

Numero IV  
Anno 2014

  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA  
"Ennio De Giorgi"

  
UNIVERSITÀ  
DEL SALENTO

Viaggio nella Scienza

# Ithaca



Arte e Scienza

---

## **Ithaca: Viaggio nella Scienza**

---

Una pubblicazione del Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi” dell’Università del Salento.

Registrazione presso il Tribunale di Lecce n. 6 del 30 Aprile 2013.  
e-ISSN: 2282-8079

Direttore Responsabile  
**Luigi Spedicato**

Ideatore  
**Giampaolo Co’**

Comitato di Redazione  
**Rocco Chirivì,**  
**Maria Luisa De Giorgi,**  
**Luigi Martina,**  
**Giuseppe Maruccio,**  
**Marco Mazzeo,**  
**Francesco Paparella,**  
**Carlo Sempi.**

Segreteria di Redazione  
**Daniela Dell’Anna.**

© 2013-2014 Dipartimento di Matematica e Fisica “*Ennio de Giorgi*”.

© 2014 per i singoli articoli dei rispettivi autori.

Il materiale di questa pubblicazione può essere riprodotto nei limiti stabiliti dalla licenza  
“*Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 3.0 Italia*” (CC BY-SA 3.0 IT).

Per il testo della licenza: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/it/deed.it>

**Ithaca: Viaggio nella Scienza**

è disponibile sul sito:

<http://ithaca.unisalento.it/>

Scriveteci all’indirizzo:

[ithaca@unisalento.it](mailto:ithaca@unisalento.it)

---

# Ithaca

## Viaggio nella Scienza

---

IV 2014

**3** In questo numero

**5** La matematica nella Cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze

Giuseppe Conti

**13** Il complesso intreccio tra scienza ed arte

Giuseppe Maruccio

**27** Al confine fra matematica, biologia e arte: la morfogenesi di Turing

Francesco Paparella

**37** Riflessioni sulle riflessioni

Giuseppe De Cecco

**45** Sociologia e dimensione sociale della scienza

Maria Luisa Dell'Atti

La lezione mancata

**53** L'analisi armonica e le serie di Dirichlet

Rocco Chirivì



---

# In questo numero

---

Come nel numero precedente, il *leitmotiv* che collega gli articoli è ancora una volta il rapporto tra scienza ed arte.

Questo tema è evidente nell'articolo di Giuseppe Conti dove si presenta il ruolo della matematica nelle soluzioni tecniche ed estetiche adottate dal Brunelleschi per la costruzione della cupola della chiesa di Santa Maria del Fiore a Firenze.

Anche l'articolo di Giuseppe Maruccio si sviluppa attorno al tema scienza ed arte, presentando esempi di arte ispirata alla scienza, di arte creata utilizzando peculiari conoscenze scientifiche, di scienza che gareggia con l'arte in termini estetici e di rappresentazioni artistiche di complessi concetti scientifici.

L'articolo di Francesco Paparella racconta come si possa descrivere matematicamente la generazione di forme e colori di diversa intensità e densità che formano, in natura, entità che attraggono la nostra attenzione per le loro caratteristiche estetiche.

Anche l'articolo di Giuseppe De Cecco è legato ad arte e scienza, poiché le simmetrie sono essenziali in questo rapporto. Si parla delle simmetrie legate alla riflessione di immagini nello specchio.

Il contributo di Maria Luisa Dell'Atti si discosta dal tema principale. Questo articolo presenta una panoramica dei moderni approcci sociologici allo studio dell'attività scientifica. La scienza e gli scienziati non più soggetti attivi dello studio, ma oggetti di studio da parte dei sociologi.

Conclude il numero la rubrica *La lezione mancata*. In questo numero si presenta un approccio estremamente generale alla costruzione di serie armoniche, da quella di Fourier a quella di Dirichlet.

Il prossimo numero apparirà nel Marzo 2015.

Buona lettura,  
il Comitato di Redazione.



---

# La matematica nella Cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze

**Giuseppe Conti**

*Dipartimento di Matematica DIMAI Università di Firenze*

---



**Figura 1:** La Cupola della chiesa di S. Maria del Fiore a Firenze.

**I**n questo articolo sono trattati alcuni aspetti riguardanti la geometria e la genesi architettonica della Cupola della Cattedrale di Santa Maria del Fiore a Firenze, costruita da Filippo Brunel-

leschi. Infatti, nella Cupola del Brunelleschi c'è molta matematica "nascosta", che serve, tra l'altro a spiegare numerosi aspetti di questa costruzione: in che modo fu possibile costruirla, la sua armonia e, in parte, la sua statica. Non deve meravigliare il fatto che la matematica sia uno strumento così importante per scoprire i "segreti" della Cupola. Gli antichi architetti conoscevano molto bene la matematica; in particolare, Brunelleschi era un ottimo matematico: le sue conoscenze matematiche gli permisero, fra le altre cose, di porre le basi geometriche della prospettiva.

La Cupola del Duomo di Santa Maria del Fiore di Firenze, innalzata dal Brunelleschi fra il 1420 ed il 1436, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] ha sempre colpito la fantasia dei visitatori e l'interesse degli studiosi; questo è dovuto sia alla sua bellezza, sia alla sua innovativa (e misteriosa) tecnica costruttiva, sia alle sue dimensioni: il suo diametro interno misura 45 metri, quello esterno 54 metri, la sua base si trova a 55 metri dal suolo; la Cupola raggiunge 91 metri e, con la Lanterna, che pesa circa 750 tonnellate, essa arriva a circa 116 metri; il

suo peso è di circa 29.000 tonnellate. Anzitutto, è interessante notare che le misure degli elementi che compongono la Cupola determinano delle proporzioni auree. Infatti, la Cupola inizia da un'altezza di 55 metri, poggia su un tamburo di 13 metri, è alta mediamente 34 metri ed è sormontata dalla Lanterna di 21 metri. Si possono riconoscere alcuni numeri della successione di Fibonacci, che, com'è noto, sono legati alla sezione aurea. Questo fatto è ben noto anche agli studiosi di musica; infatti, quando la Cupola fu consacrata nel 1436, il famoso musicista fiammingo G. Dufay compose per l'occasione il mottetto *Nuper rosarum flores*; questa composizione riproduceva, tra l'altro, i rapporti presenti nella Cupola di Santa Maria del Fiore, cioè proprio quelli legati alla sezione aurea.

Nella presente nota voglio evidenziare il ruolo che la matematica ha avuto nello studio di questo importante monumento. Non deve meravigliare il fatto che la matematica si sia rivelata uno strumento così notevole; infatti Brunelleschi era anche un matematico: egli fu il primo che dette le regole geometriche della prospettiva e, per questo motivo, è citato in tutti i più importanti testi di storia della matematica, come il Boyer, il Kline, il Loria [8, 9, 10]. Inoltre, egli era circondato da altri valenti matematici, come Paolo dal Pozzo Toscanelli e Giovanni dell'Abaco.

La Cupola è formata da otto *spicchi*, chiamati *vele*; ciascuna di queste è una porzione di cilindro ellittico. I costoloni di spigolo, che all'esterno sono ricoperti di marmo bianco, sono archi di circonferenza, mentre la sezione mediana di ciascuna vela è un arco di ellisse. Su questo fatto ci sono state numerose polemiche nel passato ed anche oggi vengono fatte affermazioni inesatte su tale questione [11].

Per studiare questo problema, insieme ai professori Giovanni Anzani e Roberto Corazzi, abbiamo estratto dal rilievo degli otto costoloni di spigolo, eseguito con il laser-scanner, le coordinate di circa 500 punti per ciascun costolone che, nel rilievo suddetto, si trovano in una fascia dello spessore di 4 mm. Successivamente abbiamo elaborato questi dati determinando la circonferenza dei minimi quadrati; in questo modo abbiamo ottenuto, per ciascun costolone, una circonferenza il cui raggio misura mediamente 36.18 metri, con uno scarto quadratico medio molto piccolo,

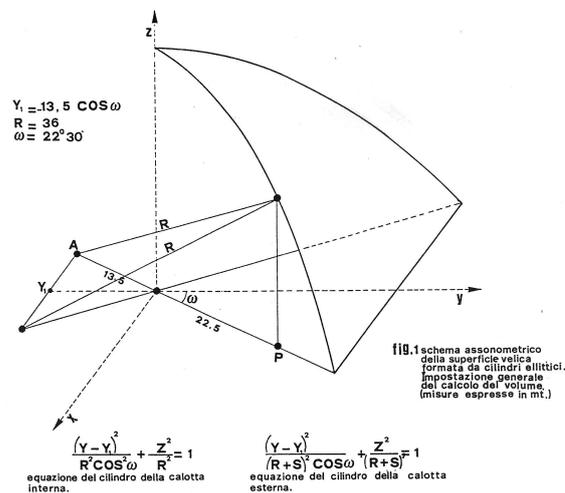
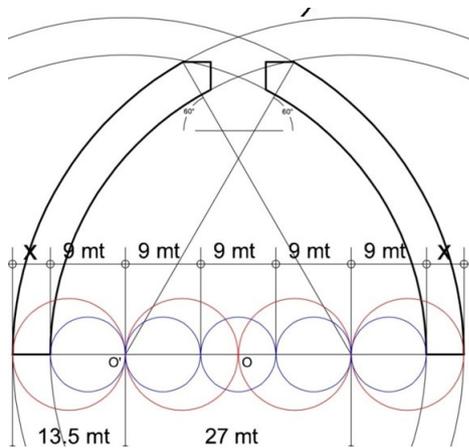


Figura 2: Cilindro ellittico delle vele e sua equazione.

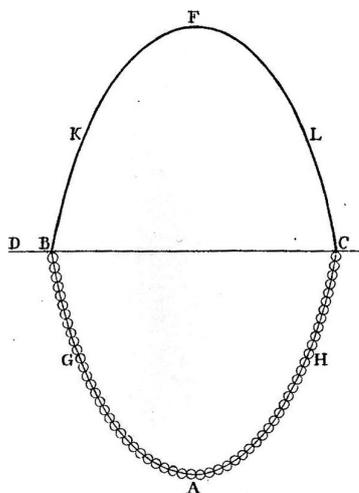
dell'ordine di 1 cm. Tale risultato è molto interessante perché è quasi coincidente con la misura teorica di 36 metri che deve avere il raggio di ciascun costolone. Per quanto riguarda i profili mediani delle vele della Cupola, abbiamo considerato i punti che si ottengono intersecando una vela con il piano perpendicolare alla base e passante per l'asse della Cupola. La curva teorica deve essere necessariamente un'ellisse, per cui abbiamo cercato la conica dei minimi quadrati e non la circonferenza. La conica che abbiamo ottenuto con tale metodo è un'ellisse, in pieno accordo con le considerazioni teoriche, anche in questo caso con uno scarto quadratico medio molto piccolo.

Il profilo della Cupola interna è un sesto (che significa curvatura) di quinto acuto, mentre quella esterna è un sesto di quarto acuto. Il significato geometrico è il seguente. Il diametro della Cupola interna viene diviso in cinque parti uguali, mentre quello della esterna in quattro parti. Successivamente si punta il compasso nei due centri di quinto acuto, ciascuno dei quali si trova a 9 metri dall'estremità del diametro e si tracciano due archi di circonferenza con raggio pari a 36,00 metri. Puntando il compasso negli stessi punti, si tracciano gli archi di quarto acuto con raggio pari a 40,50 metri.

Come già aveva osservato Leonardo Ximenes [12] nel XVIII secolo, il profilo della Cupola si avvicina molto ad una catenaria (Huygens fu il primo ad usare il termine catenaria in una lettera a Leibniz nel 1690), la quale è la curva migliore



**Figura 3:** Costruzione del profilo della Cupola.

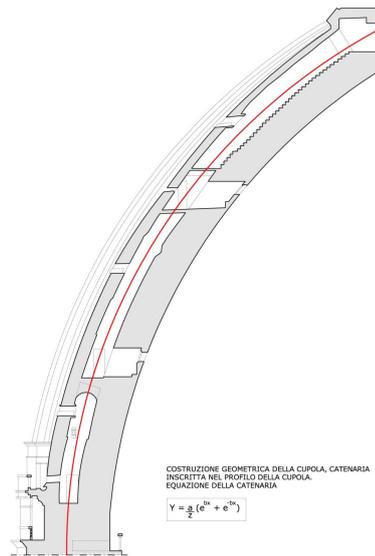


**Figura 4:** La curva catenaria.

per sostenere un arco soggetto solo al proprio peso, come dimostrato da Giovanni Bernoulli nel 1691.

Scrivono, infatti, lo Ximenes [12]: *Il Brunelleschi non sapeva certamente che, sarebbon venuti dopo di lui alcuni Geometri che avrebbon dimostrato che per dare ad un arco, ad una volta, ad una cupola quella curvità che facesse massima la sua resistenza, era necessario di dare a quell'arco l'andamento di una curva catenaria rovesciata. Eppure egli è certissimo, che il sesto della nostra cupola è tale che si accosta assai dappresso alla curva catenaria, curva assai acconcia alla costruzione delle cupole.* Abbiamo eseguito una verifica anche di questo fatto, come si può vedere dalla Figura 5.

Osserviamo che, in realtà, la Cupola di Santa Maria del Fiore è formata da due cupole: una interna, che è la struttura portante ed ha uno

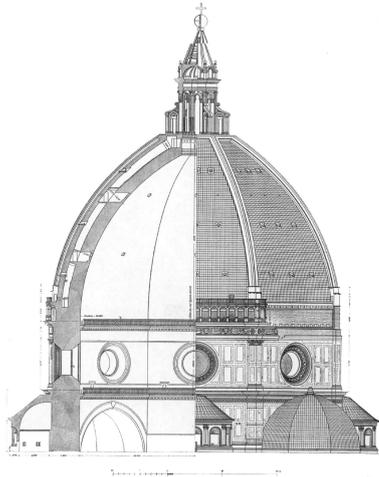


**Figura 5:** La curva catenaria della Cupola.

spessore di circa 2,4 metri, ed una esterna, più sottile (circa 0,9 metri), la quale, come disse il Brunelleschi, serve a proteggere la Cupola interna dalle intemperie e dagli sbalzi di temperatura ed a renderla *più magnifica e gonfiante*. Fra queste due cupole vi è uno spazio di circa 1,2 metri, attraverso il quale è possibile salire fino alla sua sommità, cioè alla base della lanterna.

Salendo sulla Cupola abbiamo, alla destra, la Cupola interna e, alla sinistra, quella esterna; possiamo così notare la particolare disposizione dei mattoni che la compongono: essi non sono messi, come ci si potrebbe aspettare, secondo linee orizzontali, cioè parallele al piano terra, ma alcuni sono disposti secondo linee curve (le cosiddette corde *blande* o *brande*), altri verticalmente (per coltello), formando la cosiddetta spina di pesce, altri sono disposti radialmente e convergono verso l'asse della Cupola.

Perché il Brunelleschi ha disposto i mattoni in questo modo particolare e quale regola ha seguito per fare ciò? Egli non ha lasciato niente di scritto sul modo con cui ha costruito la Cupola; infatti esistono due sue relazioni (1420 e 1426) in cui si dice quali sarebbero state le caratteristiche della Cupola, ma non la tecnica con la quale egli l'avrebbe costruita. Questo fu dovuto, molto probabilmente, ai rapporti molto contrastati che aveva con i fiorentini, i quali erano sempre polemicamente con lui e controllavano continuamente ciò

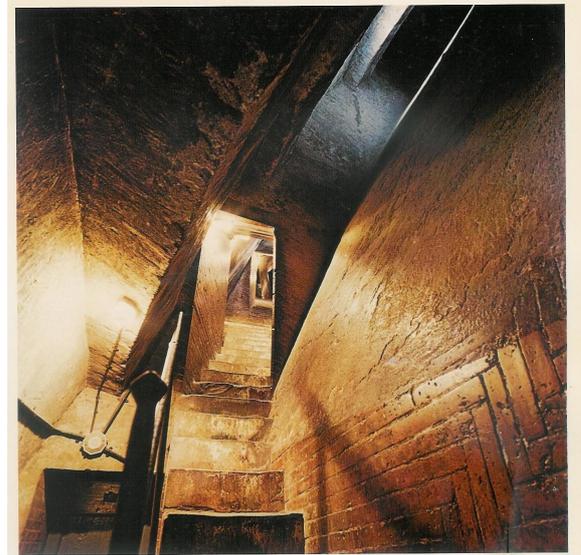


**Figura 6:** Spaccato della Cupola.

che faceva: esiste nell'Archivio di Stato di Firenze una pergamena scritta nel 1425/26, durante la costruzione della Cupola, in cui il pratese Giovanni di Gherardo da Prato accusa il Brunelleschi di commettere gravi errori nella sua costruzione.

