Demetrio Ria

UNA RIFLESSIONE STORICO-EPISTEMOLOGICA SUL CONCETTO DI "INVARIANZA" NEL PENSIERO DI H. WEYL

Sul *Duke Mathematical Journal* nel 1939 apparve un breve articolo di Hermann Weyl (1885-1955)[1]dedicato alla "teoria degli invarianti"[2]. Tra le memorie dell'autore (così come si evince dalla *Gesammel-*

---

[1] La figura di H. WEYL può essere considerata come l'ultimo di quella generazione di grandi scienziati che era in grado di padroneggiare l'intero scibile delle scienze matematiche fisiche e naturali. Per il periodo in cui è vissuto, forse, è anche lo scienziato che maggiormente, ed in completa autonomia, ha contribuito a rendere più esplicita la filosofia implicita della ricerca. Anche se non è l'unico che ne ha avvertito la necessità, visti soprattutto gli sviluppi, egli, ha più volte ricondotto le motivazioni creative della ricerca alla ricostruzione storica, al chiarimento dei principi filosofici. Per una ricostruzione delle vicende biografiche dell'autore si rimanda a S. FEFERMAN, *Weyl vindicated: das kontinuum 70th years later*, in C. CELLUCCI e G. SAMBIM (a cura di), *Temi e prospettive della logica e della filosofia della scienza contemporanee*, CLUEB, Bologna 1988, vol. 1, pp.59-93 .

[2] Cfr. H. WEYL, *Invariants*, in «Duke Mathematical Journal», 5, pp. 489-502; anche in H. WEYL, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlino 1968, a cura di Chandrasekaharan, pp. 670-83. Da ora in avanti l'indicazione delle pagine riferite nelle citazioni ed anche nel testo seguiranno la scansione dell'ultima indicazione (quella della *Gesammelte*). Il testo presenta una nota dell'editore dove si dice che nonostante i solleciti e le ripetute richieste non hanno avuto le note sulla letteratura utilizzata. In particolar modo, pur avendo chiesto specificatamente, gli estremi del testo citato a p. 677 come *The classical groups, their Invariants and Representations*, non sono stati in grado di riceverne la risposta. Inoltre viene indicata una ulteriore loca-

te Abhandlungen) esso si colloca in un contesto di studi relativi ad argomenti di natura fisico-geometrica ed, in particolare, affianca scritti dedicati al movimento, alla metrica dello spazio e allo studio geometrico del potenziale elettrico. Questa particolare collocazione che, almeno a prima vista, fa apparire il saggio come "una stonatura" in verità trova una sua logica coerenza nel fatto che, all'inizio dello stesso anno, Weyl aveva pubblicato il volume *The Classical groups, their invariants and representations*[3] frutto di un lustro di studi, ricerche e lezioni dedicati proprio a questi argomenti.

La teoria degli invarianti è stata, tra le applicazioni matematiche, quella che, forse più di altre, a cavallo tra gli anni trenta e quaranta del secolo scorso, ha attraversato un periodo di stasi. Una battuta d'arresto provocata dal riflusso della scoperta dei teoremi d'incompletezza di K. Gödel (1906-78)[4] che hanno spiazzato tutta la ricerca matematica.

Questo scritto, il cui taglio è prettamente scientifico, contiene alcuni elementi particolarmente importanti utili per comprendere sia il pensiero epistemologico intrinseco[5] dello scienziato sia gli attuali sviluppi di questa particolare teoria. Quindi il compito precipuo della presente riflessione è quello di mettere in luce, attraverso l'esame del contributo weyliano al concetto di invarianza e le sue peculiari caratteristiche, alcuni aspetti legati alla riflessione epistemologica dello scienziato tedesco.

La teoria degli invarianti, dal punto di vista filosofico, è una te-

---

zione della medesima citazione in un articolo pubblicato in precedenza da WAERDEN, «Mathematische Annalen», vol. 113 (1936), pp. 14-35.

