota un numero reale è quello di utilizzare il logaritmo in base 2. Se  $\nu$  rappresenta la frequenza fondamentale di una nota, il numero reale ad essa corrispondente è definito come

$$r(\nu) := c_1 + c_2 \log_2 \left( \frac{\nu}{440} \right),$$

dove  $c_1$  rappresenta l'*origine* (ossia il numero corrispondente alla frequenza fondamentale 440 Hz, caratteristica della nota  $A_4$ ) e  $c_2$  è il numero di semitoni in un'ottava. Il vantaggio è che se si vuole calcolare la distanza tra due note  $r$  e  $s$  è sufficiente considerare la quantità

$$|r - s|$$

anziché che il rapporto  $\nu_r/\nu_s$  tra le loro frequenze fondamentali.

In musica classica si pone di regola

$$c_1 := 69, \quad c_2 := 12.$$

In questo modo al Do centrale  $C_4$  corrisponde il numero 60, mentre per la nota  $A_5$  dell'ottava superiore, che ha una frequenza fondamentale di 880 Hz, si ha  $r(880) = 69 + 12 = 81$ .

Osserviamo (Figura 4) che la funzione  $r$  è sempre strettamente crescente all'aumentare di  $\nu$  e assume valori positivi nello spettro delle frequenze udibili dall'orecchio umano (da 20 Hz a

20 000 Hz). Si annulla infatti per un valore della frequenza pari a  $\nu_0 := 2^{-69/12} \cdot 440 \approx 8.18$  Hz.

### ... allo spazio curvo delle classi di note

Nello spazio lineare delle note le ottave non rivestono alcun ruolo privilegiato, perché la distanza di 12 semitoni non ha un significato particolare. Tuttavia noi percepiamo le note che differiscono di un'ottava come aventi la stessa "qualità", lo stesso "colore"! È infatti evidente a chiunque abbia un minimo di esperienza musicale che alcuni intervalli sono "speciali", almeno per quanto riguarda la dissonanza.

Diventa allora del tutto naturale ripartire le note in *classi modulo ottava*: ogni classe è un punto dello spazio quoziente<sup>1</sup>

$$\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/12\mathbb{Z},$$

che non è nient'altro che una *circonferenza*. Dunque, ricapitolando, le note "vivono" su una retta (Figura 5), mentre le *classi di note* "abitano" su una circonferenza e le loro "case" sono i vertici di un dodecagono regolare inscritto (Figura 6).

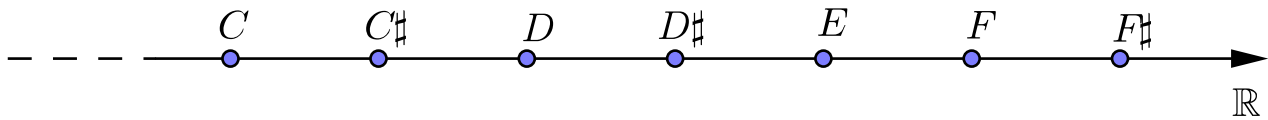
Gli elementi di  $\mathbb{T}^1$  sono *insiemi di numeri reali* della forma

$$\{ r + 12k \mid k \in \mathbb{Z} \},$$

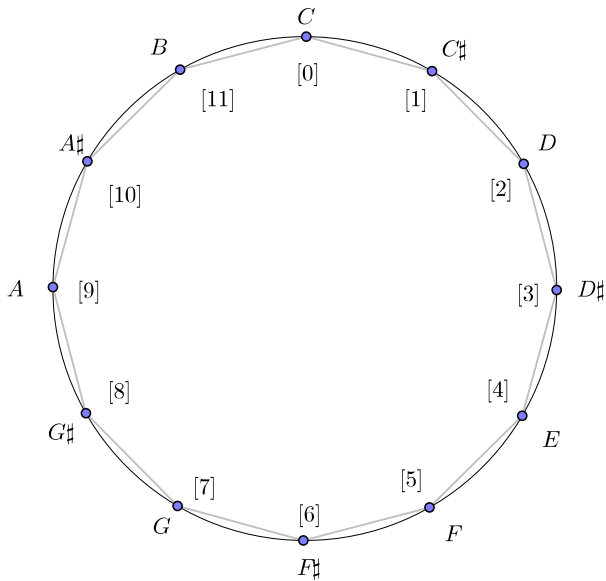
dove  $r$  rappresenta una qualsiasi nota in una data classe di note. Possiamo etichettare questi insiemi utilizzando l'intervallo

$$[0, 12) \subset \mathbb{R},$$

<sup>1</sup>La scrittura  $12\mathbb{Z}$  indica l'insieme dei numeri interi multipli di 12.



**Figura 5:** Rappresentazione grafica delle note sulla retta dei numeri reali.



**Figura 6:** Rappresentazione grafica delle classi di note modulo ottava.

che è il *dominio fondamentale* dell'azione di traslazione del gruppo  $12\mathbb{Z}$  sullo spazio genitore  $\mathbb{R}$ .

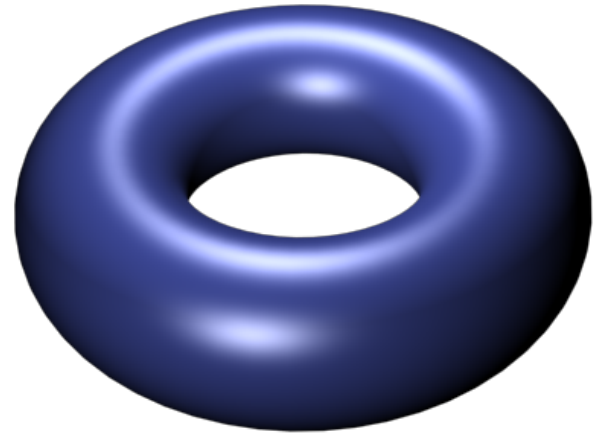
## Diadi

E se considerassimo accordi di due note, detti anche *bicordi* o *diadi*? In questo caso la questione inizia a complicarsi un po'. Ingenuamente si potrebbe pensare che un bicordo sia un punto del *toro* bidimensionale

$$\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2 / (12\mathbb{Z})^2$$

rappresentato in Figura 7, o più precisamente un punto del dodecagono bidimensionale (una sorta di "prodotto" di un dodecagono per se stesso) contenuto nel toro  $\mathbb{T}^2$ . È infatti naturale dedurre che se ogni classe di note è rappresentata da un punto di  $\mathbb{T}^1$ , allora una coppia di note deve essere un punto del prodotto  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 = \mathbb{T}^2$ !