La Cupola di Santa Maria del Fiore è a base ottagonale, a differenza di altre cupole di dimensioni analoghe che sono a base circolare (cupole di rotazione), come il Pantheon e la Cupola di San Pietro a Roma, la Cupola di Santa Sofia ad Istanbul. Brunelleschi sapeva che le cupole di rotazione sono più semplici da costruire, rispetto a quelle a base poligonale, ed hanno meno problemi dal punto di vista statico perché le forze si distribuiscono in maniera uniforme. Per questo motivo egli propose, con un raccordo murario, di rendere circolare la sua base; tuttavia, i fiorentini si opposero perché volevano che la Cupola del Duomo avesse la stessa forma ottagonale di quella (più piccola) del Battistero di San Giovanni. È interessante ricordare che quasi tutti i battisteri e le fonti battesimali hanno forma ottagonale per quello che affermò Sant'Ambrogio nel IV secolo: *Dio aveva creato il mondo in sei giorni e il settimo si riposò, ma l'opera non era completa per la presenza del peccato originale; l'ottavo giorno Gesù Cristo, con il Battesimo, tolse il peccato originale e completò l'opera del Padre.*

Per le cupole di rotazione la tecnica costruttiva è abbastanza semplice: basta, ad esempio, disporre i mattoni secondo anelli circolari sovrapposti (i paralleli), il cui diametro si restringe man mano che si sale verso la sommità. In questo

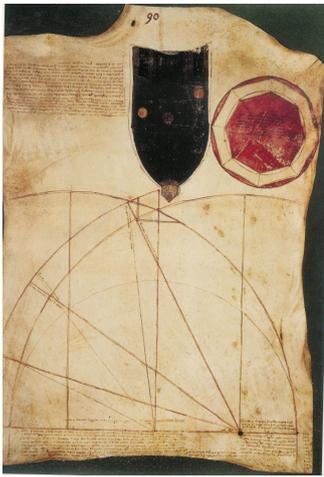


**Figura 7:** Il camminamento fra la Cupola interna (a destra) e quella esterna (a sinistra).

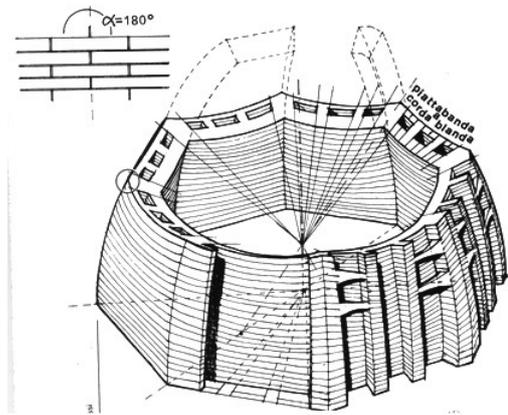
modo la struttura diventa autoportante, cioè si sostiene da sola durante la sua costruzione. Notiamo che i paralleli delle cupole di rotazione sono sempre perpendicolari alle linee meridiane, proprio come i meridiani ed i paralleli della superficie terrestre. Questa tecnica non è possibile in una struttura a base ottagonale a causa della discontinuità che si presenterebbe nei vertici dell'ottagono: infatti, in questo modo, i letti di posa dei mattoni, appartenenti a due vele adiacenti, formerebbero un angolo proprio nel punto in cui le tensioni sono maggiori [13].

L'idea di Brunelleschi è stata quella di partire disponendo con continuità i mattoni negli spigoli d'angolo, come se la Cupola fosse di rotazione (e, quindi, autoportante in fase costruttiva).

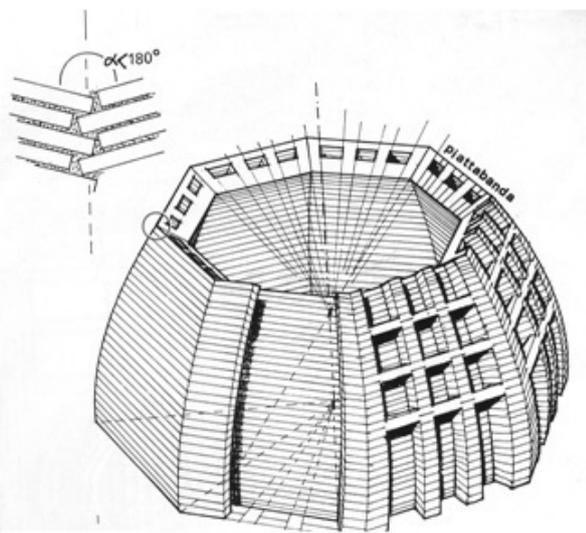
Per fare ciò, egli ha collocato i mattoni sempre perpendicolarmente alle linee meridiane (come nelle cupole di rotazione); in questo modo i mattoni si dispongono secondo quelle linee (dette *lossodromiche ortogonali*), che possiamo osservare sulla Cupola (le *corde blande*). In altre parole, le *corde blande* corrispondono ai paralleli delle cupole di rotazione: la differenza consiste nel fatto che in queste ultime essi sono, come dice il nome, paralleli al piano terra, mentre nella Cupola del Brunelleschi essi hanno l'andamento curvilineo che vediamo (Figure 10, 11).



**Figura 8:** Pergamena di Giovanni di Gherardo da Prato



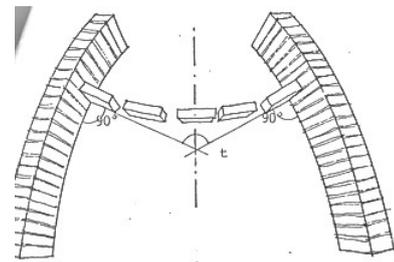
**Figura 10:** Disposizione dei mattoni nella Cupola di Santa Maria del Fiore.



**Figura 9:** Cupola ad anelli ottagonali.

Sono state elaborate diverse teorie riguardanti la tecnica usata dal Brunelleschi per disporre i mattoni a corda blanda; alla fine quelle più accreditate erano due: quella delle curve losso-dromiche (principalmente, Ximenes, Chiarugi, Quilghini, Rossi) [12, 14, 15] e quella delle curve ottenute come intersezione fra il cilindro e un cono variabile (Di Pasquale e altri)[1]. Notiamo che i sostenitori di queste teorie erano in forte contrasto fra loro, ciascuno ritenendo che soltanto la propria teoria fosse quella giusta.

Io ho tradotto in formule matematiche le due ipotesi per vedere quali risultati si ottenevano; sono così giunto ad una conclusione estremamente interessante: queste due teorie, pur essendo formulate con parole e sfumature diverse tra loro,



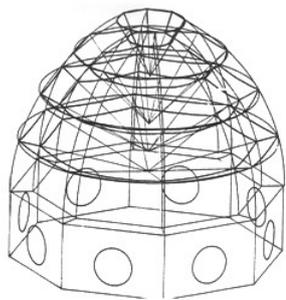
**Figura 11:** Mattoni disposti ortogonalmente alle linee meridiane.

tanto da renderle apparentemente differenti, danno lo stesso risultato e forniscono un andamento delle corde blande uguale a quello descritto in precedenza. Gli accurati rilievi eseguiti da me e dal Prof. Corazzi [2] hanno confermato che la Cupola reale coincide perfettamente con quella teorica ottenuta dalle suddette teorie; inoltre, in questo modo possiamo anche, come abbiamo fatto, provare che altre teorie sulla Cupola non hanno alcuna corrispondenza con l'oggetto reale.

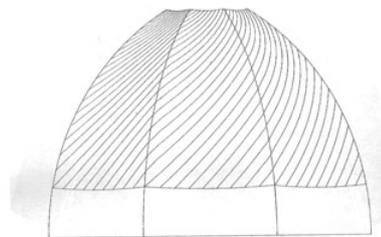
Dunque la matematica permette di studiare a fondo le varie teorie, se riusciamo, naturalmente, a metterle in formule. Possiamo, così, sapere quale può essere l'oggetto che si otterrebbe dall'applicazione pratica di ciascuna ipotesi, senza essere obbligati a costruirlo.

Per quanto riguarda i mattoni disposti a spina di pesce, notiamo che questi si sistemano secondo delle curve assimilabili ad eliche cilindriche ellittiche.

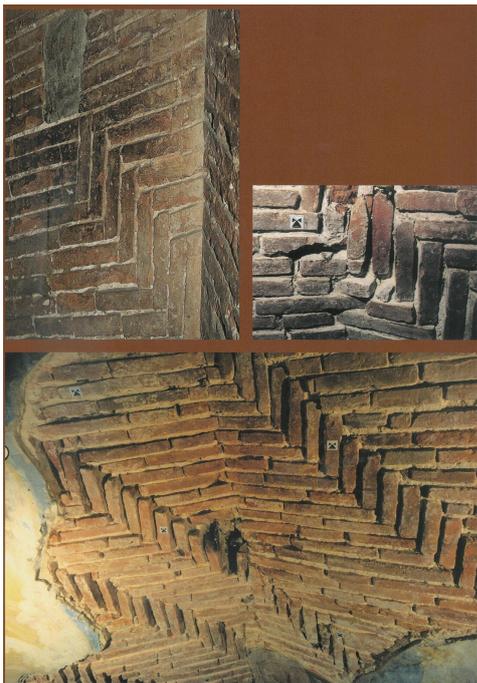
I mattoni disposti a spina di pesce nella Cupola hanno la stessa funzione di quella delle cupole di rotazione: servono ad impedire lo scivolamento



**Figura 12:** Corde blande ottenute come intersezione fra il cilindro e un cono variabile.



**Figura 14:** Mattoni disposti a spina di pesce nella Cupola del Brunelleschi.



**Figura 13:** Mattoni disposti a spina di pesce nella Cupola del Brunelleschi.

dei mattoni disposti a corda blanda durante la costruzione.

Anche la scala che porta in cima alla Cupola segue una curva ad elica, ma gira nel verso opposto a quella della spina di pesce. Ancora una volta questo fatto non è casuale, poiché in questo modo la struttura risulta rinforzata, esattamente come accade nelle doppie eliche del DNA o delle rampe di accesso allo stadio di Firenze.

Infine, concludiamo osservando che la matematica serve anche a comprendere più a fondo la bellezza della Cupola. Infatti, come abbiamo già detto, le proporzioni fra le misure delle varie parti che la compongono sono riconducibili alla sezione aurea: esso è il rapporto più frequente,

essendo il più armonioso che si usa (dall'antichità ai giorni nostri) in architettura e nell'arte in generale.



- [1] S. DI PASQUALE: *La costruzione della cupola di Santa Maria del Fiore*. Biblioteca Marsilio, Venezia (2002).
- [2] R. CORAZZI, G. CONTI: *Il segreto della Cupola del Brunelleschi a Firenze*. Angelo Pontecorboli Editore, Firenze (2011).
- [3] G. CONTI, R. CORAZZI: *La Cupola di Santa Maria del Fiore raccontata dal suo progettista Filippo Brunelleschi*. Edizioni Sillabe, Livorno (2005).
- [4] L. BARTOLI: *Il disegno della cupola del Brunelleschi*. Olschki, Firenze (1994).
- [5] E. BATTISTI: *Filippo Brunelleschi*. Electa, Milano (1989).
- [6] F. GURRIERI, "La cupola", in F. Gurrieri, G. Belli, A. Benvenuti Papi, R. Dalla Negra, Fabbri P., Tesi V., *La cattedrale di Santa Maria del Fiore a Firenze*, Cassa di Risparmio di Firenze, I, Firenze (1994) 81-135.
- [7] H. SAALMAN: *Filippo Brunelleschi. The cupola of Santa Maria del Fiore*. A. Zwemmer, London (1980).
- [8] G. LORIA: *Storia delle Matematiche. Dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*. Ulrico Hoepli Editore, Milano (1950).
- [9] C. B. BOYER: *Storia delle Matematiche*. Arnoldo Mondadori Editore, Milano (1980).
- [10] M. KLINE: *Storia del pensiero matematico. Volume primo. Dall'antichità al Settecento*. Giulio Einaudi Editore, Torino (1991).
- [11] W. FERRI, M. FONDELLI, P. FRANCHI, F. GRECO: "Il rilevamento fotogrammetrico della cupola di Santa Maria del Fiore", *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini dell' I.G.M.* XXX (1971) 158-184.
- [12] L. XIMENES: *Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino e delle osservazioni astronomiche, fisiche e architettoniche*. Stamperia Imperiale, Firenze (1757).
- [13] P. SANPAOLES: *La Cupola di Santa Maria del Fiore. Il progetto. La costruzione*. Edam, Firenze (1977).

- [14] A. CHIARUGI, D. QUILGHINI: "Tracciamento della cupola del Brunelleschi. Muratori e geometria", *Critica d'Arte* **XLIX**, s. IV, n. 3 (1984) 38-47.
- [15] P. A. ROSSI: *Le cupole del Brunelleschi. Capire per conservare*. Calderoni, Bologna (1982).



**Giuseppe Conti:** Giuseppe Conti è professore di Analisi Matematica presso il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica dell'Università di Firenze e di Istituzioni di Matematiche presso il Corso di Laurea in Architettura dell'Università di Firenze.

È autore di numerose pubblicazioni scientifiche di Analisi Funzionale non lineare su diverse riviste internazionali. Da tempo si interessa di applicazioni della matematica all'arte, alla musica, alla natura ed all'architettura. Su questi argomenti ha scritto diversi libri ed articoli su riviste specializzate; inoltre ha tenuto numerose conferenze presso università italiane e straniere ed in varie associazioni culturali. Egli è anche autore di numerosi libri di testo per l'università. Nel 2003 ha ricevuto il prestigioso Pirelli Award per la divulgazione scientifica tramite internet.



---

# Il complesso intreccio tra scienza ed arte

**Giuseppe Maruccio**

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi", NNL-CNR-Istituto di Nanoscienze

---

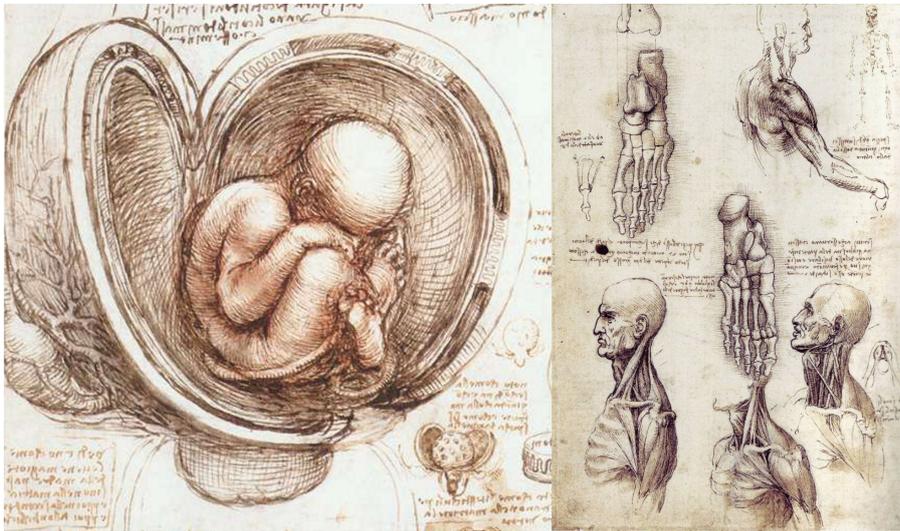
**A**ccostare scienza ed arte appare forse a molti una contraddizione. Tuttavia non si tratta di aree così distanti come spesso si immagina nell'opinione pubblica. Diversi sono i punti di contatto. Anche se molti artisti potrebbero probabilmente sentirsi lontani dal mondo scientifico, tanti altri ne sono affascinati e ne traggono ispirazione, nozioni e strumenti tecnici di lavoro. D'altra parte molti scienziati si sentono artisti del loro settore, della matematica, della fisica, della biologia, della ricerca in generale. Come diceva Einstein *"I grandi scienziati sono sempre anche artisti"*, mentre la figura di Leonardo mostra come i due mondi si possano coniugare armoniosamente assieme, come due sentieri verso un'unica destinazione. Certamente sia l'artista che lo scienziato sono accomunati da una passione simile per il loro lavoro e condividono il medesimo spirito di osservazione per il mondo che li circonda ed i suoi attori principali, siano questi uomini nostri simili, particelle elementari o batteri. Lo scopo di questo articolo è porre in risalto alcuni ambiti in cui arte e scienza si avvicinano, si sfiorano, si intersecano.