[3] Cfr. H. WEYL, *The Classical groups, their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton 1939, 1946[2]. Poiché questo testo è stato pubblicato nel 1939 e successivamente rivisto e corretto nel 1946 ci fa supporre che queste riflessioni fossero in qualche modo al centro dei pensieri di Weyl.

[4] Cfr. K. GÖDEL, *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik*, in «Erkenntnis», vol 2, 1931-32, pp. 147-51 (trad. It. In E. CASARI, *La filosofia della matematica del '900*, Sansoni, Firenze 1973). Ancora K. GÖDEL, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, in «Monatshefte für Mathematik und Physik», vol. 38, 1931, pp. 173-98 (trad. It. in E. AGAZZI, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano 1961).

[5] Cfr. M. CASTELLANA, *Alle origini della «nuova epistemologia»*, in «Il Protagora», 17-18, Lecce 1990, pp.15-102. Sempre sulle questioni della filosofia intrinseca cfr. M. Castellana, *La filosofia della matematica in A. Lautman*, in «Il Protagora», 115, Lecce 1978, pp. 12-24.

matica che, in riferimento alla suddivisione fatta da Ettore Casari[6], si colloca all'interno delle questioni della filosofia della matematica concernenti le applicazioni. Tuttavia, dato lo strettissimo legame con gli sviluppi della teoria dei numeri e della geometria proiettiva, si stende anche in maniera trasversale in tutte le tematiche e problematiche della matematica invadendo anche il campo dei "fondamenti". Essa, poi, nella suddivisione disciplinare delle matematiche *tout court*, gioca un ruolo principe all'interno del processo di algebrizzazione della geometria proiettiva.

Cosa sono, dunque, gli *invarianti*? Sono particolari proprietà che permangono immutate al variare dei "gruppi" di trasformazioni di un sistema. Lo studio degli invarianti, pertanto, permette di estendere l'esame delle relazioni alle trasformazioni dei gruppi. Cos'è quindi un *gruppo*? È una struttura algebrica definita da una legge di composizione. Questa struttura è uno dei capisaldi della matematica contemporanea e la dobbiamo a Evariste Galois (1811-32)[7] che per primo elaborò tale concetto. Nel corso del loro sviluppo applicativo i gruppi sono stati utilizzati spesso al fine di soddisfare la via dell'"unificazione" delle matematiche. Le motivazioni di questa esigenza si riscontrano nel fatto che i fondamenti, a cui si applica la nozione di invariante, si ritrovano in quelli dei gruppi di trasformazioni. Una definizione più organica di gruppo è quella di un insieme dotato delle seguenti proprietà:

a) i suoi elementi possono essere entità aritmetiche, geometriche, fisiche o indefinite;
b) il numero di tali entità può essere finito o infinito;
c) le regole di combinazione di tale entità possono essere aritmetiche, geometriche o possono essere non definite;
d) la regola di combinazione può essere associativa, commutativa o non-commutativa;
e) ogni elemento dell'insieme deve avere il suo inverso.

Le *trasformazioni*, che a loro volta formano un "sottogruppo" e

[6] Cfr. E. CASARI, *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, Milano 1973, p. 11.

[7] Sulle scoperte e i contributi di questo matematico cfr. E. GALOIS, *Escrits et mémoires mathématiques*, a cura di R. Bourgne e J. P. Azra, Gauthier-Villars, Paris 1962. Particolarmente importante è la *Memoria sulle condizioni di risolubilità delle equazioni radicali* che è disponibile al lettore italiano nella versione a cura di Laura Toti Rigatelli i cui estremi completi sono: E. GALOIS, *Scritti matematici*, a cura di L. Toti Rigatelli, Boringhieri, Torino 2000, pp.69-87.

che permangono invarianti, sono le regole di inferenza che legano le relazioni dei gruppi, e generalmente rispondono al principio logico secondo cui il contenuto consiste di possibilità e si esprime attraverso la formulazione in simboli.