In realtà, un'analisi più attenta suggerisce che si sia trascurato un fatto importante. Infatti, considerando le classi di note modulo ottava, non siamo in grado di stabilire l'*ordine* tra le note che

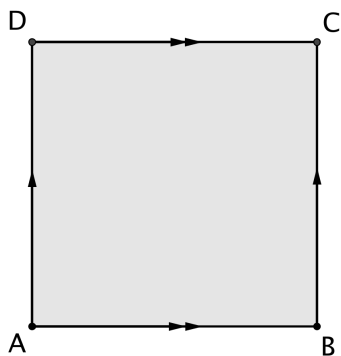


**Figura 7:** Rappresentazione grafica di un toro bidimensionale. (Fonte: <http://it.wikipedia.org>).

compongono ogni intervallo: il bicordo  $(E_4, C_5)$ , ad esempio, è indistinguibile da  $(E_4, C_4)$  perché  $C_4$  e  $C_5$  sono elementi della stessa classe di note  $C$  modulo ottava. Inoltre, musicalmente parlando,  $(E_4, C_4)$  è identico a  $(C_4, E_4)$ : se si eseguono questi accordi su un pianoforte, i tasti che si premono sono il Do centrale e il Mi sopra al Do centrale in entrambi i casi!

Occorre allora "rinunciare all'ordine" e passare dallo spazio delle coppie *ordinate* di classi di note (rappresentato geometricamente dal toro bidimensionale  $\mathbb{T}^2$ ) allo spazio delle coppie *non ordinate*; per farlo si ricorre a una tecnica tipica della Topologia della dimensione bassa nota col nome di *taglia e cucì*.

Un toro si può costruire a partire da un quadrato  $\mathcal{Q} := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  incollandone i lati a due a due opposti con la stessa orientazione (Figura 8): una prima identificazione genera un cilindro; successivamente si attaccano tra loro le due circonferenze di base del cilindro ottenuto (che sono in realtà gli altri due lati del quadrato di partenza) e si ottiene la "ciambella" voluta. Utilizzando questa rappresentazione del toro, identifichiamo le coppie  $(x, y)$  e  $(y, x)$  in  $\mathcal{Q}$ : ciò si effettua ripiegando il quadrato a metà lungo la

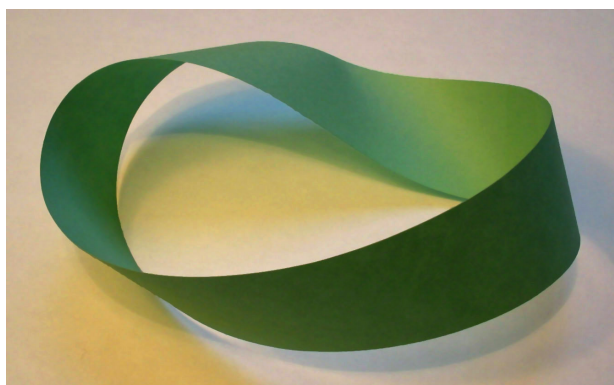


**Figura 8:** Costruzione di un toro attraverso l'identificazione dei lati opposti di un quadrato.

diagonale che giace sulla bisettrice del primo e terzo quadrante nel piano cartesiano e incollandolo. Si ottiene così un triangolo rettangolo. A questo punto bisogna procedere con gli attaccamenti dei lati opposti secondo le direzioni precedentemente fissate: tagliando il triangolo lungo la bisettrice dell'angolo retto e segnando i segmenti divisi dal taglio si formano altri due triangoli rettangoli più piccoli, che hanno le ipotenuse e un cateto identificati a coppie. Incollando fra loro prima le ipotenuse e poi i cateti (secondo le orientazioni fissate) si arriva allo spazio cercato:

il nastro di Möbius.

Il procedimento è riportato in Figura 11, il risultato invece in Figura 9.



**Figura 9:** Geometrizzazione dello spazio delle diadi: il nastro di Möbius. (Fonte: <http://it.wikipedia.org>).

Lo spazio delle diadi corretto è allora lo spazio quoziente

$$\mathbb{X}_2 := \mathbb{T}^2 / \mathcal{S}_2,$$

dove  $\mathcal{S}_2$  denota il gruppo delle simmetrie degli insiemi di due elementi e rappresenta matemati-

camente l'azione di identificazione delle coppie  $(x, y)$  e  $(y, x)$ , rendendo in questo modo l'ordine irrilevante (Figura 10). Questa volta quindi lo spazio che si ottiene ha un'importante differenza rispetto alla circonferenza (oltre alla dimensione, naturalmente, che prima era 1 e adesso è 2): è *non orientabile*, cioè non si può distinguere un "interno" e un "esterno". Se infatti si prova a seguire idealmente con un dito la superficie raffigurata in Figura 9 ci si accorge che esiste una sola faccia!

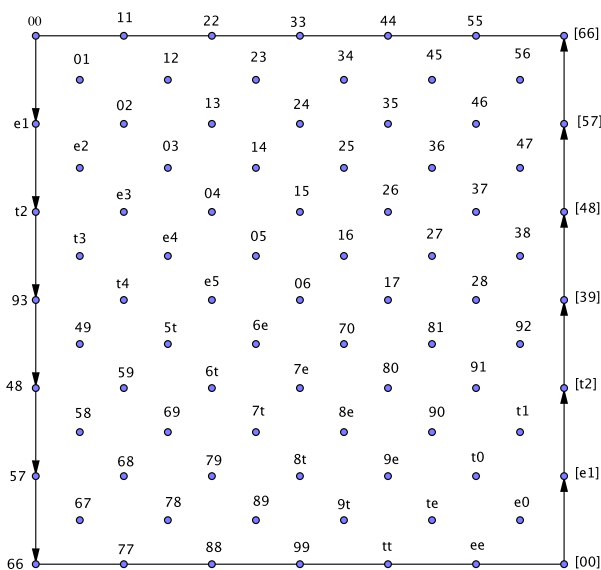
Questo non è certo l'unico modello possibile di spazio quoziente che si può usare per geometrizzare lo spazio degli accordi! Sarebbe infatti del tutto legittimo modellare lo spazio delle classi di note (modulo ottava) nel temperamento equabile con il gruppo ciclico