## Introduzione

È difficile immaginarsi uno scienziato con un pennello in mano oppure un artista con un camice da laboratorio o dietro un microscopio [1]. Tuttavia arte e scienza si intrecciano molto più di quanto si pensi comunemente. Non è inusuale imbattersi in scienziati affascinati dalle immagini acquisite con microscopi, telescopi e altri mezzi tecnologici o risultanti da più astratte funzioni matematiche. Sempre più ricercatori si diletano a partecipare a concorsi per immagini scientifiche che possono avere una bellezza seducente. Nessuno lo riconoscerà facilmente, ma la gradevolezza estetica di un'immagine può talvolta influenzare anche l'esito di una pubblicazione!

D'altra parte diversi artisti traggono fonte di ispirazione nella scienza e non si può certo trascurare lo studio quasi scientifico condotto da importanti pittori, scultori e architetti su materiali, anatomia e percezione. Ad esempio tutti conoscono gli studi anatomici condotti da Leonardo da Vinci nel Rinascimento (Fig.1), una figura che ben unisce i due mondi.

In fondo, scienza ed arte sono entrambi approcci con cui l'uomo si rapporta (investigando) col mondo esterno, la natura e le domande ultime che da sempre affascinano la nostra specie mediante un percorso fatto da idee, rappresentazioni, teorie e ipotesi testate in posti dove pensiero e manualità si incontrano. Nell'antica Grecia si usava la parola *techne* (da cui tecnica e tecnolo-



**Figura 1:** Schizzi di studi anatomici condotti da Leonardo da Vinci.

gia) con un significato ampio che comprendeva tanto l'arte quanto la tecnica.

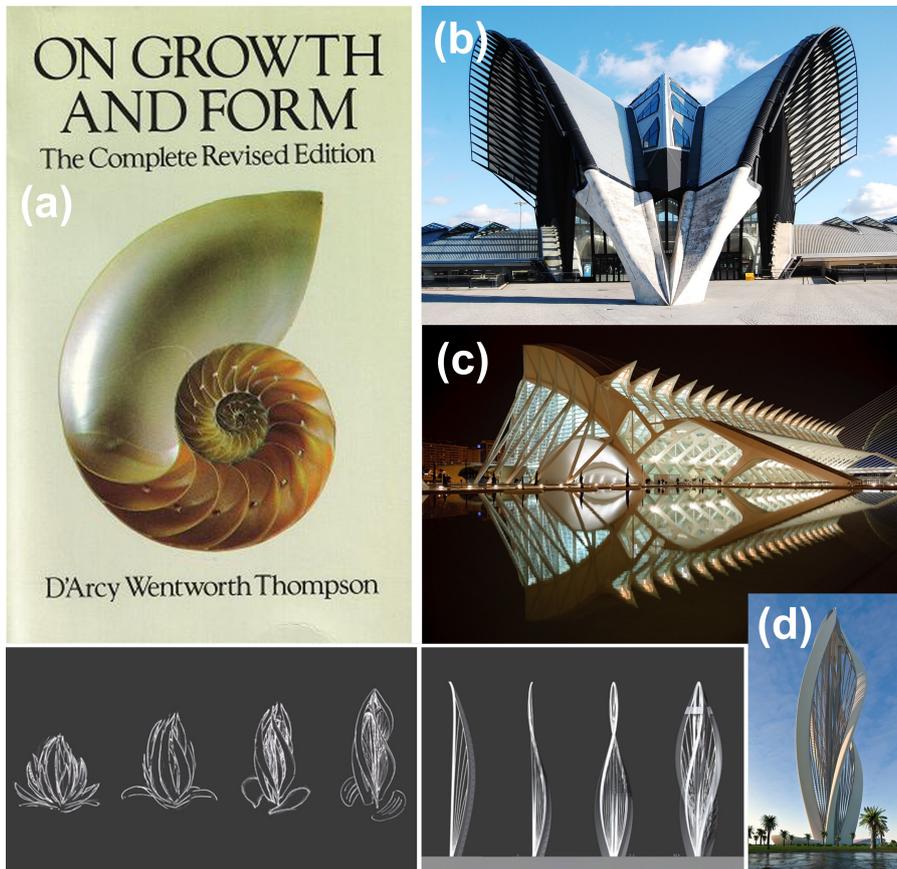
Questo articolo intende esaminare vari modi in cui scienza ed arte interagiscono ed è organizzato in quattro sezioni: 1. Scienza nell'arte, che tratta come concetti scientifici possano influenzare o essere ripresi nell'arte; 2. Scienza per l'arte, che descrive come la scienza (e la tecnica) possa essere sfruttata per produrre arte; 3. Arte nella scienza, in cui è analizzato l'aspetto artistico nascosto nella scienza, specie quella parte che lavora con immagini; 4. Arte per la scienza, in cui si discute come l'arte possa essere importante ed aiutare la scienza ad illustrare e descrivere particolari fenomeni in modo da renderli più facilmente intellegibili al pubblico sia specialistico che non. Talvolta i confini di questa classificazione sono tenui, ed un particolare esempio potrebbe rientrare in più di una sezione. Parlando di arte, numerose immagini saranno protagoniste di questo contributo.

## Scienza nell'arte – l'arte ispirata dalla scienza

Il libro *"On Growth and Form"* (*"Crescita e forma"* [2]), scritto nel 1917 dallo scienziato scozzese D'Arcy Wentworth Thompson (biologo, matematico e studioso classico) è stato considerato a lungo una bibbia dagli artisti del XX secolo ed è stato impiegato come libro di testo in vari corsi di architettura. Partendo dal Darwinismo, l'autore scozzese sostiene che l'influenza delle leggi fisiche sull'evoluzione è trascurata e po-

ne in risalto la somiglianza tra le forme di una medusa e quelle che si creano con la caduta di gocce all'interno di un liquido viscoso o più in generale tra forme riscontrate in biologia ed in fisica. *"In generale non esistono forme organiche se non quelle che sono in conformità con le leggi fisiche e matematiche"*, scrive. In altre parole, i fenomeni fisici possono influenzare la selezione naturale, guidando specie diverse lungo linee evolutive convergenti per quanto riguarda forme e funzioni. In maniera sorprendente, alcune relazioni numeriche in natura rispecchiano concetti matematici come la spirale logaritmica (anche detta *spira mirabilis*) e la sequenza di Fibonacci, che si possono riscontrare nella conchiglia di un nautilus (Fig.2a), nella crescita delle piante come in un ciclone, una galassia a spirale o una sezione del frattale di Mandelbrot. Sembra quindi vi sia un sottostante filo conduttore comune di carattere trasversale. L'arte non si sottrae a questo gioco di relazioni.

L'ispirazione naturalista è molto diffusa. Tanti dipinti, sculture, manufatti ed architetture richiamano forme presenti in natura. Il famoso architetto Santiago Calatrava scrive *"Per me ci sono due principi trascurati da rintracciare in natura che sono molto appropriati per gli edifici; uno è l'uso ottimale del materiale, l'altro la capacità degli organismi di cambiare forma, di crescere e muoversi"* [3]. La natura quindi come insegnante di design e progettazione. Si pensi allo scheletro ed alla sua evoluzione nelle varie specie animali per una ottimale distribuzione del peso e della gravità, aspetti che sono chiaramente di cruciale importanza anche in architettura ed ingegneria. Questa

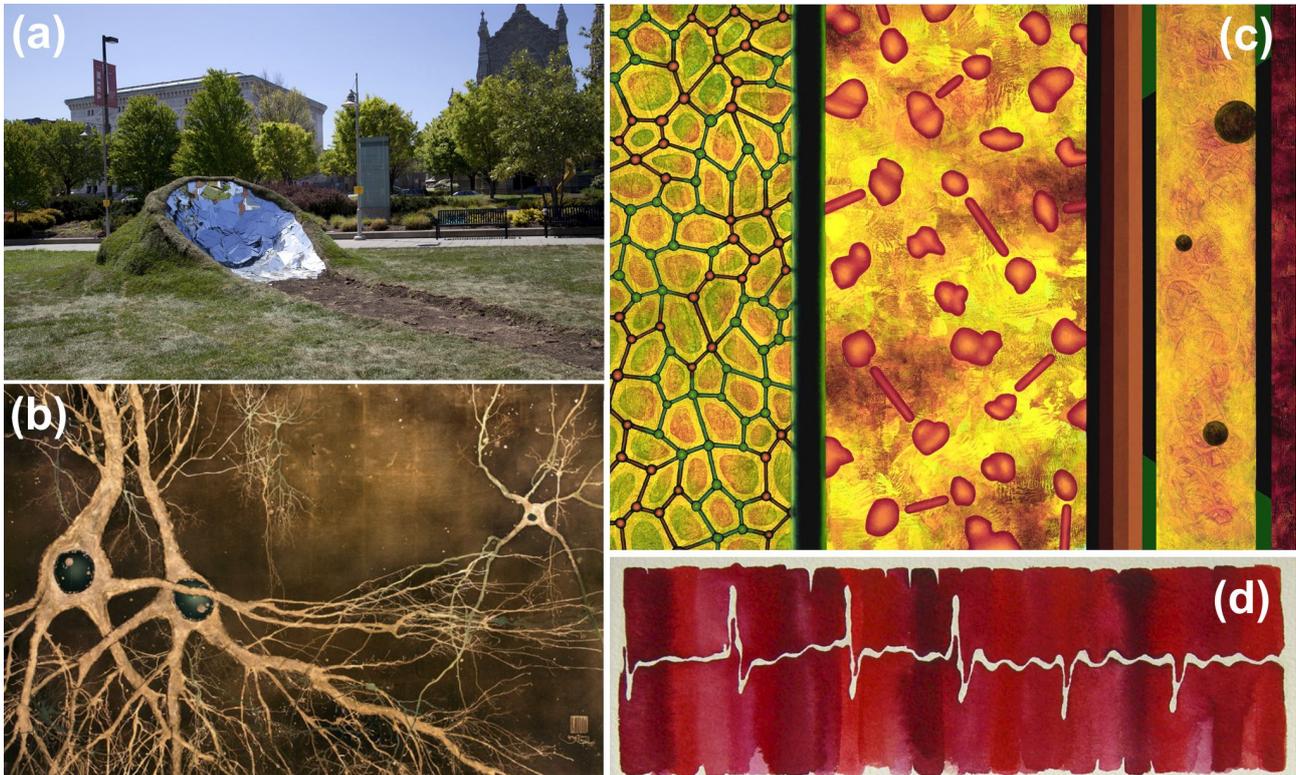


**Figura 2:** a) Copertina del famoso libro "On growth and form" di D'Arcy Wentworth Thompson. b) Stazione TGV presso l'aeroporto di Lione (Francia) e c) Museo della scienza presso la Città delle Arti e della Scienza a Valencia (Spagna), entrambe opere dell'architetto Santiago Calatrava. d) Blossoming Dubai, edificio progettato da Petra Architects.

filosofia si concretizza nelle opere di Calatrava (Fig.2b-c) come la Città delle Arti e delle Scienze a Valencia (con vari edifici ispirati ad un occhio gigante o allo scheletro di una balena) oppure la stazione aeroportuale di Lione che evoca nelle forme un uccello nell'atto di prendere il volo. La moderna architettura biomimetica [4] non si limita però a replicare forme naturali, ma si prefigge di comprenderne le regole sottostanti alla ricerca di soluzioni sostenibili presenti in natura, agendo su più livelli: quello dell'organismo (forme e/o funzioni), del comportamento (interazioni con l'ambiente) e dell'ecosistema (su scala urbana, piuttosto che sulla singola struttura). Altri esempi che si possono menzionare sono l'Opera House di Sidney che richiama le conchiglie marine oppure il Lotus Temple a New Delhi (India) ed il Singapore Art Science Museum che somigliano entrambi ad un fiore di loto, dal significato altamente caratterizzante per tutta la cultura orientale. Notevole è anche la Blossoming Dubai (Fig.2d) progettata per assomigliare ad un fiore che sboccia [5]. A chi vorrebbe obiettare che natura è diverso da scienza, si potrebbe poi senz'altro menzionare l'High Trestle Trail Bridge in Iowa (USA) che fa senz'altro pensare alla

matematica con le sue chiare forme geometriche, così come il cubo progettato da Soren Korsgaard [6].

Non è raro trovare opere d'arte di chiara ispirazione scientifica in cui concetti, forme ma anche teorie provenienti dalla scienza assumono forma artistica. Questo fenomeno è particolarmente vero nel caso di artisti contemporanei alla continua ricerca di fonti di ispirazione. Chiari richiami scientifici e naturalistici si trovano nelle interessanti opere di Jonathan Latiano [7], mentre Greg Dunn trae ispirazione dalle neuroscienze per le sue opere che ritraggono neuroni [8] (Fig.3a-b rispettivamente). Richard L. Dana [9], invece, è un artista autodidatta che ha più volte esibito le proprie opere a livello internazionale e che spesso ribadisce di essere un lettore di opere di divulgazione scientifica. La sua arte riflette questa predisposizione. L'opera intitolata "Le Voyage Fantastique" ("Il viaggio fantastico", 2010, acrilico su legno) (Fig.3c) appare come un viaggio dal microcosmo al macrocosmo, in cui l'osservatore è spinto ad immaginarsi questo percorso dall'immensamente piccolo (fatto di atomi) attraverso il mondo cellulare fino all'immensamente grande dei corpi celesti. Alcune bande verticali separa-



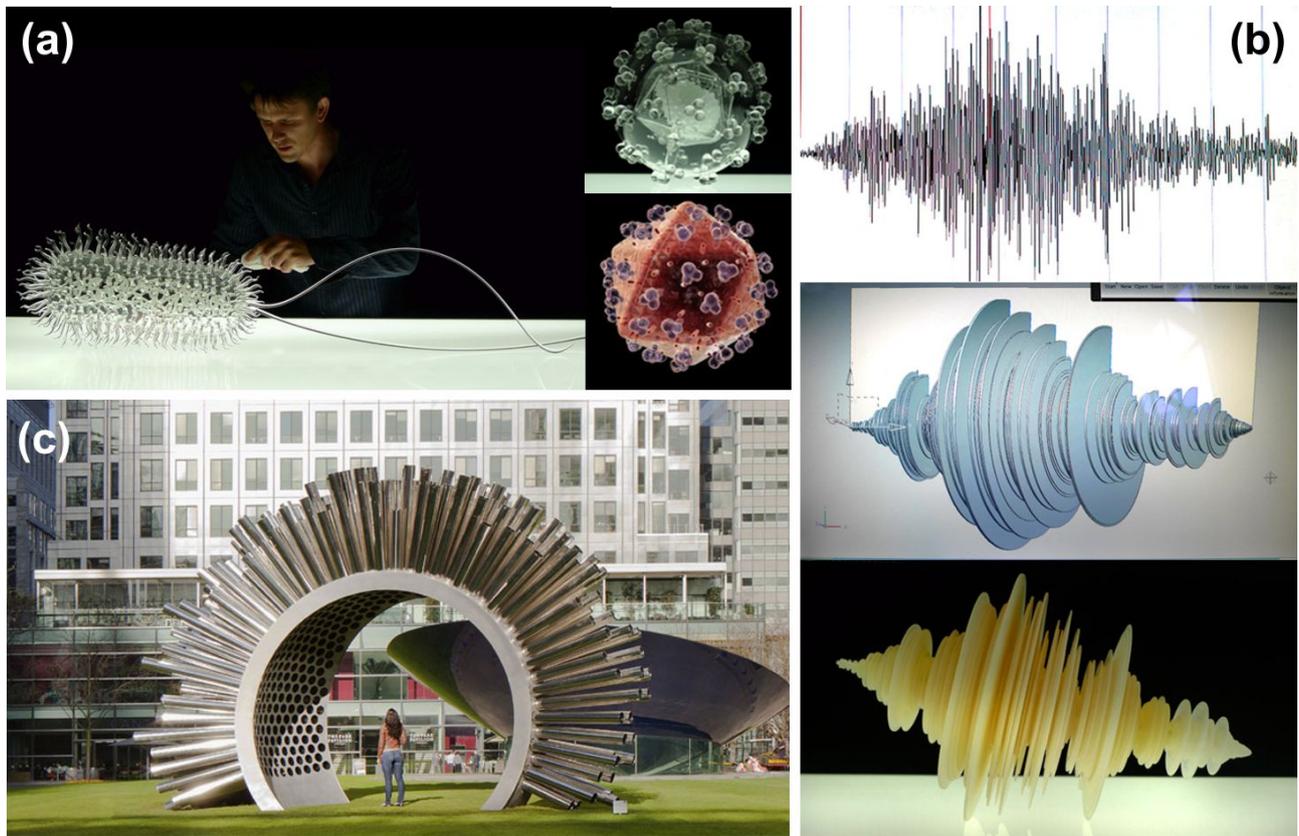
**Figura 3:** a) *Compacting factors*, opera di Jonathan Latiano. b) *Maki-e neurons*, opera di Gregg Dunn. c) *Le Voyage Fantastique*, 2010, acrilico su legno, opera di Richard Dana. d) *Elettrocardiogramma*, acquarello, opera di Michelle Banks.

no le diverse scale dimensionali ma il dipinto le racchiude in un tutt'uno perché in fondo sono vari aspetti di un'unica realtà. Gli elementi rappresentati sono schematizzati, stilizzati perché quello che conta qui è l'idea, il messaggio sottostante e non il dettaglio scientifico. Personalmente quest'opera mi fa pensare a quei video mostrati in programmi scientifici come Super-Quark che illustrano il modo in cui un oggetto appare ad ingrandimenti crescenti, ottenuti con l'ausilio di un microscopio elettronico.