Lo studio di queste particolari trasformazioni ha una storia piuttosto recente. Sono stati operativamente utilizzati per la prima volta da Karl Friedrich Gauss (1777-1855)[8] nelle sue ricerche sulle forme quadratiche. Il primo vero e proprio studio intorno a questo argomento è italiano. Francesco Brioschi (1824-97)[9], un matematico pavese, nel 1861 ha pubblicato *Teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie e le sue principali applicazioni.* In verità, quella di Brioschi non fu una vera e propria scoperta (o creazione). I suoi studi erano dovuti al costante confronto con alcuni matematici inglesi: Arthur Cayley (1821-95)[10], James J. Sylvester (1814-97)[11] e George Salmon (1819-1904)[12]. Questi ultimi già lavoravano intorno all'argomento e Charles Hermite (1822-1901)[13] riferendosi proprio a questi studiosi inglesi li indica come la «triade degli invarianti». Il termine "invariante" lo si deve propriamente a Sylvester.

Lo stretto legame che unisce gli invarianti alla teoria dei numeri, come si è visto, è sostanzialmente dovuto sia alle origini del problema sia ad alcune sue vicende storiche. Nel corso della seconda metà dell'Ottocento, dopo i rilevanti contributi di Gauss, la teoria dei numeri si divise in due branche fondamentali:

1) la theory of algebraic number fields;

---

[8] Cfr. K. F. GAUSS, *Disquisitiones arithmeticae*, 1801; reprint in *Werke*, koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, 1866-1933, 12 voll.; trad. ing. *Disquisitiones arithmeticae*, by A. Clarke, Yale Univeristy Press, New Haven 1988.

[9] Per un maggiore approfondimento sull'opera di questo matematico italiano cfr. F. BRIOSCHI, *Opere matematiche di Francesco Brioschi*, Hoepli, Milano 1901-09, 5 voll.

[10] Cfr. A. CAYLEY, *The collected mathematical papers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1889-97 13 voll.

[11] Cfr. J. J. SYLVESTER, *The collected mathematical papers*, Cambridge University Press, Cambridge 1904-12, 4 voll.

[12] Questo autore è particolarmente noto per aver pubblicato dei manuali, più volte ristampati, su cui si sono formati molte generazioni di matematici. Tra i tre, appunto, si è dedicato alla diffusione delle teorie sviluppate da Sylvester e Cayley. Particolarmente noti sono le sue *Sezioni Coniche* (1848) e la *Geometria di tre dimensioni* (1862).

[13] Cfr. C. HERMITE, *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Paris 1905, 4 voll.

2) e la theory of quadratic forms in several variables.

Fu in particolare il secondo ambito che condizionò l'indirizzo formale della teoria degli invarianti e il successivo aspetto "critico" hilbertiano. Particolarmente importante fu il contributo, *Theorie der Abelschen Funktionen* del 1866, che Paul Gordan (1837-1912) e Alfred Clebsch (1833-1872) diedero allo sviluppo della teoria. Nel 1868 Gordan riuscì a dimostrare che ad ogni forma binaria $f(x,y)$ è associato un sistema completo finito di invarianti razionali interi. Cercò per più di vent'anni di dimostrare che questo poteva valere anche per altre forme. David Hilbert (1862-1943)[14], nel 1888, in una maniera del tutto inaspettata, propose una soluzione particolarmente semplice di questo teorema. Hilbert poggiò tutta la dimostrazione su concetti "esistenziali" che gli causarono l'accusa di "teologo degli invarianti". L'ultimo passaggio alla fine del XIX° secolo, per quella che si può considerare come la via formale alla teoria degli invarianti, fu proprio questo di Hilbert.

La via attraverso la teoria dei numeri, tuttavia, non è l'unica a condurre alla teoria degli invarianti. L'indirizzo analitico, proveniente dall'analiticizzazione della geometria, fu seguita in modo particolare da Julius Plücker (1801-68)[15] e August Ferdinand Möbius (1790-1868)[16]. Sostanzialmente questa via seguiva l'idea fondamentale di Möbius quella, cioè, di considerare che «ogni sistema di punti materiali ha sempre un solo centro di gravità (baricentro), e quindi in qualunque modo si colleghino fra loro i punti, come risultato si ottiene sempre uno e uno stesso punto»[17].

