Il problema isoperimetrico

Alessio Figalli *Department of Mathematics and Institute for Computational Engineering and Sciences*
The University of Texas at Austin

Un riferimento al "problema isoperimetrico", anche detto delle "disuguaglianze isoperimetriche", si trova già nella mitologia. Didone, regina di Tiro, costretta all'esilio dal fratello Pigmalione, si rifugiò in Nord Africa, nelle terre di Iarba, re dei Getuli, cui chiese non solo asilo ma anche della terra per costruire una nuova città: la futura Cartagine. Iarba, re ospitale ma piuttosto geloso dei suoi possedimenti, concesse alla regina tutta la terra che ella fosse riuscita a ricoprire con una pelle di bue. Didone non si perse affatto d'animo: presa una pelle di bue, iniziò a tagliarla a striscioline sottili, le legò tra di loro e costruì una lunga corda. Ora la questione è: quale forma dare a questa corda per racchiudere la maggior superficie possibile?

Questo è un bel problema matematico, un problema di "isoperimetria", e consiste nel trovare la figura geometrica che, a parità di perimetro, ha la massima area. È dunque un tipico problema di "calcolo della variazioni", ovvero di ricerca di minimo o di massimo.

La soluzione di questi problemi dipende dalle condizioni al contorno: ad esempio, se ci si trova nell'entroterra allora la forma migliore è un cerchio, mentre, se come nel caso di Didone la terra si affaccia sul mare, è molto meglio scegliere un semicerchio.

Il problema di Didone può essere letto in due modi. Infatti, si può scegliere se fissare la lunghezza della corda e chiedersi quale sia l'area massima che si vuole racchiudere dentro la figura, oppure se fissare l'area e cercare la lunghezza minima della corda che la racchiude. In questa seconda formulazione esso è un classico problema di "ricerca del minimo".

Lo stesso problema ha senso in dimensione più alta: per esempio, nello spazio tridimensionale, fissato un volume qual è la forma ottimale per contenerlo usando una superficie la cui area sia la più piccola possibile? Le bolle di sapone forniscono la risposta, esse disegnano delle sfere.

Da un punto di vista matematico, formulare questi problemi è non banale. Infatti ci sono molti punti delicati che bisogna affrontare. Innanzitutto, come si misurano il volume di un insieme e il suo perimetro (ossia l'area del suo bordo)? Inoltre, quando si parla di ricerca di un minimo, bisogna definire una classe di elementi all'interno della quale si ricerca tale mimimo.

Nel nostro caso, per insiemi regolari è facile definire volume e perimetro, ma il problema è il seguente: se cerchiamo un minimo in una classe troppo ristretta, allora è molto difficile dimostrare che tale minimo esista. Fa quindi parte della teoria matematica trovare una classe abbastanza grande di insiemi in modo che:

1. tale classe contenga tutti gli insiemi "ragionevoli" che vorremmo ammettere come competitori, per esempio gli insiemi regolari, o quelli il cui bordo è almeno regolare a tratti;

2. tutti gli insiemi della classe abbiano proprietà sufficienti a definire una nozione di perimetro;

3. sia possibile dimostrare che un minimo esiste in questa classe;

4. sia possibile mostrare che, all'interno di tale classe, la palla è il minimo per il problema isoperimetrico.

I concetti adatti a rispondere alle domande qui sopra poste sono stati introdotti da De Giorgi negli anni '50, il quale ha dato una definizione matematicamente molto efficiente e maneggevole di "perimetro" di un insieme.

L'idea è la seguente: se il bordo di un insieme E è regolare in modo che sia possibile associare una forma di volume $d\sigma$ sul bordo di E, allora, indicando con $P(E)$ il perimetro di E e con ν_E la normale esterna al bordo di E, per il Teorema di Stokes si ha

$$\begin{aligned} P(E) &= \int_{\partial E} d\sigma(y) \geq \int_{\partial E} X(y)\cdot \nu_E(y)\, d\sigma(y) \\ &= \int_E \operatorname{div}(X(x))\, dx \end{aligned}$$

per ogni campo vettoriale regolare $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\|X\|_\infty \leq 1$.