Michelle Banks, anche lei autodidatta, trae invece la sua ispirazione dalla biologia ed i suoi acquarelli hanno un notevole successo di vendite in rete. I soggetti sono mitocondri, batteri o cellule varie viste al microscopio, processi di divisione cellulare ma anche elettrocardiogrammi (Fig.3d). Tra i suoi clienti, molti pazienti, dottori ed infermieri. Talvolta, in alcune opere, Michelle non si limita a riprodurre in forma artistica alcune immagini, ma vi aggiunge ulteriori livelli di lettura, come ad esempio in *Love and Death: Beauty* in cui volge lo sguardo a come l'essere innamorati si manifesta a livello cellulare [10].

Un caso esemplare del fascino che la scienza

può esercitare su un artista è il britannico Luke Jerram. La sua *glass microbiology* (*microbiologia in vetro*) dal 2004 ritrae soggetti che spaziano dall'*Escherichia coli*, a batteriofagi, adenovirus, il papillomavirus umano, il coronavirus della SARS, vari virus influenzali fino al temutissimo virus ebola. Una bella galleria di immagini può essere trovata sul suo sito [11] ed alcuni esempi sono riportati in Fig.4a. Noto è il contrasto tra la bellezza delle sculture e quello che rappresentano in termini di pericolosità per la salute dell'uomo. Alla loro progettazione hanno collaborato virologisti dell'Università di Bristol e queste realizzazioni sono state esposte ed usate spesso dalla comunità scientifica, anche in importanti riviste come Nature. Per l'artista, un motivo alla base della scelta del vetro è differenziarsi dalle tipiche rappresentazioni colorate dei virus (vedasi l'esempio in figura) per sottolineare la loro assenza di colore avendo dimensioni inferiori alle lunghezze d'onda del visibile. La sua opera però non finisce qui e meritano senz'altro di essere menzionate le cosiddette sculture sonore in cui invisibili onde vengono visualizzate come silenziose esperienze tridimensionali.

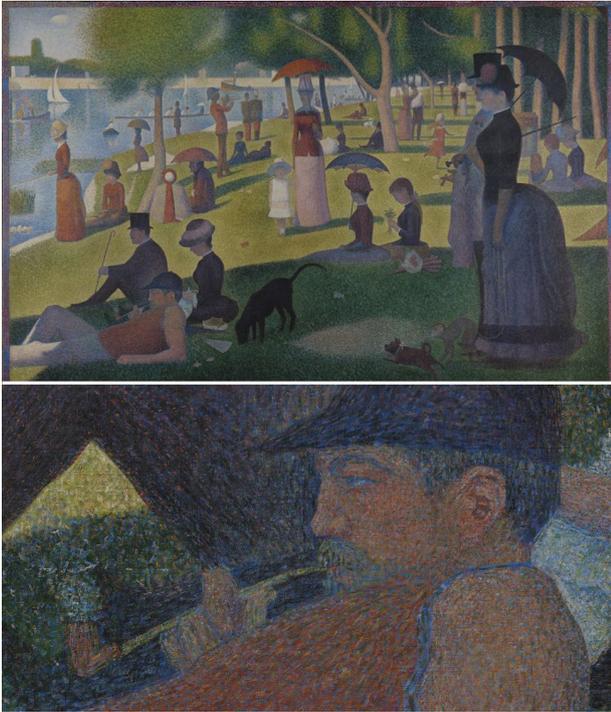


**Figura 4:** Alcune opere di Luke Jerram: a) Glass microbiology (*Escherichia coli*, in grande, e virus HIV assieme ad una sua immagine artistica di altro autore). b) Sismogramma del terribile terremoto giapponese del 2011, sua trasformazione in 3D per rotazione attorno ad un asse ed opera realizzata mediante stampa per prototipazione rapida. c) Aeolus, il suono del vento.

Luke Jerram ha dato forma artistica al terribile terremoto giapponese del 2011, causa di tante morti e dello tsunami che ha danneggiato la centrale nucleare di Fukushima. L'artista è partito dal sismogramma dell'evento, fornendogli una forma tridimensionale per rotazione attorno ad un asse e poi stampando il risultato mediante la tecnologia di prototipazione rapida (Fig.4b). Quest'opera appartiene ad una serie di sculture con tema la visualizzazione dei dati. Come afferma lo stesso autore, l'opera Aeolus, che riprende il nome del dio greco del vento, rappresenta invece un'investigazione nell'acustica, nel vento e nell'architettura con l'obiettivo di creare un padiglione capace di risuonare e suonare col vento (Fig.4c). La struttura ha la forma di un arco da cui partono vari tubi armonici aperti e la formazione di vortici porta a vibrare dei cavi tesi posti all'interno della struttura (un effetto noto come *von Karman vortex street effect*). Il risultato è che un ascoltatore posto al centro dell'arco può sentire la musica del vento! (i lettori sono invitati

a sentire l'audio disponibile sul sito dell'artista). Questo progetto è così intrigante che vi sono state varie installazioni.

Prima di passare alla prossima sezione, va detto che non sempre l'associazione arte e scienza è opera dell'artista, ma talvolta viene da un'interpretazione successiva come nel caso del dipinto di Salvador Dali intitolato "*Persistence of Memory*" (1931, olio su tela), che è spesso associato alla teoria della relatività di Einstein per via degli "*orologi molli*", che secondo Dawn Ades "*sono un simbolo inconscio della relatività dello spazio e del tempo, una meditazione surrealista sul crollo delle nostre nozioni riguardo ad un sistema cosmico immutabile*" [12]. Il richiamo è così forte che Ilya Prigogine chiese all'artista se effettivamente la teoria einsteiniana fosse legata al concepimento dell'opera. In realtà nel dipinto il tempo non è quello fisico, ma quello della memoria, meno definito e l'ispirazione per la sua rappresentazione veniva più semplicemente dall'osservazione del formaggio che si scioglie al sole!



**Figura 5:** *Un dimanche après-midi à l'Île de la Grande-Jatte*, opera di Georges Seurat, esempio della tecnica del puntinismo. Sul sito del progetto Google Cultural Institute [13] è possibile vedere l'opera digitalizzata a vari livelli di ingrandimento.

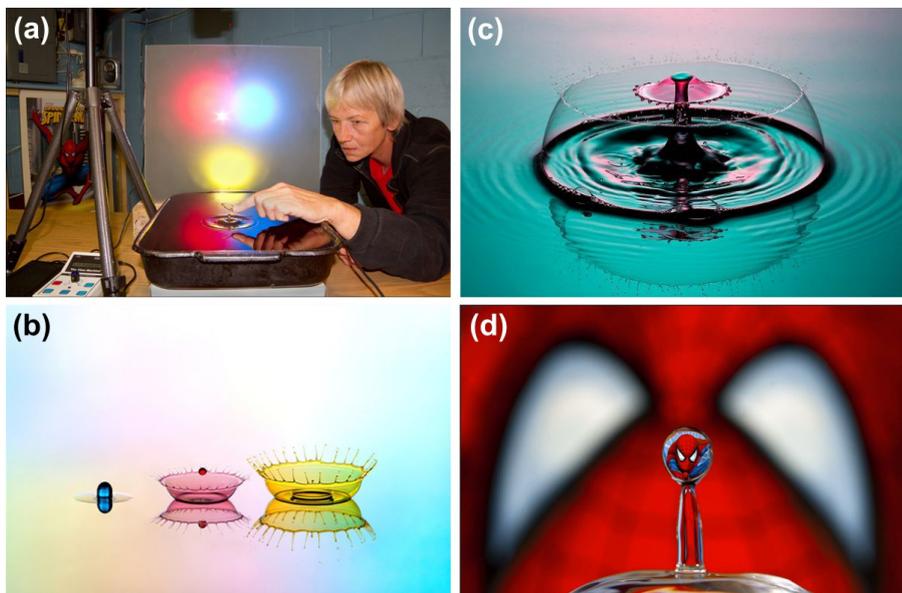
## Scienza per l'arte – l'arte creata con la scienza

L'innovazione scientifica (con quella tecnica che ne segue) ha sempre contribuito all'arte. Se è vero che a guidare la costruzione delle piramidi e delle cattedrali medievali era più l'esperienza di una scuola, quella dei maestri costruttori, che una teoria formalizzata in maniera scientifica, oggi le ardite creazioni delle cosiddette "archistar" non sarebbero possibili senza un approfondito studio per lo sviluppo di nuovi materiali ed una altrettanto scientifica progettazione mediante software agli elementi finiti capaci di risolvere complesse equazioni differenziali per fornire accurate simulazioni delle strutture. Inoltre nuove tecnologie permettono adesso di realizzare sugli edifici superfici autopulenti, capaci di non sporcarsi, oppure di stampare elementi costruttivi o di decoro con stampanti tridimensionali. Ma lasciamo una volta per tutte l'architettura per svolgere lo sguardo altrove.

La teoria del colore e della sua percezione ha influenzato notevolmente gli artisti Impressioni-

sti e Post-Impressionisti a cavallo del XIX e XX secolo. Fin da studente, il francese Georges Seurat, pioniere del movimento puntinista, era appassionato della teoria del colore e sperimentò a lungo il modo in cui il nostro apparato visivo lo percepisce mediante l'utilizzo di dischi cromatici in cui vari colori sono riportati sulla corona esterna. La tecnica pittorica che ne scaturisce si basa sulla mescolanza ottica, teorizzata dal fisiologo Heinrich Dove, e ne è un esempio il dipinto "Un dimanche après-midi à l'Île de la Grande-Jatte" (Una domenica pomeriggio sull'isola della Grande Jatte, un isolotto sulla Senna) (Fig.5). Quest'opera pittorica è composta da innumerevoli puntini monocromatici, che però sono visibili solo avvicinandosi, mentre ad una distanza maggiore la nostra percezione fa sì che punti vicini interagiscano e si fondano. La scelta dei colori da utilizzare segue regole ben precise: innanzitutto il colore dell'oggetto sotto una luce bianca, poi quelli della luce solare incidente e della sua parte assorbita e riflessa, infine una componente corrispondente alla luce riflessa dagli oggetti vicini. Questa procedura così precisa porta il critico d'arte Félix Fénéon a coniare il termine "Neoimpressionismo" per enfatizzare il suo carattere scientifico rispetto a quello romantico del movimento originale. Negli stessi anni i pittori impressionisti e neoimpressionisti beneficiarono anche dell'invenzione di colori premischiati e pigmenti sintetici da parte dei chimici francesi. Senza queste scoperte, pittori poveri come Monet e Seurat non avrebbero potuto operare, se si pensa ad esempio che il blu oltremarino era precedentemente realizzato con costosa polvere di lapislazzuli.

Alcune forme d'arte, poi, nascono col progresso scientifico. La fotografia in un certo senso sfida l'artista (il pittore) nel suo compito di riprodurre il mondo che ci circonda spingendolo verso nuove sperimentazioni (meno legate al realismo), ma d'altra parte quanta arte c'è dietro l'opera dei grandi fotografi capaci di cogliere e fissare per sempre un momento particolare, un'emozione vivida, una cultura vicina o lontana oppure un habitat naturale o cittadino. A tutto questo, il cinema aggiunge un'ulteriore variabile, il tempo, permettendo di trasmettere e scolpire nella nostra memoria vicende, tradizioni e storie, reali e non, talvolta con un ulteriore supporto scientifico esterno per riprese aeree (con droni)

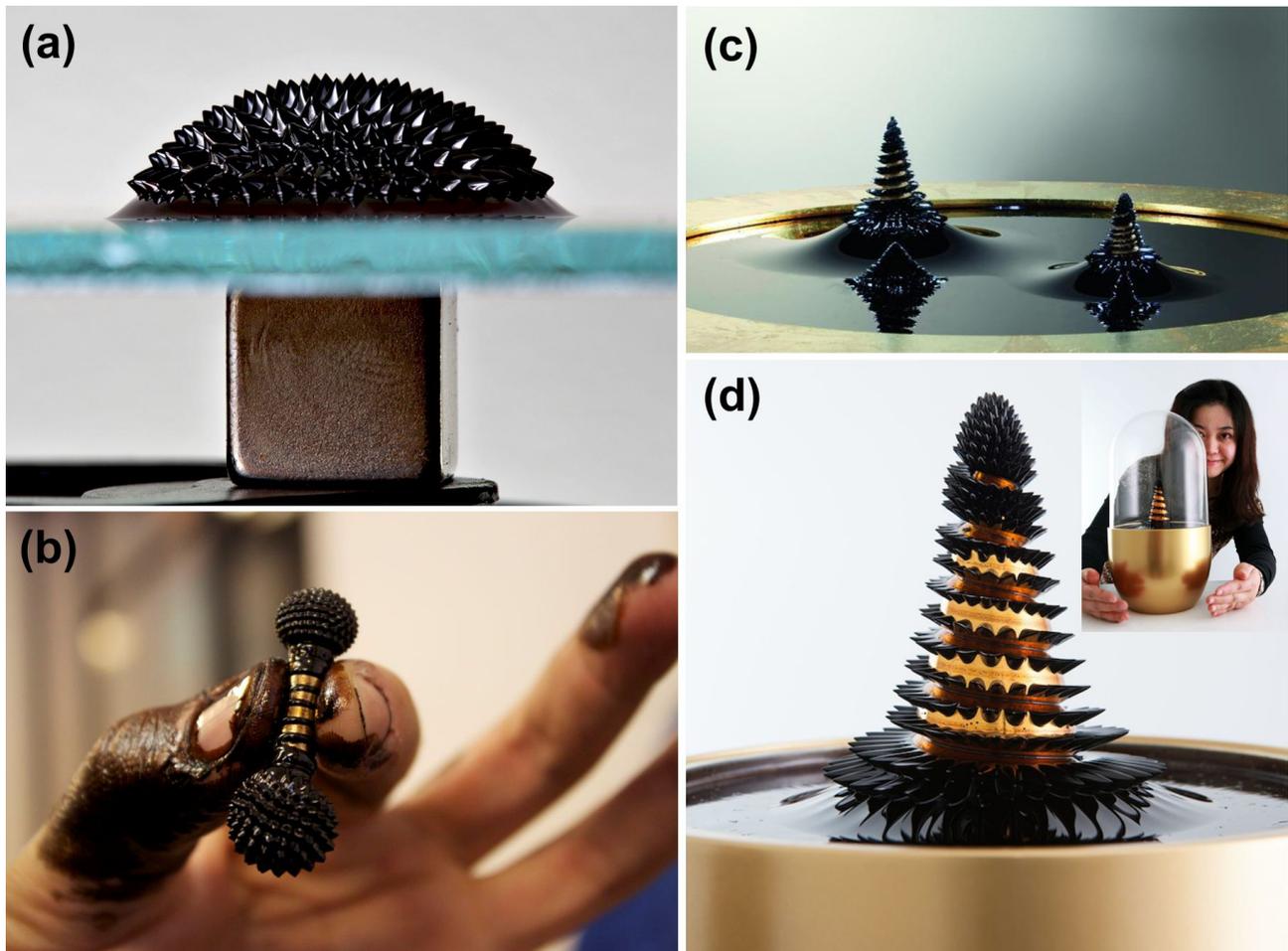


**Figura 6:** Alcune opere dell'artista Corrie White: a) *Artist at play*, b) *Progression*, c) *Liquid drop art*, d) *Spiderman*.

oppure per riprodurre effetti speciali o credibili ambientazioni futuristiche.