Alla luce di queste considerazioni che muovono in modo particolare dalla algebrizzazione della geometria si susseguono particolari vicende. In particolare Plücker mostra una speciale capacità di "leggere" le equazioni algebriche con occhi geometrici. Il commento più importante all'opera di questo grande matematico lo si deve al suo

[14] Cfr. D. HILBERT, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin 1932. Per un approfondimento sul pensiero filosofico, logico, oltre che scientifico di Hilbert cfr. D. HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, (a cura di) V.M. Abrusci, Napoli 1978; C. REID, *Hilbert*, Springer Verlag, Berlin 1970; J. FANG, *Hilbert. Towards a philosophy of modern mathematics*, Paideia, New York 1970.

[15] Cfr. J. PLUCKER, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, Essen, 1828-31, 2 voll.

[16] Cfr. A. F. MÖBIUS, *Gesammelte Werke*, Hirzel, Leipzig 1885-7, 4 voll.

[17] Cfr. A. F. MÖBIUS, *Der barycentrische Calcul*, Hirzel, Leipzig 1827, p. IV.

più importante discepolo Felix Klein (1849-1925)[18] che affermava che il suo maestro non poteva essere considerato un vero geometra proiettivo poiché aveva dedicato molto tempo al chiarimento del comportamento delle curve all'infinito o nello studio degli asintoti... elementi che non hanno molto senso da un punto di vista proiettivo[19].

Anche Klein, nel suo *Programma di Erlangen*, diede un importante contributo a questa teoria. Egli sosteneva che nello spazio vi sono trasformazioni che non alterano le proprietà geometriche dei corpi. Partendo da qui e procedendo per astrazione all'interno di molteplicità n-dimensionali, Klein poneva il seguente problema generale: «è data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni. Si sviluppi la teoria invariantiva relativa al gruppo medesimo»[20].

Secondo Klein, attraverso questa via si potevano classificare le varie geometrie e con opportuni gruppi di trasformazione si potevano rendere invarianti le une rispetto alle altre.

La storia della teoria degli invarianti, così come schematicamente tracciato in questo *escursus* e con tutti i limiti che ciò comporta, appare, esaminandola in prospettiva epistemologica, come un processo altalenante di generalizzazione-individuazione di campi di conoscenza (matematico-geometrica) progressivamente espandibili. Lo scritto di Weyl, dal canto suo, parte da un esame dello *status quaestionis*. Il Nostro intende proporre, alla luce dei contributi diretti ed indiretti degli ultimi trent'anni, un modo per rileggere la storia della teoria degli invarianti. Questa nuova chiave di lettura sarà utile alla ripresa del cammino della conoscenza.

Weyl apre la sua ricostruzione con una metafora mitologica. Dice che la teoria degli invarianti è come Minerva che nata dalla "gioviana" testa di Cayley trova il suo regno, la sua Atene, nella geometria projettiva[21]. Per Cayley, come si è detto, la teoria degli invarianti na-

---

[18] Cfr. F. KLEIN, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, a cura di F. Fricke e A. Ostrowski, Springer-Verlag, Berlin 1921-23, 3 voll.

[19] Il riferimento è qui alla sua opera del 1926.

[20] Cfr. F. KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, 1872; trad. It., *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, a cura di G. Fano, in «Annali di matematica pura applicata», ser. 2, vol. 17, 1980, pp. 1-37, p. 5.

[21] Si riporta di seguito la citazione per esteso:«The theory of invariants came into existence about the middle of the nineteenth century somewhat like Minerva: a

sce sulla base di considerazioni incrociate sulla teoria dei numeri e sulla geometria proiettiva. Ciò vale anche per Gauss. Da qui emerge come, almeno in origine, il fine della teoria si manifestava nella sua applicazione operativa. Tale finalità è marcata fortemente da Weyl che mostra come occorre trovare nel "metodo" lo scopo dell'invarianza. Precisamente il Nostro, indica l'indirizzo seguito da Plücker, Möbius e poi, anche da Klein[22] come quello che manifesta le maggiori possibilità di sviluppo.