Inoltre, se si sceglie X tale che $X(y) = \nu_E(y)$ su ∂E (come è sempre possibile fare se ∂E è abbastanza regolare), allora nella formula sopra abbiamo un'uguaglianza. Quindi

$$P(E) = \sup \int_E \operatorname{div}(X(x))\, dx$$

dove il sup è calcolato sui campi vettoriali X regolari con $\|X\|_\infty \leq 1$.

Notiamo ora che per definire il membro di destra non serve nessuna regolarità su ∂E, dato che stiamo solo integrando una funzione regolare su E. Quindi l'idea di De Giorgi è stata usare il membro di destra per *definire* il perimetro di un insieme E.

A questo punto il problema isoperimetrico si può riformulare nella seguente maniera: fissata una quantità di volume $V > 0$, l'obiettivo diventa minimizzare il perimetro $P(E)$ tra tutti gli insiemi E il cui volume $|E|$ (più precisamente, la cui misura di Lebesgue) è uguale a V. In altre parole, si considera

$$\min_{|E|=V} P(E)$$

Con la definizione di perimetro di De Giorgi è possibile usare tecniche classiche del Calcolo della Variazioni per dimostrare l'esistenza di un minimo, che denotiamo con $\hat{E}_V$. Il problema isoperimetrico diventa quindi mostrare che $\hat{E}_V$ è una palla.

Un'osservazione interessante, anche se non strettamente necessaria nel nostro seguito, è la seguente: dato un insieme E di volume V, se definiamo $\lambda_V := V^{-1/n}$ allora l'insieme $\lambda_V E$ ottenuto dilatando E del fattore λ_V ha volume 1. Inoltre il suo perimetro è $P(\lambda_V E) = \lambda_V^{n-1} P(E)$. In particolare $P(\hat{E}_V) \leq P(E)$ è equivalente a $P(\lambda_V \hat{E}_V) \leq P(\lambda_V E)$, da cui $\lambda_V \hat{E}_V$ è un minimo del problema isoperimetro a volume 1.

Da ciò si deduce che è sufficiente studiare il problema isoperimetrico solo per un fissato valore di V, dato che i minimi per gli altri volumi sono ottenuti semplicemente dilatando un minimo di volume V. In particolare, per comodità, sia $\hat{E} \doteq \hat{E}_V$ con $V = 1$.

Il nostro obiettivo è dimostrare che $\hat{E}$ è una palla. Per mostrare ciò, uno strumento fondamentale è la "simmetrizzazione di Steiner". L'idea è la seguente: dato un insieme E, gli si applica una trasformazione che lo rende "più simmetrico" e che ha come proprietà fondamentali di preservarne il volume e farne decrescere il perimetro (vedi la figura nella pagina successiva).

Questo fatto permette di dedurre che se si applica tale trasformazione a $\hat{E}$, per minimalità il perimetro deve rimanere costante e questa informazione permetterà di dedurre che $\hat{E}$ è una palla.

Definizione: Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ e un vettore unitario $v \in \mathbb{R}^n$, si definisce il "simmetrizzato di Steiner di E nella direzione v"

come

$$E_v := \bigcup_{\substack{y \in \pi_v, \\ E \cap \ell_y^v \neq \emptyset}} \left\{ y + tv \; : \; |t| \leq \frac{1}{2} |E \cap \ell_y^v| \right\}$$

dove $\pi_v := \{y \in \mathbb{R}^n \; : \; y \cdot v = 0\}$ è il piano perpendicolare a v passante per l'origine, $\ell_y^v := \{y + tv \; : \; t \in \mathbb{R}\}$ è la retta parallela a v passante per y, e $|E \cap \ell_y^v|$ denota la misura 1–dimensionale dell'insieme $E \cap \ell_y^v$. (Vedi la Figura 1, dove si utilizzano le notazioni della dimostrazione seguente.)