Tornando alla fotografia, è interessante menzionare l'opera di Corrie White, un'autodidatta di origine olandese, la cui passione sono le gocce! La particolarità sono le varie, uniche forme dall'affascinante simmetria che queste possono assumere sotto l'azione delle forze meccaniche che governano il moto del liquido. Si tratta di particolari che sfuggono all'occhio umano, ma che è possibile cogliere con una buona e veloce macchina fotografica. Per il resto non serve attrezzatura particolarmente complessa. I liquidi impiegati sono acqua, latte, caffè, tè o creme, colorate con vari coloranti per cibo o gels o luci. Le gocce possono invece essere ottenute mediante un dispensatore medico oppure, volendo essere più tecnologici un kit apposito come quello della MJKZZ [14]. In Fig.6a, si può vedere l'artista all'opera intenta ad indicare col dito una struttura fluida che si evolve nella bacinella, mentre tre luci (rossa, blu e gialla) la illuminano colorandola con svariate sfumature. Il processo alla base della formazione di queste delicate strutture si può vedere in Fig.6b dove sono ritratte varie fasi temporali. Inizialmente (a sinistra), si può notare una goccia (blu) che impatta sulla superficie liquida. A questa fase, tipicamente segue la formazione di una specie di bacinella con una goccia più piccola che sembra rimbalzare in alto (vedasi l'immagine centrale in rosso). Infine la bacinella si allarga e la goccia ricade sparendo nel "mare" liquido (figura a destra, in giallo). In

tutti i casi si può notare il riflesso impresso nel liquido sottostante, che abbellisce ulteriormente il tutto. Un'altra immagine notevole è riportata in Fig.6c dove un fungo colorato sembra emergere dalla superficie liquida mentre varie onde concentriche si allontanano dal punto di impatto ed una corona sferica sembra formare un recinto di protezione attorno alla delicata struttura centrale. Si noti la somiglianza delle forme con varie strutture biologiche (funghi, meduse, ...) come osservato da Thompson. Le varianti sono innumerevoli a seconda dell'istante dello scatto, del numero di gocce, del numero di esposizioni, dei colori o delle luci impiegate, della viscosità dei liquidi, etc. Si possono trovare vari esempi sul sito della White [15]. Un'ulteriore dimostrazione di come si possa giocare con gocce, fotografia e fisica (ottica) è riportata in Fig.6d, dove si può vedere nella goccia l'immagine dell'uomo ragno che deriva dalla rifrazione dei raggi luminosi provenienti dall'immagine più grande (e capovolta) sul retro attraverso la goccia che agisce da lente. Un fenomeno che i nostri studenti di fisica sono abituati a studiare nei laboratori del secondo anno. Chi fosse interessato a maggiori dettagli o ad istruzioni per riprovare a casa, è invitato a visitare il sito e/o a leggere il libro della White: *"The Ultimate Guide to Water Drop Photography"* [16]. Oltre alle gocce, altri fotografi si sono dilettrati con le particolari forme che si possono riscontrare ad esempio nel residuo lasciato dal whisky che evapora [17], ma andiamo a vedere ora qualcosa di più scientifico e nanotecnologico.



**Figura 7:** a) e b) Ferrofluidi influenzati da magneti permanenti. c) e d) alcune opere di Sachiko Kodama.

Pochi lettori probabilmente conoscono cosa sia un ferrofluido. Come la parola stessa suggerisce si tratta di un qualcosa che combina le proprietà di un fluido (e quindi l'abilità di cambiare forma) con quelle del ferro, in particolare le sue proprietà (ferro)magnetiche. L'invenzione dei ferrofluidi si può far risalire al 1963 ed alla ricerca dello scienziato della Nasa Steve Papell su nuovi carburanti liquidi per razzi, che potessero essere guidati in assenza di gravità mediante un campo magnetico. Dal punto di vista della composizione, si tratta di sospensioni colloidali composte da nanoparticelle superparamagnetiche (cioè non capaci di preservare una magnetizzazione in assenza di un campo esterno) tipicamente sospese in un solvente organico. È però importante che vi siano dei surfattanti (in pratica dei *saponi*) legati sulla superficie di queste particelle in modo da inibire la formazione di aggregati, indebolendo le forze magnetiche di attrazione fino al punto da riuscire a mantenere isolate le particelle. È altresì importante che le

dimensioni siano su scala nanometrica (10 nm o anche meno) in modo che siano sospese nel liquido per agitazione termica in un moto browniano senza precipitare (come invece accade nei fluidi magnetoreologici costituiti da particelle micrometriche). Tipicamente le nanoparticelle sono composte da ossidi di ferro (magnetite o ematite). Le applicazioni dei ferrofluidi spaziano su vari settori, dalla già citata propulsione spaziale, all'ingegneria meccanica (per la capacità di ridurre l'attrito), la scienza dei materiali, l'elettronica, l'ottica adattativa nei telescopi, la strumentazione analitica ed applicazioni biomediche (come mezzi di contrasto nella risonanza magnetica o per terapie basate sull'ipertermia indotta da campi magnetici alternati).

Ma cos'hanno di così particolare questi ferrofluidi e perché ne stiamo parlando qui? Tutto dipende dalla loro risposta in presenza di un campo magnetico esterno. In queste condizioni, un ferrofluido tende ad assumere una forma tale da rispondere al campo ed assumere la configu-

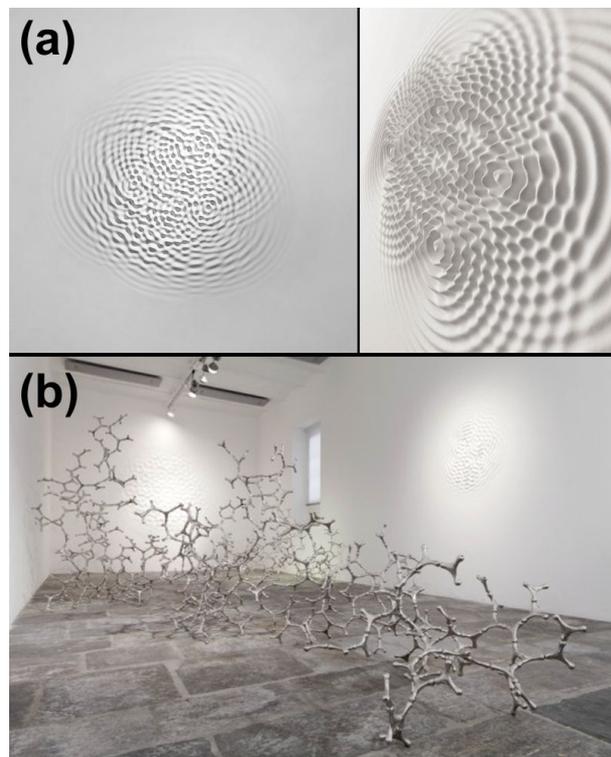
razione di minima energia totale per il sistema. In particolare, se da una parte gravità e tensione superficiale spingono verso una superficie piana che minimizzi l'area, dall'altra un fenomeno noto come "normal-field instability" ("instabilità al campo normale") favorisce la formazione di un susseguirsi regolare di picchi e valli. Di conseguenza esiste un campo magnetico di soglia per la formazione delle corrugazioni sulla superficie ma questo è particolarmente piccolo per un ferrofluido a causa della sua elevata suscettività magnetica per cui un magnete permanente è sufficiente per superarlo, come illustrato in Fig.7a-b. Facendo passare correnti sufficientemente alte, possono essere impiegati anche elettromagneti.

La storia di Sachiko Kodama, giapponese, si intreccia con quella dei ferrofluidi [18]. Da sempre attratta sia dall'arte che dalla scienza, Sachiko, dopo una laurea (di primo livello) in fisica, sposta i suoi studi fino al dottorato su arte e design e nel 2000 inizia la sua opera con i ferrofluidi che innalza a mezzi artistici col progetto "Protrude, Flow". Variando il campo magnetico col tempo, si possono indurre i ferrofluidi a muoversi e danzare come acqua in una fontana. In Fig.7c-d sono riportate alcune immagini. La cosiddetta arte ferrofluida sta recentemente facendo vari proseliti e le opere della Kodama sono state esposte in vari musei in Giappone, USA, Spagna, Taiwan. Su internet (e youtube) si possono trovare numerosi video dimostrativi ed anche indicazioni su come realizzare un ferrofluido in modo semplice.

Infine è interessante menzionare alcune opere dell'italiano Loris Cecchini [19] (Fig.8) che ad un fisico fanno immediatamente pensare a figure di interferenza, mentre (altre opere) possono richiamare struttura vagamente molecolari ad un chimico.

## Arte nella scienza – scienziati che giocano a fare gli artisti

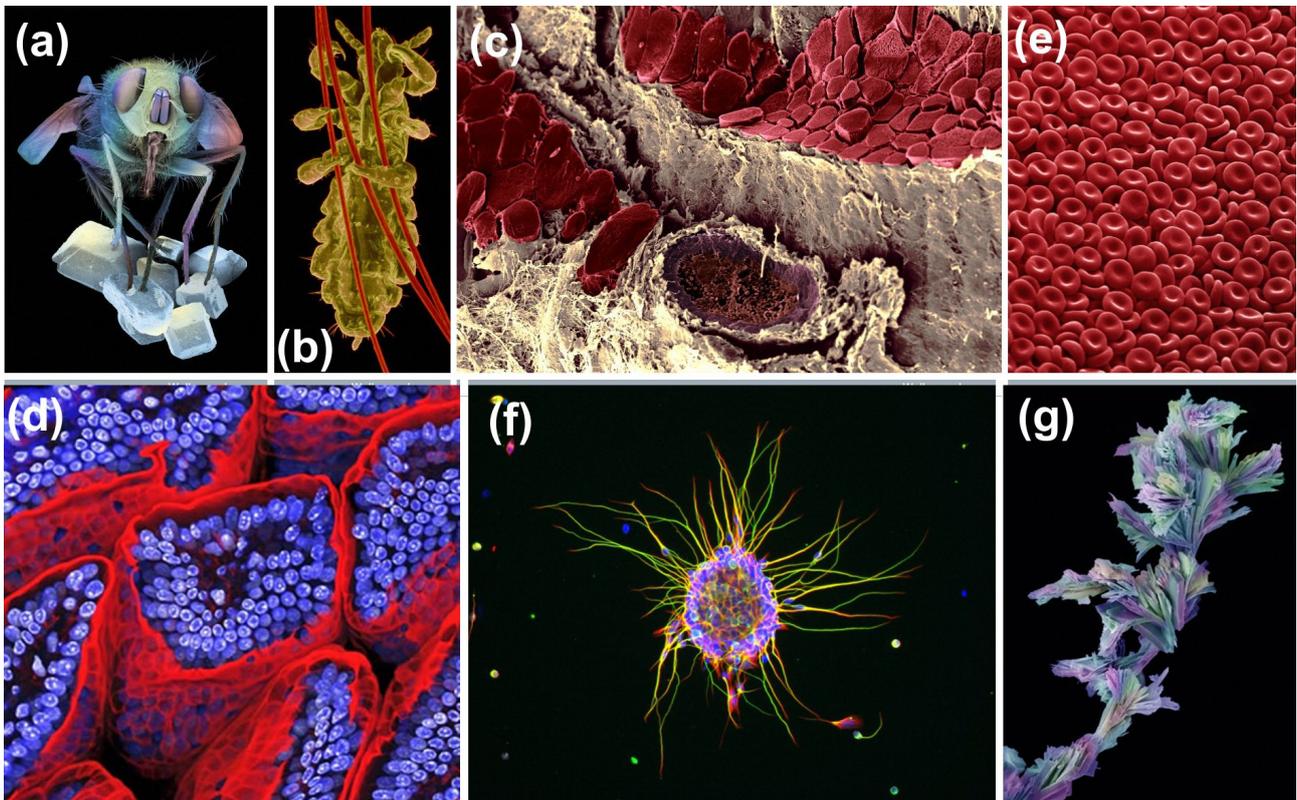
Abbiamo visto come gli artisti siano affascinati dalla scienza e ne richiedano spesso il supporto. Gli scienziati però non sono da meno quanto ad attrazione per l'arte, ma facciamo una breve premessa. In molti settori scientifici, le immagini sono uno strumento essenziale per la ricerca, la visualizzazione, l'analisi e la presentazione dei



**Figura 8:** Alcune opere di Loris Cecchini che richiamano a) figure di interferenza, b) molecole organiche.

risultati. Una rappresentazione grafica è infatti di più immediata comprensione rispetto ad una tabella di dati o ad un'equazione. Spesso queste immagini restano nascoste all'interno dei laboratori di ricerca o tra una ristretta cerchia di addetti ai lavori, però possono avere una bellezza artistica capace di renderle interessanti ad un più vasto pubblico indipendentemente dal significato scientifico sottostante. Le citate tesi di Thompson hanno ispirato da tempo varie esibizioni in cui attraenti immagini scientifiche (biomediche) erano esposte al fianco di opere d'arte con una chiara influenza scientifica. Il pubblico si soffermava pressoché col medesimo interesse vicino alle une quanto alle altre. Più recentemente, vanno invece moltiplicandosi gli eventi in cui uomini di scienza si sfidano per un premio artistico. Facciamo alcuni esempi concreti.