Weyl intende rispondere a due domande fondamentali. Qual è lo stato attuale della ricerca (intorno agli invarianti) e dove ci condurrà? Si deve considerare la proposta di Plücker e Möbius una geometria algebrica o una algebra geometrica? Con un tocco di ironia mostra i limiti che si incontrano se si seguono sia gli intenti del "tirannico" Möbius – come egli stesso lo definisce – sia se si seguono quelli del "democratico" Klein. Orbene, a Möbius rimprovera il fatto di essersi fermato al calcolo del baricentro e di non aver indagato oltre per individuare "tutti" i possibili gruppi di automorfismi. Tuttavia lo perdona in quanto Möbius non aveva in mano l'idea di gruppo e quindi il suo spazio era unicamente quello dell'intuitività euclidea. Per altro verso mostra come il *Programma di Erlangen* di Klein, pur essendo una piattaforma democratica e ponendo la necessità di estendere i diritti di invarianza a tutti i gruppi di trasformazioni possibili, ha il limite nel fatto di essere stato seguito in una maniera eccessivamente lenta.

Ora, Weyl propone, in termini moderni e più astratti, la definizione di invariante secondo quello che sarebbe stato il criterio seguito da Klein:

> Si desidera associare con i punti P di uno spazio numerico (cioè riproducibile) i simboli x come loro coordinate. In generale ciò è possibile in una maniera puramente ideale, cioè senza puntare il dito su punti individuali, cioè solo rispetto alla struttura teorica; ad esempio, nella geometria euclidea rispetto ad un arbitrario insieme di assi cartesiani assunti come riferimento. Il passaggio da una struttura

---

grown-up virgin, mailed in the shinning armor of algebra, she sprang forth from Cayley's Jovian head. Her Athens over which she ruled and which she served as a tutelary and beneficent goddess was projective geometry».

[22] F. KLEIN, *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, Springer Verlag, Berlin 1973, voll. 3.

> f ad un'altra ugualmente ammissibile è compiuto dal senso di una corrispondenza uno-a-uno S in un dominio di simboli x[23].

Con l'opportuna trasposizione formale quanto viene affermato in parole si trasforma nei simboli:

$$(P, f) = (P', f').$$

La conclusione tratta è l'equivalenza dell'invariante con l'automorfismo dello spazio $P \leftrightarrow P'$. La ricerca della definizione di invariante è, dunque, poggiata, attraverso Klein, su uno schema di sviluppo algebrico, così come segue:

1) un insieme di simboli o coordinate x;
2) un gruppo $\mathfrak{G}$ di trasformazioni S di un insieme su se stesso;
3) un punto P
4) un riferimento $\mathfrak{f}$.

Per Weyl questo schema, anche se valido, è ancora incompleto perché oltre ai punti dello spazio devono essere "sottomessi", alla rappresentazione simbolica, sia tutti gli oggetti geometrici – come già Plücker aveva sottolineato – sia tutte le quantità fisiche. «La legge per cui la trasformazione S dipende da una transizione di $\mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}'$ sarà determinata dal tipo di quantità in questione, e differirà per punti, linee, velocità, rotazioni, ecc.»[24]

Weyl ancora chiarisce la struttura del metodo; la sua parte simbolica costituita dal "gruppo di elementi" e dal "gruppo di coordinate"; e la parte geometrica caratterizzata dal gruppo di "trasformazioni dello spazio" e dalle quantità relative. Egli sottolinea che l'aspetto geometrico è limitante nel momento in cui si passa ad applicarlo allo spazio fisico. Soltanto dopo aver chiarito tali limiti, Weyl propone una nuova definizione dell'invariante.