$$\mathbb{Z}_{12} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},$$

in cui 12 viene identificato con 0, 13 con 1 e così via. Con questa scelta, lo spazio delle diadi sarebbe allora lo spazio quoziente

$$\mathbb{Y}_2 := (\mathbb{Z}_{12})^2 / \mathcal{S}_2$$

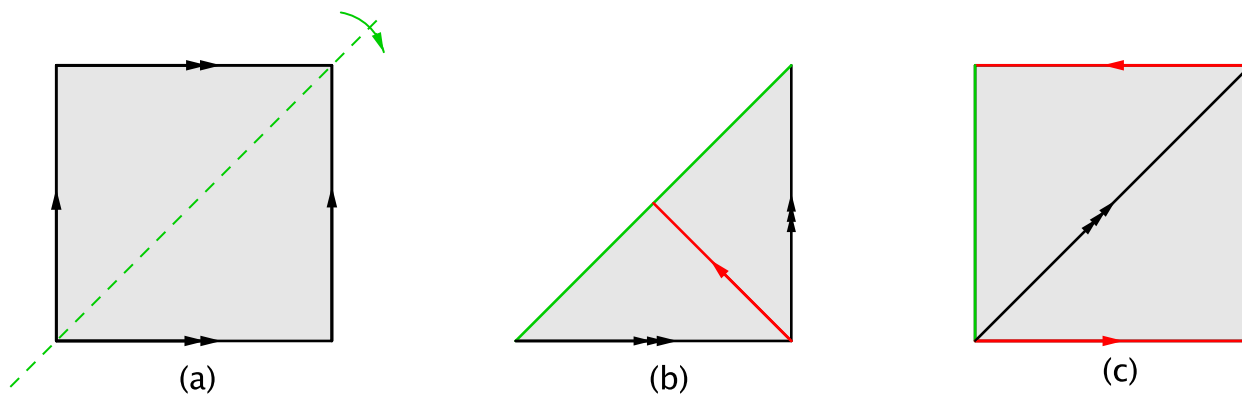
rappresentato in Figura 10.



**Figura 10:** Lo spazio reticolare  $\mathbb{Y}_2$  immerso in  $\mathbb{X}_2$ . I numeri che etichettano ogni punto sono degli intervalli, le cifre (e lettere) che li compongono corrispondono alle note della rappresentazione circolare di Figura 6, dove  $10 = t$  e  $11 = e$ .

Consideriamo ora le diadi

$$\{D, E\}, \quad \{D\#, E\}$$



**Figura 11:** I tre passi necessari per realizzare lo spazio delle diadi  $\mathbb{X}_2$ : (a) piegare e incollare il quadrato lungo la diagonale, (b) tagliare il triangolo ottenuto lungo la bisettrice dell'angolo retto, (c) incollare prima le ipotenuse nel giusto verso e poi identificare gli altri due cateti (in rosso) seguendo l'orientazione fissata. Il bordo del nastro di Möbius è rappresentato dai segmenti verdi durante tutto il procedimento.

(le parentesi graffe stanno a significare che stiamo prendendo punti dello spazio  $\mathbb{X}_2$ , rappresentati da coppie *non ordinate*) e le due progressioni

$$p_1 : (D, E) \mapsto (D\sharp, E), \quad p_2 : (D, E) \mapsto (E, D\sharp),$$

completamente diverse tra loro dal punto di vista armonico. In  $\mathbb{X}_2$  queste ultime sono rappresentate da due cammini distinti:

- $p_1$  si muove direttamente da  $\{D, E\}$  a  $\{D\sharp, E\}$ ;
- $p_2$  si inizia in  $\{D, E\}$  e termina in  $\{D\sharp, E\}$  ma segue un percorso diverso: “rimbalza” sul bordo del quadrato (nello spazio genitore), ovvero compie un giro sul nastro di Möbius.

Se considerassimo lo spazio discreto  $\mathbb{Y}_2$  queste due progressioni risulterebbero “invisibili” (v. Figura 12 più avanti, a pagina 39): nello spazio discreto infatti non esistono segmenti veri e propri, ma solo un reticolo di punti!

Inoltre osserviamo che nella definizione di  $\mathbb{X}_2$  e di  $\mathbb{Y}_2$  non abbiamo escluso gli elementi del tipo  $\{C, C\}$ , che sono diadi fittizie: se, di nuovo, provassimo a suonarle su un pianoforte premeremo solamente un tasto! Questa “degenerazione” è in realtà molto utile per la ragione seguente: se considerassimo il nastro di Möbius non compatto (cioè “senza bordo”, ottenibile facilmente dalla costruzione di Figura 11 rimuovendo i due lati verticali dal quadrato (c)), che rappresenta lo spazio delle diadi con due classi di note distinte,

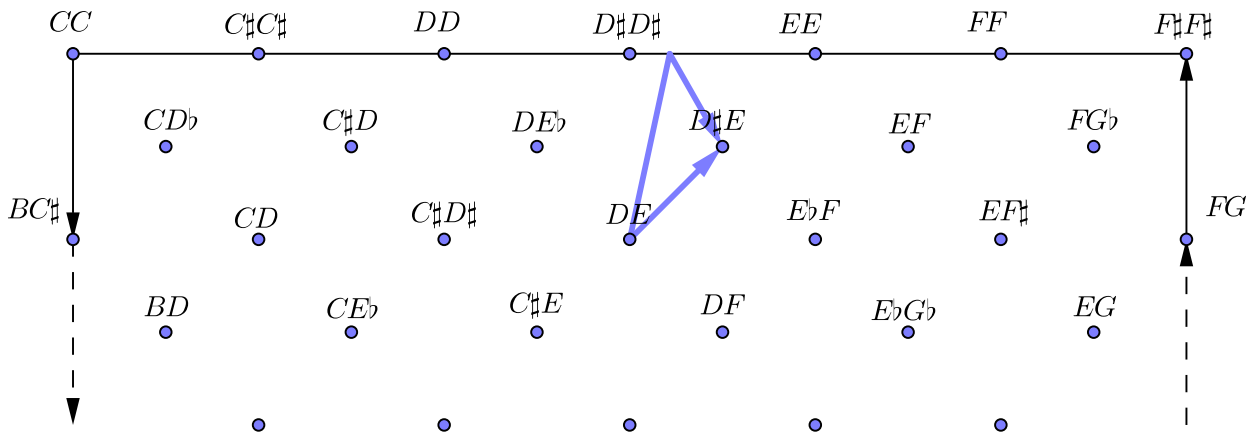
non avremmo alcun bordo su cui “rimbalzare” per poter distinguere due progressioni diverse! Questo fatto fornisce una motivazione in più per preferire il modello continuo a quello discreto: il cammino (geodetico) interseca il bordo singolare in un punto a coordinate non intere! Quindi, anche se anche riuscissimo a definire in  $\mathbb{Y}_2$  la nozione analoga di “segmento”, sarebbe a dir poco scomodo modellare questo cammino.