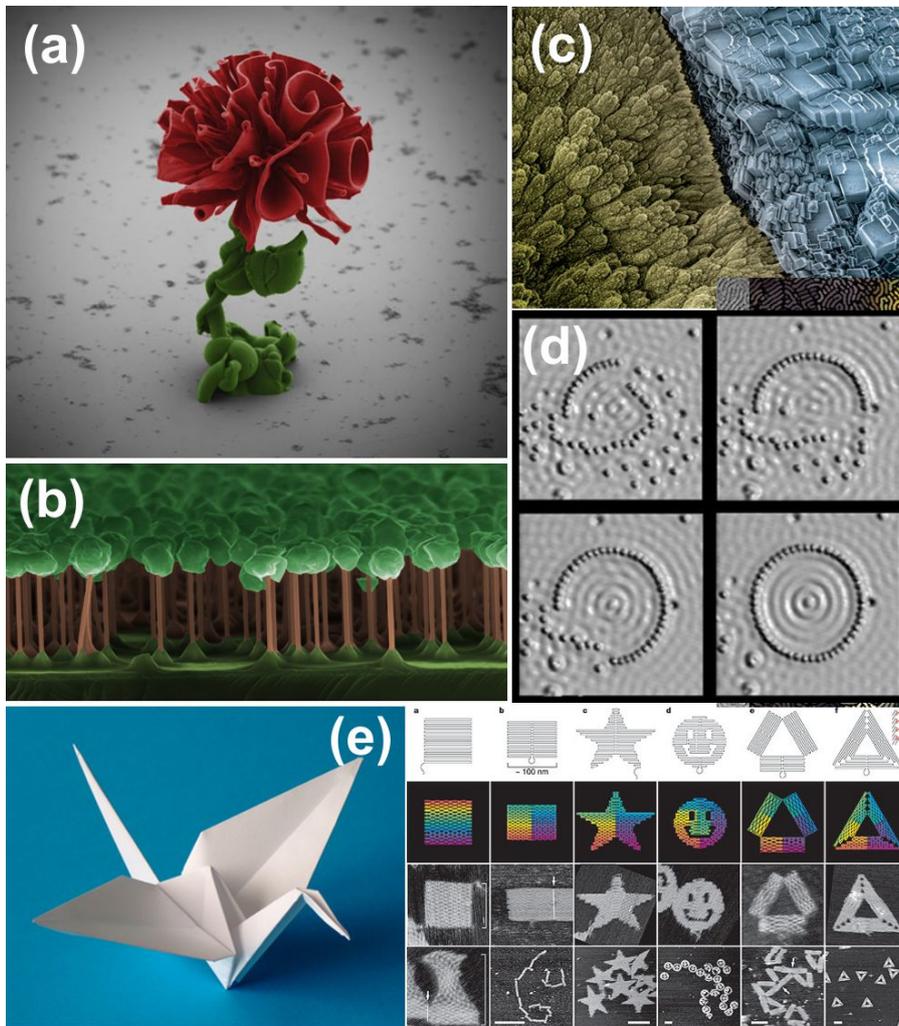
Chi sopporta senza fastidio gli insetti? Spesso pensiamo a loro con disturbo. Una mosca, una zanzara, o addirittura un parassita... Le loro immagini al microscopio elettronico sono però di gradevole bellezza. In Fig.9a-b, sono riportate delle scansioni al microscopio elettronico di una mosca aggrappata a cristalli di zucchero (An-



**Figura 9:** Esempi di immagini premiate al Wellcome Trust Biomedical Image Awards: a) una mosca aggrappata a cristalli di zucchero (Annie Cavanagh, 2008, microscopio elettronico), b) un pidocchio afferrato ad alcuni capelli (Garry Hunter, 2005, microscopio elettronico), c) sezione di muscolo di una coscia di maiale (SEM, David Gregory e Debbie Marshall, 2006), d) villi del piccolo intestino osservati al microscopio confocale (Paul Appleton, confocale, 2009), e) globuli rossi (Annie Cavanagh, SEM, 2006), f) colonia di neuroni (Ludovic Collin, confocale, 2006), g) cristalli di aspirina (Annie Cavanagh, SEM, 2006).

nie Cavanagh, 2008, microscopio elettronico) e un pidocchio afferrato ad alcuni capelli (Garry Hunter, 2005, microscopio elettronico). Anche tessuti organici possono esercitare il loro fascino come illustrato in Fig.9c-d nel caso della sezione di muscolo di una coscia di maiale vista al SEM (microscopio elettronico a scansione, David Gregory e Debbie Marshall, 2006) o dei villi del piccolo intestino osservati al microscopio confocale (Paul Appleton, confocale, 2009). Non sono da meno le cellule: il tappeto di globuli rossi (Annie Cavanagh, SEM, 2006) e la colonia di neuroni (Ludovic Collin, confocale, 2006) in Fig.9e-f attirano certamente l'attenzione, specialmente dei biologi. L'ultima figura (Fig.9g) si riferisce invece a cristalli di aspirina (Annie Cavanagh, SEM, 2006). Tutte queste immagini provengono dal sito dedicato al *Wellcome Trust Biomedical Image Awards* [20], un premio che si ripete con cadenza pressoché annuale nel posto in cui ci fu una delle prime esposizioni dedicate a Scienza ed Arte, ispirata dal lavoro di D'Arcy Wentworth

Thompson. Qualche considerazione è d'obbligo: l'autore delle immagini al microscopio elettronico non è passivo ma ci mette del suo, poiché queste sono proposte in falsi colori in quanto questo strumento non vede la luce. Infatti si tratta, in un certo senso, di un'evoluzione di un microscopio ottico che utilizza un fascio di elettroni per superare i limiti intrinseci legati alla diffrazione di una radiazione luminosa e permettere di ottenere risoluzioni dell'ordine di pochi nanometri. Inoltre la sua elevata profondità di campo consente di ottenere una notevole nitidezza anche in presenza di forti corrugazioni, quando invece un'immagine ottica ad elevato ingrandimento mostrerebbe generalmente alcune zone sfuocate. Il microscopio confocale invece permette di migliorare la risoluzione ed il contrasto di un'immagine ottica rimuovendo la luce da piani fuori fuoco ed in questo caso i colori possono essere correlati a quelli della radiazione luminosa effettivamente emessa (es. rossa o blu) dai fluorofori aggiunti al campione per evidenziare particolari



**Figura 10:** a) Microfiori di carbonato di bario e silice (2013, Wim Noorduin, Harvard University, USA), b) Reticolo di nanowires di GaAs/GaInP assomigliante ad una nanoforesta (2012, Daniel Jacobsson, Lund University, Sweden), c) forme polimorfiche di  $\text{CaCO}_3$  (2014, Casper Ibsen, Aarhus University, Denmark), d) confinamento di elettroni in quantum corrals [Science 262, 218-220 (1993)], e) Origami e DNA origami.

regioni o processi cellulari.

Oltre al settore biologico, questi strumenti sono altresì impiegati nella fisica e nelle nanoscienze ed anche qui forniscono immagini intriganti, oggetto di competizioni artistiche come quella della *Material Research Society* intitolata *Science as art* (*Scienza come arte*). Le gallerie disponibili sul sito web relative ai vari anni di concorso presentano immagini molto belle tra cui è difficile fare una selezione [21] (Fig.10a-c). In alcuni casi, le forme, adiuvate dai falsi colori, richiamano microfiori (di carbonato di bario e silice; 2013, Wim Noorduin, Harvard University, USA) oppure nanoforeste (come nel caso dell'array di nanowires di GaAs/GaInP cresciute per epitassia da fase vapore a partire da un seme di oro). In quest'ultimo caso i (falsi) colori verde chiaro e marrone rappresentano rispettivamente le zone di GaInP e GaAs, la cui composizione è stata accertata mediante spettroscopia a dispersione di energia (2012, Daniel Jacobsson, Lund Universi-

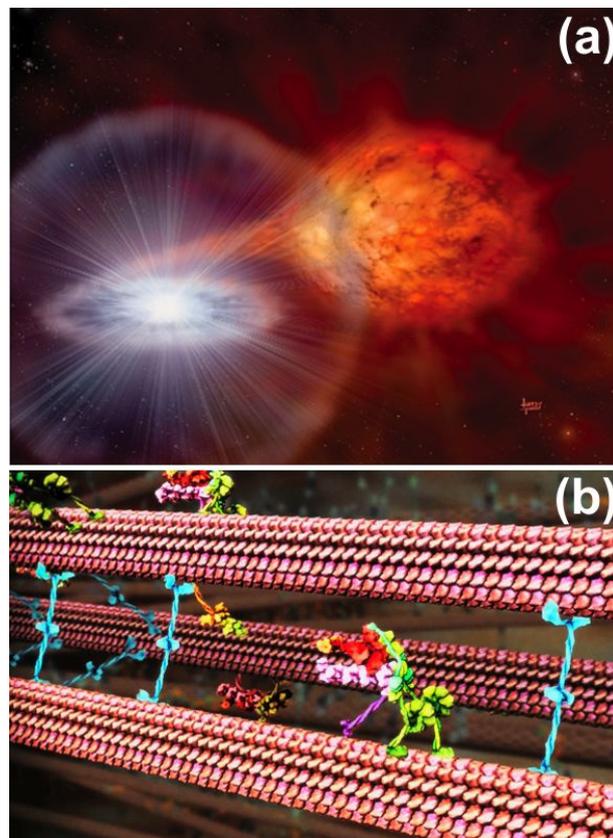
ty, Sweden). L'immagine in alto a destra mostra invece forme polimorfiche di  $\text{CaCO}_3$ , col passaggio da vaterite (sinistra) alla più stabile calcite (destra) (2014, Casper Ibsen, Aarhus University, Denmark). Chi avrebbe mai considerato un microscopio come uno strumento artistico oppure un insetto, un tessuto, una cellula, un cristallo o nanoparticelle come modelli?

Per l'invenzione del microscopio elettronico è stato assegnato il premio Nobel per la Fisica ad Ernst Ruska nel 1986, ma quell'anno sono stati insigniti della medaglia anche Gerd Binnig e Heinrich Rohrer per l'invenzione del microscopio ad effetto tunnel (STM), il cui sviluppo ha dato un forte contributo all'avvio delle nanoscienze e delle nanotecnologie. Difatti, quest'ultimo sfruttando un fenomeno quantistico noto come effetto tunnel permette di visualizzare e manipolare addirittura i singoli atomi. Nell'immagine in Fig.10d si vede questo processo applicato ad atomi di ferro inizialmente depositati in maniera

disordinata su un substrato di rame e poi spostati uno per uno per formare un cerchio al cui interno si possono vedere delle onde stazionarie dovute agli stati degli elettroni in superficie, che sono simili alle onde che si creano quando si getta un sasso in una bacinella (riflettendosi sulle pareti). Questo fenomeno non avviene se il cerchio è incompleto!

L'STM ha una limitazione importante in quanto richiedendo il passaggio di una corrente elettrica non può essere applicato a campioni isolanti. Per superare questo limite è stato quindi inventato il microscopio a forza atomica (AFM) che appartiene alla stessa classe dei microscopi a scansione, in quanto come per l'STM si utilizza una sonda che si muove sul campione con estrema precisione mediante uno scanner piezoelettrico, misurando nel contempo una forza (invece che una corrente come per l'STM). Quindi anche qui non si utilizza luce, ma è un po' come andare in una stanza buia e usare il tatto per ricostruire una superficie sentendo la forza che questa esercita sui polpastrelli delle nostre dita. Alcune immagini AFM di filamenti di DNA ripiegati sono mostrate in Fig.10e. Si tratta dei cosiddetti DNA origami, una parola composta da un termine di origine giapponese che si riferisce all'arte di piegare la carta, mentre DNA sta ad indicare che il materiale base non è un foglio ma un filamento di acido desossiribonucleico (la molecola della vita) la cui sequenza è stata opportunamente progettata in termini di basi e segmenti complementari in modo da ibridarsi con se stessa e ripiegarsi per assumere una ben definita forma (quadrati, rettangoli, stelle, simpatiche faccine, etc). Sembra un gioco (tipo lego), ed in effetti un po' lo è, ma i ricercatori sono interessati a testare i meccanismi con cui il DNA si ripiega in vista di possibili applicazioni per realizzare capsule/nanorobots capaci di trasportare farmaci nel corpo umano e di aprirsi quando richiesto in seguito al riconoscimento di un obiettivo biologico (es. una proteina). Le porte possono essere infatti codificate mediante aptameri (molecole recettori artificiali costituite anch'esse da acidi nucleici) capaci di aprirsi riconoscendo specifici antigeni (legati ad esempio ad un tumore) che agiscono come chiavi.

Infine, non ci soffermeremo, ma notevoli sono anche le immagini astronomiche come quelle di



**Figura 11:** a) Illustrazione del disco di accrescimento atomico attorno ad una nana bianca, opera di David A. Hardy [25]. b) Rappresentazione del movimento della kinesina lungo un microtubulo, opera di Drew Berry [26].

origine matematica (es. [22], [23], [24]).

## Arte per la scienza

Immagino che molti dei lettori siano appassionati di scienza, per lavoro, interesse culturale o semplice curiosità. Leggendo articoli scientifici o di divulgazione o dovendo spiegare un concetto ai propri studenti o ad un pubblico più vasto gli sarà talvolta capitato di trovare arduo questo compito. Un'immagine o un video illustrativo possono aiutare notevolmente, specie quando il concetto si fa astratto o lontano dalla nostra comune percezione del mondo che ci circonda. Questo può capitare quando si parla di fisica quantistica, come degli invisibili processi biologici che avvengono in una cellula o di quelli astrofisici fuori dalla nostra portata perché troppo distanti.

Da adolescente, appassionato di astronomia, trovavo affascinanti le immagini di mondi alieni

con pianeti orbitanti attorno a stelle multiple o lune attorno a giganti gassosi con anelli simili al nostro Saturno come anche le istruttive immagini sulla struttura interna dei pianeti, sulle varie fasi di formazione di un sistema solare, sulla vita di una stella. Ad esempio in Fig.11a è illustrato il fenomeno di accrescimento di un oggetto compatto (una nana bianca) a scapito di una compagna di maggiori dimensioni (una gigante rossa). Un processo che può culminare con lo scoppio di una supernova (di tipo Ia) se la massa delle nana bianca supera un valore critico noto come limite di Chandrasekhar.

Oggi, per lavoro, mi capita più spesso di visualizzare spiegazioni su processi biologici con motori molecolari, replicazione di DNA, contrazione di muscoli, ... ed immagini (o video) come quella in Fig.11b sono molto esplicative per chi non ha approfondito ulteriormente la biologia oltre agli studi di liceo.

Certo a volte queste rappresentazioni richiedono approssimazioni o ipotesi che possono essere non del tutto sostenute da certezze scientifiche. Tuttavia a mio avviso, un buon seminario divulgativo non sarebbe possibile senza questo ausilio artistico. Se qualche dettaglio è trascurato, almeno il messaggio, il concetto fondamentale può raggiungere ed essere trasmesso molto più facilmente al nostro interlocutore, con (ovviamente) le opportune precauzioni e raccomandazioni.



[1] <http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/1192358.stm>

[2] D'ARCY WENTWORTH THOMPSON: *On Growth and Form*. Cambridge University press (1917).

[3] ALEXANDER TZONIS: *Santiago Calatrava: The poetics of movement*. Thames and Hudson (1999).

[4] [http://en.wikipedia.org/wiki/Biomimetic\\_architecture](http://en.wikipedia.org/wiki/Biomimetic_architecture)

[5] <http://www.mymodernmet.com/profiles/blogs/modern-architecture-2>

[6] <http://www.sorenkorsgaard.com/woodworks.htm>

[7] <http://www.jonathanlatiano.com/>

[8] <http://www.gregadunn.com/>

[9] <http://rdanaartist.com/sequence2.html>

[10] <http://www.neatorama.com/art/2010/08/11/michele-banks/>

[11] <http://www.lukejerram.com/>

[12] DAWN ADES: *Dali (World of Art)*. Thames and Hudson (1982).

[13] [https://www.google.com/culturalinstitute/asset-viewer/a-sunday-on-la-grande-jatte-1884/twGyqq52R-1YpA?utm\\_source=google&utm\\_medium=kp&hl=it&projectId=art-project](https://www.google.com/culturalinstitute/asset-viewer/a-sunday-on-la-grande-jatte-1884/twGyqq52R-1YpA?utm_source=google&utm_medium=kp&hl=it&projectId=art-project)

[14] <http://www.mjkzz.com/home.html>

[15] <http://www.liquiddropart.com/>

[16] CORRIE WHITE: *The Ultimate Guide to Water Drop Photography*. ebook ().

[17] <http://www.npr.org/blogs/thesalt/2013/03/18/174637393/the-wonderful-world-of-whisky-art>

[18] <http://sachikokodama.com/en>

[19] <http://loriscecchini.com/>

[20] <http://www.welcomeimageawards.org/>

[21] <http://www.mrs.org/science-as-art/>

[22] <http://www.rmg.co.uk/whats-on/exhibitions/astronomy-photographer-of-the-year>

[23] <http://www.ams.org/mathimagery/thumbnails.php?album=13>

[24] <http://www.bugman123.com/Math/index.html>

[25] <http://www.astroart.org>

[26] [http://www.ted.com/talks/drew\\_berry\\_animations\\_of\\_unseeable\\_biology.html](http://www.ted.com/talks/drew_berry_animations_of_unseeable_biology.html)



**Giuseppe Maruccio:** Ricercatore presso l'Università del Salento è associato al CNR-Istituto di Nanoscienze, NNL-Lecce e nella sua attività di ricerca si occupa di spintronica e nanomagnetismo, microscopia a scansione, biosensori e lab on a chip.



---

# Al confine fra matematica, biologia e arte: la morfogenesi di Turing

**Francesco Paparella**

Dipartimento di Matematica e Fisica - Università del Salento

---

**C**he Alan Turing sia stato il genio che ideò la “macchina di Turing” cioè l’astrazione matematica che, realizzata in pratica, si concretizza nei moderni calcolatori, è noto a tutti. Molti sono anche al corrente che egli fu determinante, durante la seconda guerra mondiale, nel decifrare il codice militare tedesco “enigma”, dando agli alleati un vantaggio strategico determinante. Tuttavia, non molti sanno che Turing è uno dei fondatori della biologia matematica e che pose le basi teoriche per la comprensione della morfogenesi, cioè di quella disciplina che studia come si formano, durante la crescita, le strutture anatomiche degli esseri viventi.