> Partendo dalla nozione di un vettore invariante che presuppone sia dato un gruppo Γ di trasformazioni lineari A in uno spazio vettoriale n-dimensionale P. [...]
>
> A questa elementare nozione oppongo la nozione generale di invariante restando su un dato gruppo $\gamma = \{s\}$ ed una serie di date rappresentazioni di γ,
>
> $$\mathfrak{A}: s \rightarrow A(s),\ \mathfrak{B}: s \rightarrow B(s), \dots$$
>
> di grado m, n, ..., rispettivamente. Una funzione $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \dots)$ dipenden-

23 Cfr. H. WEYL, op. cit., p.671.

24 Ibidem.

te da una arbitraria quantità $\mathfrak{r}$ di tipo $\mathfrak{A}$, un'altra quantità $\mathfrak{p}$ di tipo $\mathfrak{B}$, ... sarà espressa da una data funzione F di vettori numerici

$$x = (x_1,\ldots, x_m), y=(y_1, \ldots, y_m), \ldots$$

nei termini di una data struttura $\mathfrak{f}$ di riferimento, e sarà espressa da una certa funzione F′ =sF in termini di un'altra struttura $\mathfrak{f}'$ di riferimento in cui f cambia del gruppo-elemento s. Se F′ = F per tutto s, allora φ è un invariante[25].

Particolarmente importante è il passaggio che Weyl compie dalla geometria alla fisica. Egli sottolinea il limite non della interpretazione analitica ma della rappresentabilità fisica e della rispondenza alle problematiche fisico-naturali.

Pochi anni prima, nel 1933, aveva avuto una discussione con Emmy Noether (1882-1935) a proposito di una questione che riguardava i rapporti della formalizzazione rispetto alla quotidiana ricerca matematica anticipando questioni che stanno alimentando oggi i dibattiti filosofico epistemologici. Weyl aveva "dimostrato", in occasione di un meeting internazionale, l'impossibilità della formalizzazione di teorie matematiche che erano in corso di studio e di verifica. Egli sottolineava che la formalizzazione poteva avvenire solo quando una teoria era talmente chiara da poter essere guardata da tutti i punti di vista[26]. Si assiste qui, da una differente angolazione, al medesimo "passaggio" epistemologico. Per dare nuovo slancio alla ricerca sugli invarianti occorre porre la questione non solo dal punto di vista delle matematiche ma anche dal punto di vista delle scienze fisiche. Per Weyl una teoria formale non può essere una struttura ideale completamente priva di applicazioni pratiche.

Posti di fronte alla prova concreta dell'applicazione a realtà oggettive, come per esempio il calcolo del volume dei tubi, emerge un fatto: l'invarianza è si una legge algebrica, è anche una trasformazione geometrica ma è soprattutto una "misura". Essa acquisisce un valore relazionale impensato, ossia, relaziona misure acquisite in sistemi diversi e comparativamente invarianti contribuendo ad aprire la via applicativa all'ambito fisico. Le conseguenze di questo nuovo filone investigativo portano necessariamente a rimettere in discussione i pilastri dell'algebrizzazione ed

---

[25] Cfr., H. WEYL, op. cit, p 674.

[26] Per un chiarimento circa la vicenda della critica di E. Noether a H. Weyl, cfr. U. BOTTAZZINI, *Il Flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, Utet, Torino 1990, pp. 277-80.

discussione i pilastri dell'algebrizzazione ed in particolare l'algebra di Sophus Lie (1842-99)[27]. Per questo egli pone due teoremi che scaturiscono sia dalla critica alla via geometrica che da quella alla via algebrica[28]. Questo aspetto, il cui valore scientifico è tutt'ora attuale, lo si lascia all'approfondimento matematico.

A conclusione di questo lavoro Weyl ci fa una "confidenza":

> In gioventù, ero, quasi esclusivamente, attivo nel campo dell'analisi; le equazioni differenziali e l'espansione della fisica matematica erano i pensieri matematici con cui ero in intimo cammino. Non sono mai riuscito ad assimilare completamente l'astratta via dell'algebra della ragione, e sento costantemente la necessità di tradurre ogni passo in una più concreta forma analitica[29].