Negli ultimi decenni i musicologi e gli studiosi di teoria musicale hanno introdotto vari spazi quoziente, utili a definire in maniera appropriata lo spazio degli accordi, tenendo conto della necessità di descrivere al meglio la condotta delle parti. Tra le rappresentazioni più rilevanti in questa direzione ricordiamo la teoria degli accordi di Allen Forte descritta in [8].

### Triadi, quadriadi e orbifolds

Ovviamente quanto costruito finora è del tutto insufficiente in Musica! In Armonia si parla infatti di *triadi* e *quadriadi*, ovvero accordi costituiti da tre o quattro note rispettivamente, ciascuna delle quali è assegnata a una specifica voce o parte. Ovviamente esistono e si usano accordi composti anche da un numero maggiore di note! Eccezion fatta per una certa difficoltà d’immaginazione (e di rappresentazione grafica!), il modello di spazio degli accordi rimane però, *mutatis mutandis*, quello che abbiamo presentato per le diadi!

Nel paragrafo sugli spazi quoziente abbiamo introdotto la nozione di dominio fondamentale e di famiglia  $\mathcal{F}$  di operazioni (o simmetrie). Quali



**Figura 12:** Sostituendo i numeri di Figura 10 con i nomi delle note, è facile vedere come  $\mathbb{X}_2$  sia adatto a rappresentare le condotte delle parti: le frecce infatti rappresentano i due diversi percorsi  $p_1$  e  $p_2$  utilizzati per muoversi dall'intervallo  $(D, E)$  a  $(D\#, E)$ .

sono le simmetrie in questo caso, e quali i loro domini fondamentali?

Procedendo per ordine, iniziamo dallo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  dotato del sistema di coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$ . Per fissare le idee si può prendere  $n = 3$  e immaginare lo spazio tridimensionale a cui siamo abituati, con  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ . Un punto di  $\mathbb{R}^n$  può dunque descrivere, dopo un'opportuna sequenza di identificazioni, un accordo di  $n$  note. Le operazioni di cui abbiamo bisogno sono analoghe a quelle descritte in precedenza e sono presentate nel seguito.

- 1) Consideriamo dapprima il passaggio  $\mathcal{O}$  dalla singola nota alla classe corrispondente modulo ottava. L'azione di  $\mathcal{O} := (12\mathbb{Z})^n$  su  $\mathbb{R}^n$  produce lo spazio quoziente

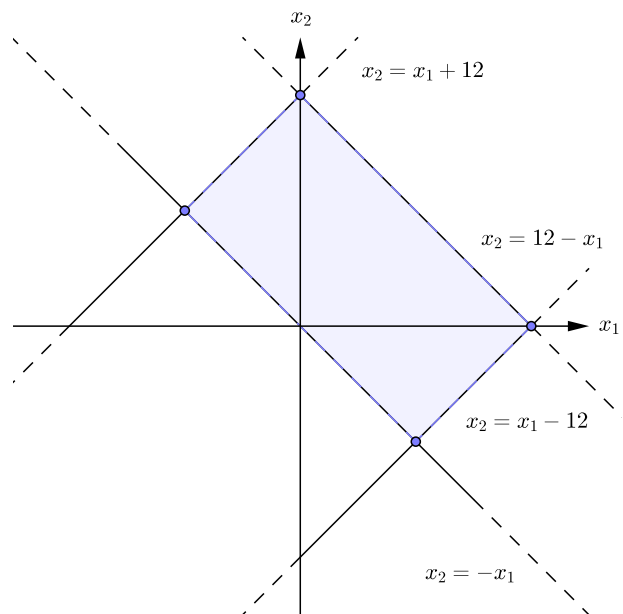
$$\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / (12\mathbb{Z})^n,$$

detto  $n$ -toro. Come dominio fondamentale  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  sarebbe naturale scegliere  $[0, 12)^n$ , tuttavia si preferisce utilizzarne un altro, matematicamente inusuale ma che ha una notevole importanza in Musica: l'insieme di tutti i punti di  $\mathbb{R}^n$  che verificano le seguenti due condizioni:

- i)  $\max\{x_1, \dots, x_n\} \leq \min\{x_1, \dots, x_n\} + 12;$
- ii)  $0 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq 12.$

Il primo vincolo assicura che tutte le note dell'accordo siano comprese in un'ottava, men-

tre il secondo determina la posizione globale dell'accordo nello spazio genitore.



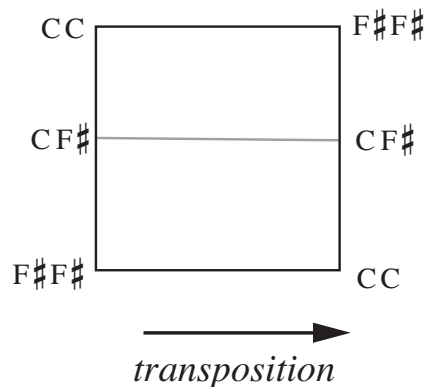
**Figura 13:** Rappresentazione del dominio fondamentale  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  per  $n = 2$ .

Intuitivamente  $\mathcal{D}(\mathcal{O})$  è un prisma le cui facce opposte vengono identificate con la stessa orientazione. La base del prisma è la proiezione (cioè l'"ombra") di un ipercubo  $n$ -dimensionale sul piano  $(n - 1)$ -dimensionale che contiene i punti la cui somma delle coordinate è uguale a 0. Nel caso  $n = 2$  il dominio fondamentale si riduce al rettangolo

delimitato dalle quattro rette di equazione

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 0, & & x_1 - x_2 = 12, \\ x_1 + x_2 = 12, & & x_1 - x_2 = -12; \end{aligned}$$

in questo caso la base è un segmento (Figura 13). In dimensione 3 il prisma è a base esagonale, mentre in dimensione 4 la base è un rombododecaedro (o dodecaedro rombico). L'utilità di questo dominio fondamentale risiede nel fatto che la direzione dell'altezza del suddetto prisma coincide con la direzione della *trasposizione* (questa è rappresentata infatti da una traslazione individuata da un vettore con tutte le componenti uguali).