Perché il manto di una zebra è a strisce e quello di un ghepardo è maculato? Come si formano le cinque dita di una mano (e come mai sempre e solo cinque)? Che cosa determina i coloratissimi disegni astratti che si osservano sulle ali delle farfalle?

La biologia è una disciplina difficile perché, fra le scienze naturali, è quella che meno si presta ad

un approccio quantitativo, basato sulla matematica, al contrario di quanto avviene, per esempio, in fisica. Ciò non vuol dire che non sia possibile sviluppare una biologia quantitativa, e la teoria di Turing ne è una delle prime e più importanti dimostrazioni.

Con grande audacia intellettuale, Turing postulò nel 1952 [1] che esistano delle sostanze, da lui chiamate *morfogeni*, secrete dalle cellule, che regolano la morfogenesi. Due soli processi sono contemplati dalla teoria: le reazioni chimiche fra morfogeni e la diffusione dei morfogeni da una cellula alle cellule adiacenti. Entrambi questi processi possono essere facilmente descritti con l’ausilio di equazioni differenziali.

## Reazioni e diffusione

Un sistema di equazioni differenziali ordinarie è un ottimo modello matematico per descrivere come cambia nel tempo la concentrazione di reagenti chimici in un mezzo omogeneo (come, per esempio, una provetta agitata vigorosamente, al fine di mantenere i reagenti ben mescolati). Se vi sono solo due reagenti, le cui concentrazioni

sono  $v$  e  $w$ , il modello avrà la seguente forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v(t) = f(v(t), w(t)) \\ \frac{d}{dt}w(t) = g(v(t), w(t)) \end{cases} \quad (1)$$

dove  $t$  è il tempo, e l'espressione esplicita delle funzioni  $f$  e  $g$  è determinata dalla particolare reazione in esame.

Se esiste un *equilibrio chimico*, ovvero dei valori di concentrazione  $v_o$  e  $w_o$  tali che  $f(v_o, w_o) = g(v_o, w_o) = 0$ , allora, quando  $v$  e  $w$  hanno valori vicini a  $v_o$  e  $w_o$ , è spesso possibile approssimare le equazioni (1) con le seguenti

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v(t) = a(v(t) - v_o) + b(w(t) - w_o) \\ \frac{d}{dt}w(t) = c(v(t) - v_o) + d(w(t) - w_o) \end{cases} \quad (2)$$

che sono molto più semplici, in quanto sono lineari. I valori numerici dei coefficienti  $a, b, c, d$  sono le derivate parziali di  $f$  e  $g$ , valutate in  $v_o$  e  $w_o$ . (Non è questa la sede per una discussione tecnica riguardo alle condizioni necessarie o sufficienti affinché le soluzioni delle equazioni (2) effettivamente approssimino le soluzioni delle equazioni (1). I lettori interessati sono rimandati ad uno dei tanti testi universitari sulle equazioni differenziali ordinarie ed i sistemi dinamici, per esempio [2].)

Fra tutti gli equilibri, quelli che possono essere osservati, in natura o in laboratorio, sono quelli *stabili*. Ciò vuol dire che, se inizialmente le concentrazioni dei reagenti sono sufficientemente vicine all'equilibrio, allora esse tenderanno nel tempo ad assumere proprio questi valori, dopo un transiente più o meno lungo, durante il quale lo scostamento dall'equilibrio rimane limitato. In matematica esistono molte definizioni di *equilibrio stabile*, fra loro simili, ma con sottili differenze. Quella che abbiamo appena descritto è la *stabilità asintotica*, che è quella utile per i nostri scopi. Dobbiamo, infatti, accettare che, sia in natura, sia in laboratorio, esistono innumerevoli fonti di disturbo, generalmente dovute a cause non controllabili, che possono alterare lievemente i valori delle variabili di un sistema fisico (o chimico). Perciò, per esempio, per quanta cura ed attenzione possano avere gli sperimentatori, è praticamente impossibile preparare un esperi-

mento in cui le concentrazioni iniziali siano *esattamente* quelle di equilibrio. Esse saranno sempre *solo approssimativamente* quelle di equilibrio. Se l'equilibrio è stabile queste piccole imperfezioni svaniranno spontaneamente col passare del tempo. Se, invece, l'equilibrio non è stabile, le imperfezioni persisteranno, e, anzi, generalmente si accumuleranno, amplificandosi col passare del tempo, perciò lo stato di equilibrio instabile rimarrà sperimentalmente inaccessibile.

In un approccio idealizzato possiamo considerare una singola cellula come un minuscolo contenitore al cui interno la concentrazione dei reagenti chimici (cioè i morfogeni) rimane omogenea. Se le cellule sono più di una, i morfogeni avranno la possibilità di spostarsi, per diffusione, da ciascuna cellula a quelle adiacenti.

A livello microscopico, la diffusione è dovuta all'agitazione termica delle molecole in sospensione in un fluido o in un gel (per esempio il citoplasma cellulare). Esse compiono una traiettoria irregolare ed imprevedibile (in gergo tecnico: una *passeggiata aleatoria*), che tende a sparpagliare le molecole in tutte le direzioni. A livello macroscopico, il risultato netto di questi moti casuali è un flusso della sostanza che si sposta dalle zone in cui la concentrazione è più alta a quelle in cui la concentrazione è più bassa.

Se consideriamo un sistema di due cellule adiacenti, la diffusione di una sostanza dall'una all'altra (in assenza di altri processi) può essere descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v_1(t) = k_v(v_2(t) - v_1(t)) \\ \frac{d}{dt}v_2(t) = -k_v(v_2(t) - v_1(t)) \end{cases} \quad (3)$$

dove  $v_1$  e  $v_2$  sono le concentrazioni della sostanza nella prima e nella seconda cellula, rispettivamente, e  $k_v$  è una costante positiva che dipende dal tipo di sostanza e dalla geometria delle cellule.

Quando le scale spaziali in gioco sono molto più grandi della singola cellula, se accettiamo l'idea che un tessuto vivente composto da tantissime cellule possa essere descritto come un materiale continuo, allora i flussi diffusivi sono espressi dalla nota formula dovuta a Joseph Fourier

$$\mathbf{F} = -K_v \nabla v(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

che dice che il flusso  $\mathbf{F}$  è proporzionale (ma in verso opposto) al gradiente (indicato dal simbolo  $\nabla$ ) della concentrazione  $v$ , che ora è una funzione sia dello spazio  $\mathbf{x}$ , sia del tempo  $t$ . La costante positiva  $K_v$  è il *coefficiente di diffusione*. I cambiamenti nel tempo della concentrazione sono allora descritti dalla seguente importantissima equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial t}v(\mathbf{x}, t) = K_v \nabla^2 v(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

e  $\nabla^2$  è l'operatore *laplaciano* (ottenuto applicando in successione l'operatore gradiente e l'operatore divergenza alla funzione  $v$ ).

Se ci limitassimo a considerare solo processi di reazione chimica, dovremmo concludere che un insieme di cellule uguali, tutte inizialmente vicine ad un equilibrio stabile, rimarrà indifferenziato: la concentrazione dei morfogeni tenderà a raggiungere il medesimo equilibrio in ciascuna cellula.

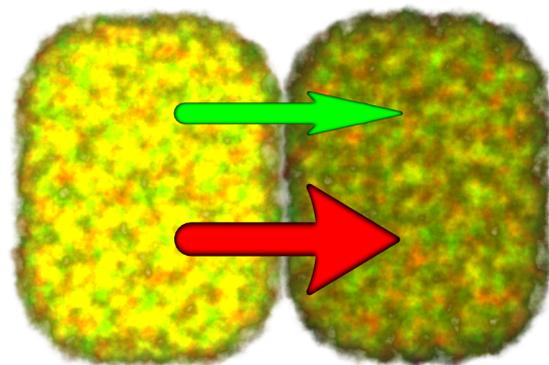
Analogamente, in assenza di reazioni chimiche, i soli processi diffusivi tendono a rendere omogenea la concentrazione delle sostanze che diffondono: dalle equazioni (3) si vede che se la concentrazione è maggiore nella seconda cellula rispetto alla prima (ovvero  $v_2 > v_1$ ) la concentrazione nella prima cellula aumenta col passare del tempo, e quella della seconda cellula diminuisce. Una proprietà analoga vale anche per l'equazione (5), ma la dimostrazione è meno immediata.

Quindi, né la chimica, né la diffusione, individualmente, possono spiegare la creazione di strutture e di forme da una situazione iniziale molto vicina all'omogeneità. Sorprendentemente, se questi due processi agiscono contemporaneamente, è invece possibile creare delle disomogeneità.

## Rompere la simmetria

In termini tecnici, si dice che processi di reazione e di diffusione, insieme, permettono la rottura spontanea della simmetria di omogeneità spaziale.

Un esempio con due sole cellule e due morfogeni (che chiameremo "verde" e "rosso") illustra in modo semplice questo concetto. Supponiamo



**Figura 1:** Un occasionale piccolo eccesso di morfogeni nella cellula a sinistra produce un flusso diffusivo verso la cellula di destra. Se l'inibitore rosso diffonde più rapidamente dell'attivatore verde, l'afflusso di inibitore, non bilanciato da una equivalente quantità di attivatore, può produrre una decrescita della concentrazione di entrambi i morfogeni nella cellula di destra, ed una speculare crescita in quella di sinistra. La simmetria è rotta e si genera una persistente disomogeneità.

mo che il verde sia una sostanza che stimola la produzione di entrambi i morfogeni (in gergo, si tratta di un *attivatore*) e che il rosso, invece, la reprima (un *inibitore*). Supponiamo anche che, in una cellula isolata, gli effetti congiunti di attivatore ed inibitore si bilancino, formando un equilibrio stabile. Quando vi sono due cellule, eventuali disomogeneità fra i morfogeni tenderanno ad essere bilanciate da un flusso diffusivo dalla cellula che ha abbondanza di un certo morfogene verso quella che ne ha carenza. Ma i morfogeni che sopraggiungono da una cellula adiacente contribuiscono alle reazioni chimiche insieme a quelli già presenti, e questo può destabilizzare l'equilibrio chimico, che altrimenti sarebbe stabile.

Una rappresentazione grafica di questa idea è illustrata in Figura 1. Supponiamo che l'inibitore rosso abbia una grande capacità di fluire diffusivamente da una cellula ad un'altra, e che l'attivatore verde sia, invece, assai poco mobile. Se una causa qualunque produce una sovrabbondanza di entrambi i morfogeni nella prima cellula, essi tenderanno a fluire verso la seconda. Ma l'inibitore lo farà molto più in fretta dell'attivatore, che invece diffonde lentamente. Quindi può venirsi a creare una situazione in cui nella prima cellu-

## Un esempio con due cellule

Analogamente a quanto fa Turing nella sezione 4 del suo articolo [1], consideriamo un caso particolare delle equazioni (2), di cui riportiamo a fianco la soluzione generale:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v = 3 + v - 4w \\ \frac{d}{dt}w = 5 + 4v - 9w \end{cases}; \quad \begin{cases} v(t) = 1 + 2\alpha e^{-7t} + 2\beta e^{-t} \\ w(t) = 1 + 4\alpha e^{-7t} + \beta e^{-t} \end{cases}$$

Il morfogene “verde”, con concentrazione  $v$ , si comporta da attivatore. Quello “rosso”, con concentrazione  $w$ , si comporta da inibitore. Le concentrazioni di equilibrio sono  $v_o = w_o = 1$ . La soluzione mostra che questo equilibrio è stabile (poiché gli esponenziali hanno entrambi esponente negativo, quale che sia il valore delle costanti di integrazione  $\alpha$  e  $\beta$ , al passar del tempo si tende all’equilibrio senza mai discostarsene troppo).

In un sistema con due cellule (v. Figura 1) siano  $v_1, w_1$  e  $v_2, w_2$  le concentrazioni dei due morfogeni, rispettivamente, nella prima e nella seconda cellula. Tenendo conto anche della diffusione (cfr. eq. 3), e ponendo  $k_v = 1/15$  e  $k_w = 37/5$ , si ottengono le seguenti equazioni, e le corrispondenti soluzioni:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = 3 + v_1 - 4w_1 + \frac{1}{15}(v_2 - v_1) \\ \frac{dw_1}{dt} = 5 + 4v_1 - 9w_1 + \frac{37}{5}(w_2 - w_1) \\ \frac{dv_2}{dt} = 3 + v_2 - 4w_2 - \frac{1}{15}(v_2 - v_1) \\ \frac{dw_2}{dt} = 5 + 4v_2 - 9w_2 - \frac{37}{5}(w_2 - w_1) \end{cases}; \quad \begin{cases} v_1(t) = 1 + 2\alpha e^{-7t} + 2\beta e^{-t} + 2\gamma e^{-\frac{347}{15}t} + 2\delta e^{\frac{1}{5}t} \\ w_1(t) = 1 + 4\alpha e^{-7t} + \beta e^{-t} + 12\gamma e^{-\frac{347}{15}t} + \frac{\delta e^{\frac{1}{5}t}}{3} \\ v_2(t) = 1 + 2\alpha e^{-7t} + 2\beta e^{-t} - 2\gamma e^{-\frac{347}{15}t} - 2\delta e^{\frac{1}{5}t} \\ w_2(t) = 1 + 4\alpha e^{-7t} + \beta e^{-t} - 12\gamma e^{-\frac{347}{15}t} - \frac{\delta e^{\frac{1}{5}t}}{3} \end{cases}$$

In questo caso gli esponenziali che compaiono nella soluzione non hanno tutti un coefficiente negativo. Se la condizione iniziale è tale che la costante di integrazione  $\delta$  è diversa da zero, allora le concentrazioni dei morfogeni si allontaneranno dai valori di equilibrio. Dopo un transiente iniziale, se  $\delta > 0$  i morfogeni nella prima cellula tenderanno ad aumentare, e quelli della seconda cellula a diminuire, proporzionalmente a  $e^{\frac{1}{5}t}$ . Viceversa se  $\delta < 0$ .

la si trova una sovrabbondanza di attivatore rispetto all’inibitore, e viceversa nella seconda. Di conseguenza, le reazioni chimiche produrranno nella prima cellula una crescita della concentrazione di entrambi i morfogeni, e nella seconda, invece, una decrescita. Se i tempi di crescita e decrescita dei morfogeni sono sufficientemente rapidi, lo squilibrio di concentrazione fra le due cellule non potrà essere colmato dalla diffusione. Al contrario, lo squilibrio è destinato a crescere esponenzialmente nel tempo (v. l’esempio nel riquadro in questa pagina). La simmetria è rotta e l’omogeneità è perduta.

Una simile destabilizzazione sarebbe possibile anche nel caso in cui il morfogene maggiormente diffusivo fosse l’attivatore e quello poco diffu-

sivo fosse l’inibitore. In tal caso in una cellula si avrebbe una sovrabbondanza di uno dei due morfogeni ed una scarsità dell’altro, e nell’altra cellula la situazione inversa.

L’esempio con due sole cellule mostra come l’azione combinata di reazione e diffusione possa creare delle disomogeneità. Ma la morfogenesi è assai più di questo. Una vera morfogenesi non è il prodotto di disomogeneità casuali, bensì il risultato di una riproducibile fabbricazione di strutture ordinate. Quando si passa da sistemi di due sole cellule a casi con una moltitudine di cellule, o, addirittura, ad un continuo, ci si rende conto che il meccanismo della destabilizzazione degli equilibri chimici scoperto da Turing è in grado di ottenere esattamente questo genere di

riproducibilità delle strutture.

## Dalla disomogeneità alle strutture

Se accettiamo l'idea che un tessuto vivente possa essere descritto come un materiale continuo, quando le scale spaziali in gioco sono molto più grandi della singola cellula, allora le equazioni di reazione-diffusione per due morfogeni si ottengono combinando le equazioni (1) e (5) per ottenere

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(\mathbf{x}, t) = f(v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)) + K_v \nabla^2 v(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} W(\mathbf{x}, t) = g(v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)) + K_w \nabla^2 w(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (6)$$

In effetti, per descrivere situazioni realistiche, due soli morfogeni potrebbero non bastare, e le equazioni precedenti devono essere estese al caso di un gran numero di morfogeni distinti, ciascuno caratterizzato da un coefficiente di diffusione distinto dagli altri.