Ci indica anche quale, a suo avviso, sarà la via che occorre seguire:

> Ma forse proprio per questo sono più adatto ad agire come intermediario tra vecchio e nuovo; piuttosto che la giovane generazione che è influenzata dall'approccio assiomatico astratto, sia in topologia che in algebra[30].

E così possiamo concludere che alla luce delle più recenti scoperte, sia in ambito di teoria dei numeri sia nel campo specifico della teoria degli invarianti Weyl ha contribuito in maniera rilevante alla ripresa del cammino verso la verità.

Il pensiero epistemologico di fondo di questo scritto pare strettamente vincolato all'inscindibile unità di matematica e fisica. Proprio di fronte a questa idea sorge spontanea una domanda: da dove proviene una simile "epistemologia"? Quali sono le motivazioni filosofiche che sostengono la ricerca weyliana? Il metodo d'indagine seguito a quale schema interpretativo va ascritto? Perché la conoscenza matematica deve trovare, una volta acquisita sufficiente ca-

---

[27] I. M. YAGLOM, *Felix Klein and Sophus Lie : evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century*, Hardy Grant & Abe Shenitzer, Boston 1988.

[28] Per una analisi dettagliata della questione matematica e dei teoremi implicati si rimanda a H. WEYL, *The Classical Group, their invariant and rapresentation*, Princeton University Press, Princeton 1936; o a più recenti studi sulle *Knot theory*, come ad esempio: L. H. KAUFFMAN, *On Knots*, Princeton University Press Princeton, 1987; C. LIVINGSTON, *Knot Theory*, Washington, 1993.

[29] Cfr. H. WEYL, *Invariants*, ed. cit., p. 682.

[30] Iibidem.

pacità e potenza, la sua applicabilità nell'ambito della fisica?

Nella sua opera filosofica per eccellenza *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*[31] mostra quali sono i suoi pilastri di riferimento: Leibniz, Kant e Husserl. Weyl, in quest'opera concludeva il paragrafo dedicato alla chiarificazione del concetto di conoscenza matematica con queste parole:

> Gli stadi attraverso cui la ricerca sui fondamenti della matematica è passata in tempi recenti corrispondono ai tre atteggiamenti epistemologici fondamentali. La posizione della teoria degli insiemi è lo stadio del realismo ingenuo, ignaro della transizione del dato trascendente. Brouwer, con la sua richiesta di riduzione di ogni verità a ciò che è dato intuitivamente, rappresenta l'idealismo. Nel formalismo assiomatico, infine, la coscienza compie il tentativo di saltare sulla propria ombra, lasciandosi dietro il materiale del dato, per rappresentare il trascendente, ma (e come potrebbe essere altrimenti?) solo attraverso il simbolo[32].

Il riferimento diretto è al cosiddetto realismo ingenuo della teoria degli insiemi, all'idealismo di Brouwer e alla critica trascendentale che è rappresentata da Hilbert e dal suo formalismo. Weyl mostra come storicamente la tendenza degli scienziati e dei filosofi sia rivolta verso la posizione idealista e come, persino quando Kant ha cercato di chiudere definitivamente questo capitolo, un rigurgito di idealismo ha invaso il mondo (Fiche, Schelling ed Hegel). La tensione verso la totalità sembra una necessità insita nell'anima della ricerca, in qualunque campo di conoscenza essa si applichi. Anche se questa interpretazione è discutibile per quanto riguarda l'affermazione relativa all'idealismo brouweriano certamente riassume in maniera soddisfacente la posizione del formalismo e del realismo ingenuo.

Bisogna dire che nell'ambito della teoria dell'invarianza la posizione di Möbius rispecchia abbastanza correttamente la posizione di un realismo ingenuo legato alla concezione intuitiva della scienza

---

[31] Cfr. H. WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Berlin, 1923; trad. Ing. *Philosophy of mathematics and natural sciences*, Princeton University Press, Princeton 1949, trad. It. *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*, Boringhieri, Torino 1967.