**Figura 14:** Lo spazio delle diadi  $\mathbb{X}_2$  come spazio quoziente. Prima di identificare i due lati verticali è necessario fare combaciare le etichette poste sui vertici. L'intervallo di quarta eccedente, che divide l'ottava in due parti identiche, è al centro dello spazio. Questa figura è contenuta in [2].

- 2) La seconda operazione di cui abbiamo bisogno è il passaggio  $\mathcal{P}$  dagli insiemi ordinati di classi di note (che rappresentano gli accordi) agli stessi insiemi "non ordinati", ossia vogliamo "dimenticare" l'ordine delle  $n$ -uple.<sup>2</sup> In termini matematici consideriamo l'azione del gruppo  $\mathcal{S}_n$  delle permutazioni su un insieme di  $n$  elementi. Il dominio fondamentale  $\mathcal{D}(\mathcal{P})$  è definito da tutti i punti di  $\mathbb{R}^n$  le cui coordinate soddisfano la condizione

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Componendo le precedenti due operazioni otteniamo l'azione  $\mathcal{OP}$ , il cui dominio fondamentale è un prisma che ha come base un simpleso<sup>3</sup>  $(n-1)$ -dimensionale. Lo spazio quoziente risultante è

$$\mathbb{T}^n / \mathcal{S}_n,$$

ottenuto a partire dal dominio fondamentale identificando i punti della base con quelli della faccia opposta. Ma come si effettua l'incollamento? Definiamo la funzione  $\mathbb{O}$  che associa al punto di coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  il punto

$$\left( x_2 - \frac{12}{n}, x_3 - \frac{12}{n}, \dots, x_n - \frac{12}{n}, x_1 + 12 - \frac{12}{n} \right).$$

<sup>2</sup>Una  $n$ -upla è una sequenza ordinata di  $n$  oggetti. Con la notazione precedente  $(x_1, \dots, x_n)$  è una  $n$ -upla di note.

<sup>3</sup>Un *simpleso* è la generalizzazione del concetto di triangolo in più dimensioni. Per esempio, un simpleso tridimensionale è un tetraedro.

È facile vedere che  $\mathbb{O}$  è un *automorfismo* (ossia una funzione biiettiva da un certo spazio in se stesso) che permuta ciclicamente i vertici di ciascun simpleso ottenuto sezionando il prisma con il piano  $\sum_{i=1}^n x_i = c$ , al variare di  $c$  in  $\mathbb{R}$ . Applicando ripetutamente questa mappa a un certo accordo  $J$  otteniamo gli accordi  $\mathbb{O}(J), \mathbb{O}^2(J), \dots, \mathbb{O}^{n-1}(J)$ , tutti legati tra di loro da una *trasposizione* e con le classi di note che hanno somma costante. Nello spazio euclideo  $\mathbb{O}$  rappresenta una rotazione quando il prisma ha dimensione dispari, mentre è una composizione di una rotazione e una riflessione se la dimensione è pari.

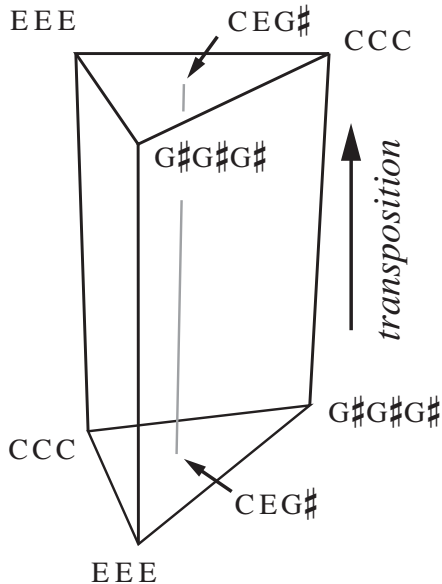
- 3) Poiché l'insieme dei vertici del simpleso che hanno somma costante  $c$  è *invariante* per l'azione della mappa  $\mathbb{O}$  (nel senso che i vertici vengono mandati l'uno nell'altro, non al di fuori del simpleso), questa induce una *partizione* dell'insieme dei vertici in *classi di equivalenza*. È quindi naturale introdurre una nuova azione

$$\mathcal{T} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i.$$

Per quanto appena detto, questa mappa è ben definita. Il suo dominio fondamentale  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$  è rappresentato dai punti di  $\mathbb{R}^n$  tali che

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0,$$





**Figura 15:** Lo spazio delle triadi  $\mathbb{X}_3$  come spazio quoziente. Prima di incollare le facce del prisma è necessario ruotarne una di  $120^\circ$ , in modo che gli unisoni sui vertici coincidano. Al centro dello spazio troviamo le triadi aumentate. Questa figura è contenuta in [2].

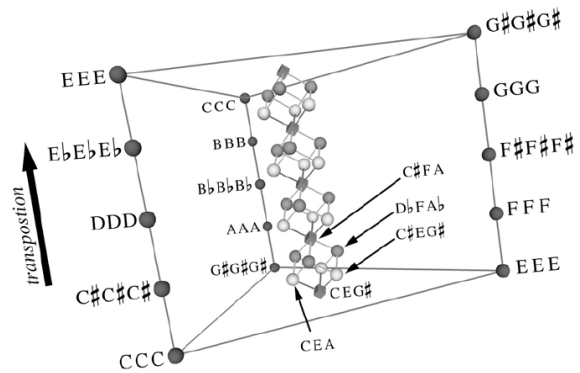
cioè la faccia del prisma corrispondente alla base. Lo spazio quoziente è isomorfo (come spazio vettoriale) a  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Considerando la composizione  $OPT$  delle operazioni finora definite, lo spazio quoziente risultante è

$$\mathbb{T}^{n-1}/\mathcal{S}_n,$$

ossia la proiezione ortogonale dello spazio quoziente  $\mathbb{T}^n/\mathcal{S}_n$  lungo la direzione della trasposizione: si tratta di un simpleso  $(n-1)$ -dimensionale modulo "twist". Questo spazio può essere visualizzato anche come un cono che si appoggia sul quoziente di una sfera  $(n-2)$ -dimensionale. Infatti un simpleso è omeomorfo ad una palla piena (ossia può essere deformato con continuità in una sfera, per vederlo basta "gonfiarlo") e quindi ad un cono sopra la sfera che racchiude la palla. Quando  $n$  è un numero primo il gruppo generato dalla permutazione ciclica non ha punti fissi e lo spazio quoziente risultante  $\mathbb{T}^{n-1}/\mathcal{S}_n$  è uno spazio lenticolare.