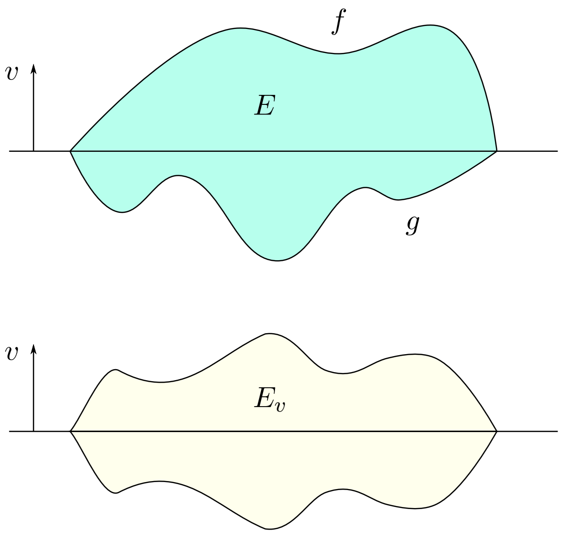

Figura 1: *Costruzione dell'insieme simmetrizzato di Steiner.*

Questa trasformazione soddisfa le seguenti proprietà:

(a) $|E_v| = |E|$ per ogni v;

(b) $P(E_v) \leq P(E)$ e se vale l'uguaglianza allora $E \cap \ell_y^v$ è un segmento per ogni $y \in \pi_v$;

(c) se E è convesso e $P(E_v) = P(E)$ allora, per ogni v, $E_v = E + t_v v$ per un certo $t_v \in \mathbb{R}$; ossia E_v è semplicemente un traslato di E.

La dimostrazione di queste proprietà non è troppo complicata. Per semplicità le verifichiamo in un caso particolare: denotando con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, supponiamo che $v = e_n$ e che E sia della forma

$$E = \{(y, t) \in \mathbb{R}^n \; : \; -g(y) \leq t \leq f(y)\}$$

con $f, g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ funzioni regolari. Allora in questo caso E_v è l'insieme dei vettori $(y, t) \in \mathbb{R}^n$ per cui

$$-\frac{f(y) + g(y)}{2} \leq t \leq \frac{f(y) + g(y)}{2}$$

Notiamo quindi che (a) è immediata. Infatti

$$\begin{aligned} |E| &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [f(y) + g(y)] \, dy \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{f(y) + g(y)}{2} \, dy \\ &= |E_v| \end{aligned}$$

Per quanto riguarda (b), per il perimetro abbiamo

$$P(E) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\sqrt{1 + |\nabla f(y)|^2} + \sqrt{1 + |\nabla g(y)|^2} \Big) \, dy$$

$$P(E_v) = 2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{1 + \left| \frac{\nabla f(y) + \nabla g(y)}{2} \right|^2} \, dy$$

Allora, dato che la funzione $\Phi(s) := \sqrt{1 + s^2}$ è convessa e crescente otteniamo

$$\begin{aligned} &\Phi\left(\left| \frac{\nabla f(y) + \nabla g(y)}{2} \right| \right) \\ &\qquad \leq \Phi\left(\frac{|\nabla f(y)| + |\nabla g(y)|}{2} \right) \\ &\qquad \leq \frac{\Phi(|\nabla f(y)|) + \Phi(|\nabla g(y)|)}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

e (b) segue integrando la disuguaglianza sopra rispetto a y.

Infine, se vale $P(E_v) = P(E)$, dato che Φ è strettamente convessa usando (1) deduciamo che $\nabla f(y) = \nabla g(y)$ per ogni y, da cui $f = g + \alpha$ per una certa costante $\alpha \in \mathbb{R}$ e quindi $E = E_v + (\alpha/2) e_n$, il che dimostra (c).

Il caso per insiemi generici si ottiene localizzando opportunamente l'argomento appena descritto e ragionando per approssimazione (vedere per esempio [1, Sezione 3] per più dettagli).