[32] Cfr. H. WEYL, *Filosofia della matematica e delle scienze naturali*, trad. It. Cit., p. 80.

geometrica e precisamente della geometria proiettiva. Essa racchiude nel concetto di trasformazione la geometria euclidea estesa alla concezione statico-topologica di "proiezione" di punti. Per questo il gruppo di trasformazioni non poteva che cadere all'interno di un punto particolare come era il baricentro. La posizione di Plucker, poi, cominciava a minare questa particolare visione, sia per la sopraggiunta chiarificazione dell'elemento formale gruppo, sia per la progressiva estensione algebrica della geometria. Le posizioni di Brioschi e di Cayley, infine, si unificavano nel tentativo di assegnare alla geometria il compito di applicazione dell'algebra dei numeri e poi anche dell'analisi (teoria delle funzioni ellittiche). Per questo, Weyl, quando si trova di fronte alla "consolidata" struttura formale dell'invarianza interna ad un automorfismo dello spazio di punti, lo saggia nell'efficacia scientifica relativa ad uno spazio tensoriale (fisico). Egli riconosce soprattutto il valore oggettivo del tensore al quale si fa strada come elemento dell'invariante molteplicità fisica cui oggettivamente si attiene.

É Weyl che supera il kantismo di Hilbert, sottoponendo al tribunale della ragione la conoscenza matematica entro i limiti della sua stessa applicabilità. Sono i fenomeni fisici, geometrici ed analitici a dire, nella loro stessa manegiabilità, quanto una teoria formale risulti "utile" al chiarimento oggettivo del fatto scientifico.

Aggiunge ancora:

> Non si può negare che è vivo in noi un desiderio teoretico che urge verso la totalità, e che risulta incomprensibile dal punto di vista puramente fenomenico. La matematica mostra questa situazione con particolare chiarezza; ma essa ci insegna che anche tale desiderio può essere soddisfatto a una sola condizione: che ci contentiamo del simbolo rinunciando all'errore mistico di attenderci che il trascendente cada nel cerchio illuminato della nostra intuizione. Finora soltanto nella matematica e nella fisica la costruzione teorica fondata sul simbolismo ha trovato quella solidità che la fa apparire "cogente" a chiunque abbia la mente aperta a tali scienze. Il loro interesse filosofico si basa principalmente su questo fatto[33].

Così la matematica diventa scienza dell'infinito. Lo spazio, inteso come relazione isomorfa di distanze topologiche, anche se struttura-

---

[33] Cfr. H. WEYL, op. *cit.*, Torino, 1997, p. 80.

to a livello formale (n-dimensionale), secondo Weyl, risulta dalla applicazione del concetto di trascendentale kantiano, ossia si costituisce come intuizione pura. L'idealismo brouweriano e il formalismo trascendentale di Hilbert sono estremamente distanti ma commettono, per versi opposti lo stesso "errore epistemologico": poggiano troppo su uno dei lati della conoscenza matematica; il primo sulla conoscenza oggettiva e quindi sull'oggetto senza estensione trascendentale, il secondo, come lui stesso afferma «salta sulla propria ombra» perdendo completamente contatto con l'esperienza oggettiva.

Su questo principio epistemologico poggia l'intera ricerca volta ad individuare i differenti schemi interpretativi relativi alla teoria degli invarianti. Così il nostro sottolinea: «Soltanto gli elementi s di un gruppo astratto sono definiti su una trasformazione in una maniera indipendente dal tipo di quantità in considerazione.»[34]

Questa generalizzazione del gruppo nella sua astrazione diventa il metodo attraverso cui risalire la china. Un metodo analitico ma anche epistemologico. Attraverso questo processo la conoscenza allarga la sua comprensività e ripercorre, a partire dal contingente, tutta la conoscenza fisica.

[34] Cfr. H. WEYL, *Invariants*, ed. cit., p. 671.