Una delle proprietà matematiche più interessanti legate alla trasposizione è che questa induce una foliazione (cioè una stratificazione) dello spazio degli accordi  $\mathbb{T}^n/\mathcal{S}_n$ , in cui i



**Figura 16:** Lo spazio delle triadi  $\mathbb{X}_3$ . In questa raffigurazione si mostra come i diversi generi di triadi occupino diverse posizioni nello spazio. Le triadi aumentate al centro sono rappresentate da cubi, le triadi minori da sfere chiare e quelle maggiori da sfere scure.

fogli, o gli strati, corrispondono ai sottospazi  $\mathbb{T}^{n-1}/\mathcal{S}_n$  che identificano lo stesso tipo di accordo (nel senso della trasposizione).

In conclusione, quindi, nel caso speciale delle triadi e delle quadriadi gli spazi corrispondenti risultano essere rispettivamente i seguenti:

$$\mathbb{X}_3 := \mathbb{T}^3/\mathcal{S}_3 \quad \text{e} \quad \mathbb{X}_4 := \mathbb{T}^4/\mathcal{S}_4.$$

Se invece si considerano accordi di  $n$  note in generale avremo

$$\mathbb{X}_n := \mathbb{T}^n/\mathcal{S}_n.$$

Osserviamo che per ogni  $n \geq 2$  si ha  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(12\mathbb{Z})^n$ , e quindi lo spazio quoziente  $\mathbb{T}^n/\mathcal{S}_n$  corrisponde allo spazio delle orbite dell'azione del gruppo non abeliano  $(12\mathbb{Z})^n \rtimes \mathcal{S}_n$  sullo spazio euclideo  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}^n$ .

Per  $n = 1, 2, 3$  lo spazio  $\mathbb{X}_n$  è una varietà differenziabile, mentre se  $n \geq 3$  è qualcosa di più generale:

un orbifold.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Ecco l'origine del termine orbifold: "Poco prima dell'inizio del suo corso, nel 1976, Bill Thurston volle introdurre un termine che sostituisse la  $V$ -manifold di Satake. La sua prima scelta cadde su manifolded, al fine di distinguerla da manifold (varietà differenziabile). Tuttavia nella comunicazione orale si creavano diversi problemi in quanto risultava difficile distinguere le due parole. L'idea successiva fu quella di foldimani, ma molti matematici si dimostrarono ben poco entusiasti di questa scelta. A un certo punto Bill decise di indire un'elezio-

### Tabella riassuntiva: simmetrie, spazi e domini fondamentali

Simmetria	Spazio	Dominio fondamentale
$\mathcal{O}$	$\mathbb{T}^n$	$\max\{x_1, \dots, x_n\} \leq \min\{x_1, \dots, x_n\} + 12,$ $0 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq 12$
$\mathcal{P}$	$\mathbb{R}^n / \mathcal{S}_n$	$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$
$\mathcal{T}$	$\mathbb{R}^{n-1}$	$\sum_{i=1}^n x_i = 0$
$\mathcal{OP}$	$\mathbb{T}^n / \mathcal{S}_n$	$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n,$ $0 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq 12$
$\mathcal{OT}$	$\mathbb{T}^{n-1}$	$\min\{x_1, \dots, x_n\} = x_1,$ $\max\{x_1, \dots, x_n\} \leq x_1 + 12,$ $\sum_{i=1}^n x_i = 0$
$\mathcal{PT}$	$\mathbb{R}^{n-1} / \mathcal{S}_n$	$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n,$ $\sum_{i=1}^n x_i = 0$
$\mathcal{OPT}$	$\mathbb{T}^{n-1} / \mathcal{S}_n$	$x_n \leq x_1 + 12,$ $\sum_{i=1}^n x_i = 0,$ $x_1 + 12 - x_n \leq x_{i+1} - x_i \quad \forall 1 \leq i < n$

### Gli orbifold in Musica

Gli spazi che abbiamo costruito nelle sezioni precedenti rappresentano un ottimo ambiente per l'analisi del *voice leading*, o *condotta delle parti* (cfr. [1], [3], [5]), cioè della maniera in cui un compositore passa da un accordo all'altro in un dato brano. Un primo esempio, già discusso in precedenza dal punto di vista matematico, di come sia possibile visualizzare questo processo sugli orbifold è riportato in Figura 12. Le frecce indicano due possibili percorsi per muoversi dall'in-

ne "democratica" fra una rosa di parole proposte da alcuni matematici. Tra gli altri, Chuck Giffen suggerì il nome di *origami*, Dennis Sullivan quello di *spatial dollop* (grumo spaziale) e Bill Browder quello di *orbifold*. Dopo un discreto numero di tornate elettorali, in cui si erano eliminate tutte le proposte che avevano totalizzato il più basso numero di voti, ne erano sopravvissute solo quattro: *origami*, *orbifold*, *foldimani* e *V-manifold*. Sfortunatamente anche *orbifold* fu in seguito eliminata. Michael W. Davies prese allora la parola e fece un discorso appassionato, convincendo l'uditorio che gli altri due nomi rimasti erano troppo ridicoli. La parola *orbifold* rientrò quindi in lista e con la votazione successiva si aggiudicò la vittoria." (Cfr. [4, pagg. 5-6]).

tervallo  $\{D, E\}$  a  $\{D\sharp, E\}$ . Percorrere la freccia che non rimbalza sul bordo significa rappresentare la progressione  $(D, E) \mapsto (D\sharp, E)$ , mentre muoversi tra i due punti del nastro di Möbius rimbalzando sul bordo singolare implica che la progressione seguita sia  $(D, E) \mapsto (E, D\sharp)$ .



**Figura 17:** Due *voice leading* musicalmente diversi:  $(D, E) \mapsto (D\sharp, E)$  e  $(D, E) \mapsto (E, D\sharp)$ .