Usando (a) e (b) otteniamo la proprietà seguente: se $\hat{E}$ è un minimo allora $\hat{E} \cap \ell_y^v$ è un segmento per ogni $y \in \pi_v$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Vogliamo mostrare che questo implica che $\hat{E}$ è convesso. Infatti, dati due punti $x, x' \in \hat{E}$, prendiamo v parallelo a $x' - x$ e consideriamo la retta ℓ_y^v con $y \in \pi_v$ tale che $x, x' \in \ell_y^v$. Allora, dato che $\hat{E} \cap \ell_y^v$ è un segmento deduciamo in particolare che $\tau x + (1 - \tau) x' \in E$ per ogni $\tau \in [0, 1]$, dunque E è convesso.

A questo punto applichiamo (c) per dedurre che, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$, $\hat{E}_v = \hat{E} + t_v v$ per un certo $t_v \in \mathbb{R}$. Se potessimo dire che $t_v = 0$ per ogni v sarebbe facile concludere (come mostreremo in un attimo). Purtroppo in generale questo non è vero ma possiamo dimostrare che vale a meno di traslare $\hat{E}$. Più precisamente, definiamo

$$\hat{E}' := \hat{E} - \sum_{i=1}^{n} t_{e_i} e_i$$

Allora, usando la proprietà che i vettori e_i sono ortogonali, non è difficile verificare (ricordando la definizione del simmetrizzato di Steiner) che $(\hat{E}')_{e_i} = \hat{E}'$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, ossia $\hat{E}'$ è esattamente uguale al suo simmetrizzato di Steiner nelle direzioni e_i senza bisogno di applicare alcuna traslazione aggiuntiva. Dato che, per costruzione, $(\hat{E}')_{e_i}$ è simmetrico rispetto al piano $\{x_i = 0\}$, deduciamo che

- $\hat{E}'$ è simmetrico rispetto a tutti i piani coordinati $\{x_i = 0\}$, $i = 1, \ldots, n$

In particolare segue che $\hat{E}' = -\hat{E}'$, cioè $\hat{E}'$ è simmetrico rispetto all'origine.

Ora, grazie a (c) applicato a $\hat{E}'$ abbiamo $(\hat{E}')_v = \hat{E}' + t_v v$ da cui, osservando che $\hat{E}'$ è simmetrico rispetto all'origine e che $(\hat{E}')_v$ è simmetrico rispetto al piano π_v (per costruzione), deduciamo che $t_v = 0$.

Abbiamo dunque dimostrato che

$$(\hat{E}')_v = \hat{E}' \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^n,\ |v| = 1$$

ossia $\hat{E}'$ è simmetrico rispetto al piano π_v per ogni v.

Possiamo ora far vedere che $\hat{E}'$ è una palla centrata nell'origine. Infatti, prendiamo $x \in \hat{E}'$ e consideriamo il punto $x_v \in \hat{E}'$ ottenuto riflettendo x rispetto al piano π_v. Al variare di v sulla sfera unitaria i punti x_v descrivono una sfera di raggio $|x|$. Dunque abbiamo dimostrato che se $x \in \hat{E}'$ allora la sfera di raggio $|x|$ centrata nell'origine è contenuta in $\hat{E}'$. Dato che $\hat{E}'$ è convesso, $\hat{E}'$ (e quindi anche $\hat{E}$) è una palla, come desiderato.

[1] F. Maggi: "Some methods for studying stability in isoperimetric type problems", *Bull. Amer. Math. Soc* **45** (2008) 367–408.

Alessio Figalli: Laureato in matematica all'Università di Pisa e alla Scuola Normale Superiore nel 2006, consegue il dottorato di ricerca presso la Scuola Normale Superiore e l'Ecole Normale Supérieure di Lione nel 2007. Nell'ottobre 2007 ottiene il posto di ricercatore presso il CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) a Nizza e nel settembre 2008 diventa professore all'Ecole Polytechnique di Parigi. Nel settembre 2009 si trasferisce come professore associato all'Università del Texas ad Austin, dove nel settembre 2011 viene promosso a professore ordinario.