A livello musicale la differenza tra i due percorsi è evidente: quello che non tocca il bordo singolare dello spazio corrisponde a una condotta delle parti dove queste non si scambiano, mentre il secondo caso prevede un incrocio di voci, che chiamiamo *crossed voice leading* (Figura 17). Dunque gli orbifold che abbiamo definito sono effettivamente in grado di distinguere tra queste due scelte. Sebbene creare *voice leading* in cui le voci si incrociano non sia vietato, è certo

sconsigliabile in Musica! Da qui la scelta naturale di “pesare” in maniera differente le due scelte: anche chi non è esperto di Musica riconoscerà che una condotta delle parti dove non vi siano intersezioni risulti più gradevole ed “efficiente” di una che invece presenta degli scambi. Si immagina un brano dove improvvisamente il contralto inizi a cantare la linea melodica del soprano e viceversa: è una scelta possibile, ma sicuramente più ardita e meno immediata del suo *alter ego* libero da intersezioni! Si veda [1] per maggiori dettagli.

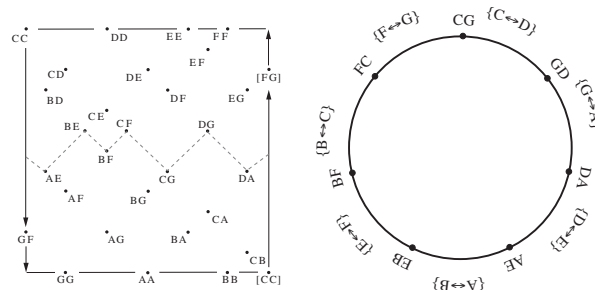
L’applicazione di queste rappresentazioni non si limita all’analisi di brani già composti, ma è molto utile anche alla vera e propria speculazione teorica. In Composizione, utilizzare *voice leading* passando in maniera efficiente da un accordo all’altro significa che le note seguono linee melodiche individuali, in modo tale che nessuna voce si sposti esageratamente in seguito ad un cambio armonico (cfr. [6]).

È naturale chiedersi quali siano i *voice leading* più efficienti possibili e cercare di rappresentarli negli spazi che abbiamo definito. In Figura 18 sono rappresentati i *voice leading* di massima efficienza tra quinte diatoniche in *C* maggiore:  $(C, G) \mapsto (G, D) \mapsto (D, A) \mapsto \dots$ . Le condotte delle parti che massimizzano l’efficienza nel passaggio tra un intervallo e l’altro sono un percorso che passa attraverso il centro del nastro di Möbius. Gli accordi (in questo caso intervalli) non sono legati non in base a una distanza data da proprietà acustiche o altri criteri di tipo fisico, seguono bensì ragioni contrappuntistiche:  $\{C, G\}$  è “vicino” a  $\{G, D\}$  nella circonferenza di Figura 18, perché per passare da una diade all’altra è sufficiente muovere *C* di un passo diatonico.

Il percorso formato dai *voice leading* di massima efficienza nello spazio delle triadi è rappresentato invece nella Figura 19. Anche in questo caso il percorso occupa interamente il centro dell’*orbifold*. La circonferenza permette di vedere come i *voice leading* siano pensati muovendo diatonicamente una sola nota alla volta: si passa ad esempio da *C* maggiore ad *A* minore (*a* nella notazione della figura) nel modo seguente:

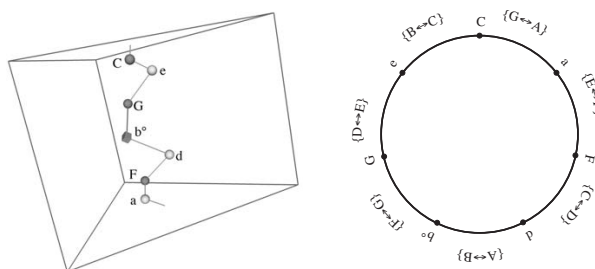
$$\{C, E, G\} \mapsto \{C, E, A\}$$

ossia trasformando il *G* contenuto in *C* maggiore



**Figura 18:** *Voice leading* per quinte diatoniche nello spazio  $\mathbb{X}_2$ . Lo “zig-zag” è irregolare perché lo spazio è costruito utilizzando come unità il semitono; sarebbe regolare se avessimo usato il passo diatonico, cioè le note della scala maggiore.

in *A*. Le triadi “vicine” distano due passi diatonici (per passare da *C* a *A* è necessario muoversi di due note sulla scala di *C* maggiore).



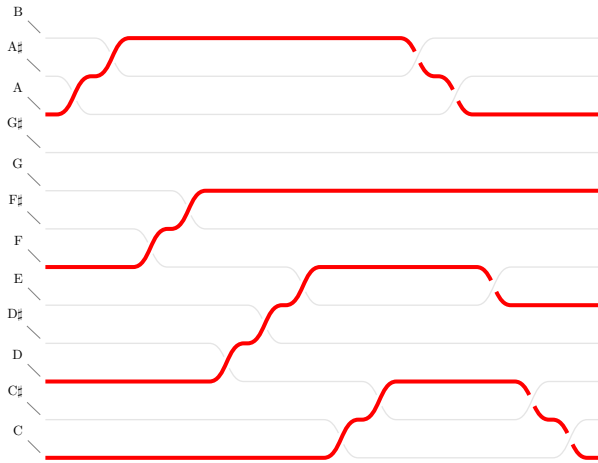
**Figura 19:** *Voice leading* per quinte efficienti nello spazio  $\mathbb{X}_3$ .

## Conclusioni e sviluppi futuri

Abbiamo spiegato come gli *orbifold* siano un modello efficiente per la descrizione degli accordi e al contempo come diverse traiettorie in questi spazi descrivano scelte differenti a livello contrappuntistico, permettendo la convivenza tra l’analisi verticale (accordi) e orizzontale (melodia) delle parti.

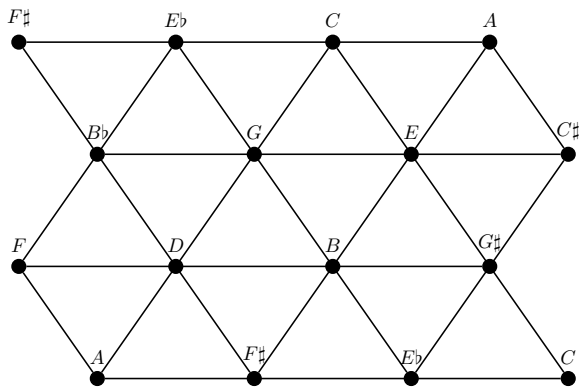
Queste geometrizzazioni nascono dall’esigenza di classificare e misurare i *voice leading*, ma è ovviamente possibile considerare altri modelli: un’altra rappresentazione della condotta delle parti è realizzabile attraverso le *treccie*, come la cadenza perfetta in Figura 20. In questo caso l’obiettivo non è quello di misurare la distanza tra *voice leading* di tipo differente, ma piuttosto quello di cercare degli invarianti topologici che permettano di calcolare un indice di complessità

per una quadriade fissata (cfr. [7] per maggiori dettagli).



**Figura 20:** Una rappresentazione della cadenza perfetta  $D_7 \mapsto G_7 \mapsto C_7$  come proiezione bidimensionale di una treccia.

In tutt'altra direzione vanno modelli discreti come il *tonnetz*, che ha il vantaggio di generare l'intero spazio delle note su un toro, il cui rivestimento universale è un rettangolo dove le triadi minori e maggiori sono rappresentate da triangoli equilateri (Figura 21).



**Figura 21:** Il tonnetz di Oettingen-Riemann.

Dunque gli orbifold, per quanto siano oggetti estremamente astratti e complessi per dimensioni più grandi di 2, modellano in maniera del tutto naturale lo spazio degli accordi e permettono di distinguere tra *voice leading* differenti.

Lo svantaggio di questo tipo di rappresentazioni è che non esistono direzioni preferenziali: il temperamento equabile obbliga le note ad avere la stessa "massa", cioè non è possibile distinguere a priori un  $C$  e un  $C\sharp$ , data la natura simbolica di questo tipo di analisi.

Un possibile sviluppo potrebbe essere quello di realizzare un modello che, rinunciando ad alcune identificazioni, permetta di descrivere lo spazio delle note e degli accordi come una struttura in cui ogni oggetto musicale sia pesato e conseguentemente generi direzioni preferenziali. In questo modo sarebbe possibile studiare alcune caratteristiche qualitative indotte dall'anisotropia. Chiaramente un modello di questo tipo sarà necessariamente in dimensione bassa, al fine di garantire una rappresentazione comprensibile. Proprio questa è la direzione in cui ci si è mossi rappresentando successioni armoniche attraverso le trecce, che permettono di operare in sole 2 o 3 dimensioni, a prescindere dal numero di note degli accordi che le compongono.



- [1] CLIFTON CALLENDER, IAN QUINN, DMITRI TYMOCZKO: "Generalized Voice-Leading Spaces", *Science* **320** (2008) 346–348.
- [2] DMITRI TYMOCZKO: "The geometry of musical chords", *Science* **313** (2006) 72–74.
- [3] DMITRI TYMOCZKO: *A geometry of music. Harmony and counterpoint in the extended common practice*, Oxford Studies in Music Theory. Oxford University Press, Oxford (2011).
- [4] MICHAEL W. DAVIS: *Lectures on orbifolds and reflection groups*, Transformation groups and moduli spaces of curves (2011). 63–93. Adv. Lect. Math. (ALM), 16. Int. Press, Somerville, MA.
- [5] PISTON WALTER, MARK DeVOTO, ARTHUR JANNERY: *Harmony*, London (Gollancz). 1978.
- [6] DMITRI TYMOCZKO: "Scale theory, serial theory and voice leading", *Music Analysis* **27.1** (2008) 1–49.
- [7] MATTIA G. BERGOMI, ALESSANDRO PORTALURI: *Modes in modern music from a topological viewpoint*, arXiv preprint: 1309.0687 (2013).
- [8] ERIC REGENER: *On Allen Forte's theory of chords*, Perspectives of New Music (1974). 191–212.



**Mattia G. Bergomi:** Ha conseguito la Laurea Magistrale in Matematica nel 2011 presso l'Università di Milano-Bicocca. Attualmente è dottorando presso l'Università degli Studi di Milano (Informatica) e l'Université Pierre et Marie Curie (Informatica con menzione di specialità in Matematica), sotto la guida di Goffredo Haus e

Moreno Andreatta rispettivamente. I suoi interessi di ricerca consistono principalmente nella creazione di modelli matematici dinamici per l'analisi musicale, utilizzando strumenti tipici della topologia algebrica e dalla topologia algebrica computazionale. Nel contempo si occupa dello studio di alcuni aspetti cognitivi, legati alla percezione della sovrapposizione di stimoli audio e video.

**Riccardo D. Jadanza:** Ha conseguito la Laurea in Ingegneria Energetica (2007) presso il Politecnico di Torino, la Laurea in Matematica (2009) e la Laurea Magistrale in Matematica (2011) presso l'Università degli Studi di Torino. Attualmente è dottorando in Matematica per le Scienze dell'Ingegneria presso il Politecnico di Torino, sotto la supervisione di Susanna Terracini, Alessandro Portaluri e Vivina Barutello. Sta svolgendo attività di ricerca sul tema della stabilità lineare di una classe particolare di orbite periodiche in sistemi dinamici singolari tipo  $n$  corpi, utilizzando tecniche di analisi lineare e non lineare, geometria simplettica e invarianti topologici quali il flusso spettrale e l'indice di Maslov.

**Alessandro Portaluri:** Ha conseguito la laurea in Matematica nel 1999 presso l'Università di Pisa e il Dottorato in Matematica ed Applicazioni presso l'Università di Genova nel Consorzio Università di Genova-Politecnico di Torino. Dal 2008 al 2012 ha ricoperto la posizione di ricercatore in Analisi Matematica presso l'Università del Salento e dal 2012 ad oggi presso l'Università degli Studi di Torino. I principali interessi di ricerca sono legati alla relazione tra le proprietà geometriche dello spazio delle soluzioni di alcune equazioni differenziali lineari alle derivate ordinarie e parziali e le proprietà spettrali di questi operatori differenziali; ai teoremi indice di tipo Morse-Sturm-Liouville e Atiyah-Singer, all'analisi globale ed in particolare all'omologia di Floer ed infine allo studio di invarianti simplettici di tipo Maslov. Recentemente si è occupato dello studio di sistemi dinamici singolari di molte particelle sviluppando delle tecniche di de-singularizzazione alla McGehee e introducendo delle teorie indice nello studio della stabilità lineare di alcune particolari soluzioni periodiche.