Ad oggi non esiste ancora una singola teoria matematica che sveli le proprietà delle soluzioni (se e quando esistono) delle equazioni di reazione-diffusione scritte nella forma del tutto generica (6). Esistono, però, molti importanti risultati parziali, validi quando le funzioni che specificano la parte di reazione sono vincolate ad avere alcune espressioni specifiche. L'argomento è ancora un attivo campo di ricerca.

Ma se ci limitiamo al caso in cui le reazioni chimiche sono descritte dalle equazioni lineari (2) ed il dominio spaziale è un segmento, allora è possibile comprendere con relativa facilità come l'instabilità di Turing possa produrre strutture ordinate.

Per semplicità di calcolo, supponiamo che il segmento abbia una lunghezza esattamente pari a  $\pi$  (questa può sempre essere reso vero, senza ulteriore perdita di generalità, scegliendo opportunamente l'unità di misura della lunghezza). Indichiamo con  $x$  la coordinata che individua la posizione dei punti del segmento. L'operatore laplaciano che appare nell'equazione di diffusione (5) ed in (6) si riduce alla derivata parziale secon-

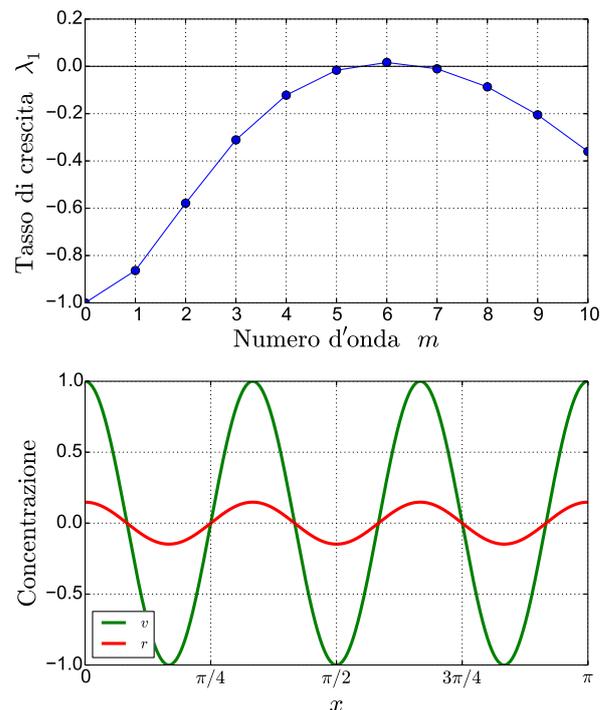
da rispetto ad  $x$ . Infine eseguiamo il cambio di variabili  $V = v - v_o$ ,  $W = w - w_o$ . Otteniamo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) = aV(x, t) + bW(x, t) + K_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = cV(x, t) + dW(x, t) + K_w \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \end{cases} \quad (7)$$

corredate dalle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} V(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} V(\pi, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} W(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} W(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Queste ultime esprimono matematicamente il fatto che non c'è un flusso di morfogeni attraverso gli estremi del segmento, come diventa chiaro dalla formula (4), ricordando che nel nostro caso unidimensionale il gradiente di  $v$  e  $r$  si riduce alla derivata parziale rispetto a  $x$  di  $V$  e  $R$ .



**Figura 2:** Tasso di crescita  $\lambda_1$  in funzione del numero d'onda  $m$  per le soluzioni particolari dell'equazione (7) con  $a = 1, b = -4, c = 4, d = -9, K_v = 1/92, K_w = 1/2$  (pannello in alto). Soluzione particolare, asintoticamente per tempi lunghi, corrispondente al numero d'onda  $m = 6$  (pannello in basso).

Cerchiamo ora soluzioni particolari della forma

$$\begin{cases} V(x, t) = V_m(t) \cos(mx) \\ W(x, t) = W_m(t) \cos(mx) \end{cases} \quad (9)$$

Questa è la tecnica detta *separazione delle variabili*, esposta in quasi ogni libro introduttivo sulle equazioni alle derivate parziali (per esempio [4, cap. 7]). È facile verificare che, se la costante  $m$  (detta *numero d'onda*) è un intero, allora le espressioni (9) soddisfano le condizioni al contorno (8). È molto importante, ed utile ai fini pratici, che la soluzione generale delle equazioni (7) con le condizioni al contorno (8) possa essere scritta come somma di tutte le *infinite* soluzioni particolari del tipo (9). Purtroppo la dimostrazione di questo asserto non è né breve, né elementare, e bisogna rimandare il lettore interessato ad un trattato di analisi funzionale (p.es. [3]). Rimane da capire quali sono le funzioni del tempo  $V_m$  e  $W_m$  (dette *ampiezze*) che rendono le funzioni (9) soluzioni delle equazioni (7). Sostituendo le prime nelle seconde, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{dV_m}{dt} = (a - m^2 K_v) V_m + bW_m \\ \frac{dW_m}{dt} = cV_m + (d - m^2 K_w) W_m \end{cases} \quad (10)$$

Siamo ritornati ad un caso che sembra essere di pura reazione, analogo a quello delle equazioni (2). In effetti, per  $m = 0$ , (2) e (10) coincidono. Per gli altri valori di  $m$  la struttura delle equazioni è la medesima, ma i coefficienti sono numericamente diversi.

In analogia con quanto visto nel riquadro di pagina 30, ci aspettiamo che le soluzioni di (10) possano essere scritte come somme di funzioni esponenziali. (Se si ammette che  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  possano essere dei numeri complessi, questa affermazione è vera, eccetto che per alcune rarissime combinazioni dei coefficienti numerici che appaiono in (10). Qui "rarissimo" ha il significato tecnico di "avente misura di Lebesgue nulla" (v. [2, cap.3,6]). Per gli scopi di questo articolo è sufficiente considerare il caso in cui  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono numeri reali.)

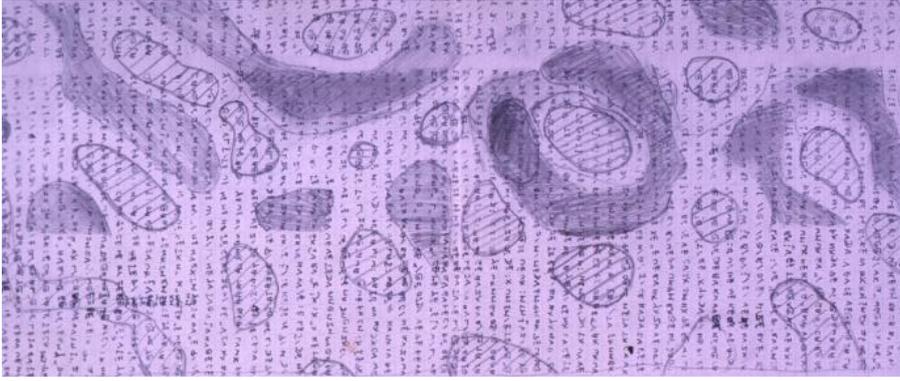
$$\begin{cases} V_m(t) = \alpha_v(m)e^{\lambda_1(m)t} + \beta_v(m)e^{\lambda_2(m)t} \\ W_m(t) = \alpha_r(m)e^{\lambda_1(m)t} + \beta_r(m)e^{\lambda_2(m)t} \end{cases} \quad (11)$$

Ciò che è importante è il segno dei coefficienti  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , detti *tassi di crescita*. Se per un certo valore di  $m$  essi sono entrambi negativi, allora siamo in un caso stabile, e la corrispondente soluzione particolare (9) tenderà a zero col passare del tempo. Questo è ciò che succede per  $m = 0$ , perché, per ipotesi, stiamo lavorando in un caso in cui le equazioni (2) hanno un equilibrio stabile. Non è troppo difficile dimostrare che, per  $m \rightarrow \infty$  si ha  $\lambda_1 \sim -m^2 K_v$  e  $\lambda_2 \sim -m^2 K_w$ . Pertanto, anche per valori di  $m$  sufficientemente grandi, le soluzioni particolari col tempo si azzerano. Ciò che succede per valori intermedi di  $m$  dipende dal particolare valore dei coefficienti di diffusione  $K_v$  e  $K_w$ . La Figura 2 mostra ciò che succede per una particolare scelta dei parametri. Il tasso di crescita  $\lambda_1(m)$  assume un valore positivo per  $m = 6$ , e rimane negativo per tutti gli altri numeri d'onda (pannello in alto);  $\lambda_2(m)$ , invece, è negativo per tutti i numeri d'onda, come si potrebbe dimostrare senza troppe difficoltà.



**Figura 3:** L'addome di un'ape (tratto da <http://www.telegraph.co.uk/science/picture-galleries/6514909/Science-Photo-Library-photos-of-the-week.html?image=10>).

La soluzione che si sviluppa partendo da una tipica condizione iniziale molto vicina allo stato di equilibrio chimico omogeneo, ma non perfettamente identica ad esso, per via delle inevitabili imperfezioni alle quali si accennava più in alto, è composta dalla somma di infinite soluzioni particolari (9) che hanno tutte inizialmente ampiezze  $V_m$  e  $R_m$  molto piccole. Tutte queste ampiezze decadono esponenzialmente nel tempo, eccetto che per  $m = 6$ , nel qual caso, invece, crescono. Perciò, fra tutte le possibili soluzioni particolari, le equazioni (7), con i parametri della Figura 2,



**Figura 4:** Una delle soluzioni numeriche di un problema di reazione-diffusione ottenuta da Turing con un calcolatore elettronico Mkl. I valori numerici sono riportati su di un foglio quadrettato, e le linee di morfogene costante sono tracciate a mano a matita e poi ombreggiate. L'immagine è la numero k3.8 del Turing Digital Archive (©P.N. Furbank). <http://www.turingarchive.org>.

ne selezionano una sola (mostrata nel pannello in basso): tutte le altre nel tempo si azzerano.

Ma questa soluzione particolare ha una struttura ben definita ed ordinata, con esattamente quattro massimi (di cui due ai bordi) e tre minimi. La valenza biologica di una simile regolarità diventa immediatamente evidente guardando la Figura 3, ed ipotizzando che l'abbondanza di morfogeni possa catalizzare la produzione di pigmento nero, mentre la loro carenza abbia come effetto la produzione di pigmento giallo. Al variare delle diffusività e degli altri parametri si trovano casi in cui i numeri d'onda instabili sono altri. Le cinque dita di una mano lasciano supporre una instabilità del numero d'onda  $m = 10$ , ed il corpo segmentato di un millepiedi una instabilità ad un numero d'onda ancora più alto. Naturalmente, nulla vieta che i numeri d'onda instabili possano essere più di uno, e questi casi generano strutture più complicate di una semplice alternanza di bande.

## Il ruolo delle nonlinearità

L'analisi delle equazioni (7) suggerisce che processi di reazione e diffusione che agiscono in contemporanea possano creare spontaneamente strutture ordinate. Tuttavia, per due distinti motivi, queste equazioni non possono essere considerate un modello completo e pienamente soddisfacente.

Il primo probabilmente è già stato intuito dal lettore: nelle equazioni (7) non esiste alcun meccanismo che possa arrestare la crescita esponenziale delle soluzioni particolari corrispondenti ai numeri d'onda instabili (come  $m = 6$  nel caso della Figura 2). Queste soluzioni continuano a crescere esponenzialmente! E questo non è affat-

to ragionevole. In tutte le discipline scientifiche (salvo forse in economia) un modello matematico che preveda una crescita illimitatamente accelerata è estremamente sospetto. È molto verosimile che in natura esista un qualche fattore che, prima o poi, arresta la crescita.

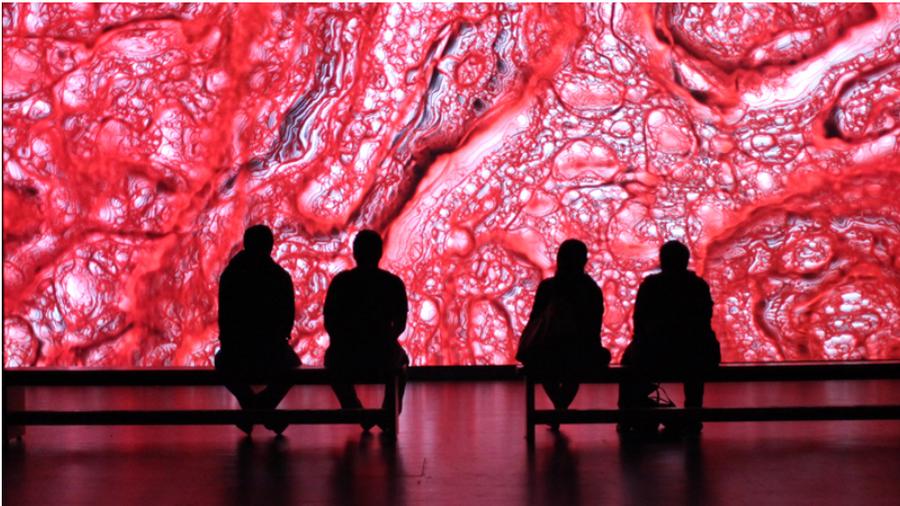
Nel nostro caso il problema risiede nella drastica semplificazione che è stata operata usando le equazioni lineari (7) per descrivere le reazioni chimiche, in luogo di quelle non lineari (6). Le costanti che appaiono nelle equazioni (7), e che determinano se un certo morfogene è un attivatore o un inibitore, nella realtà non sono affatto costanti, ma dipendono esse stesse dalla concentrazione dei morfogeni. Ad alte concentrazioni è del tutto improbabile che un attivatore continui a rimanere tale: la crescita deve arrestarsi, ed i modelli matematici realistici di reazioni chimiche ne tengono conto.

Le equazioni lineari (7) sono una ragionevole approssimazione della realtà fintanto che le concentrazioni dei morfogeni sono ragionevolmente vicine all'equilibrio chimico di omogeneità. Quando, in seguito all'instabilità di Turing, si creano forti scostamenti dall'equilibrio, è necessario usare le equazioni non lineari (6), che però sono molto più difficili da studiare.

Turing stesso provò ad affrontare il problema non lineare, ma non è noto quali e quanti progressi sia riuscito a fare prima della sua tragica morte. Quello che è certo è che egli impiegò il calcolatore elettronico Mkl dell'Università di Manchester (uno dei primissimi calcolatori elettronici programmabili) per risolvere numericamente alcuni esempi di equazione di reazione-diffusione non lineare [1, 5]. Il programma, come si fa ancor oggi, suddivideva in cellette quadrate il dominio spaziale sul quale è definita l'equazione. A



**Figura 5:** Una delle opere dell'australiano Jonathan McCabe, che usa equazioni di reazione-diffusione per generare forme d'arte. In questo esempio sono presenti molto più di due morfogeni, che danno luogo ad instabilità distinte, caratterizzate da scale spaziali diverse.



**Figura 6:** Fotografia scattata nell'installazione audiovisiva plasm dell'artista italo-olandese Tez, durante la Biennale Internazionale d'Art Numérique di Montréal (2014).

ciascuna di esse, ad ogni istante di tempo, era assegnata una singola coppia di valori  $v, w$ . Turing constatò che modelli chimici ragionevoli producevano un equilibrio chimico omogeneo instabile, che, dopo una breve crescita esponenziale, trovava spontaneamente un nuovo equilibrio chimico, ma disomogeneo, i cui schemi spaziali erano determinati dalle soluzioni particolari instabili.

Poiché a quell'epoca i calcolatori elettronici non disponevano di schermi analoghi a quelli odierni (e nemmeno di capienti memorie di massa per immagazzinare i dati), Turing ricopiava i valori delle concentrazioni di morfogeni ottenute dalla simulazione numerica su comuni fogli di carta quadrettata. Poi, a mano, tracciava con tratti di matita le curve di concentrazione costante. Alcuni di questi fogli sono stati conservati, ed uno di questi è mostrato in Figura 4. Le strutture che appaiono sono reminiscenti delle forme che si osservano sul manto di un ghepardo.

Nel corso degli anni le idee di Turing hanno avuto una enorme risonanza. Oggi interi trattati sono dedicati ad esporre gli sviluppi della teoria

che ebbe inizio con l'articolo del 1952 [6]. Grazie a questo lavoro sappiamo che le nonlinearità svolgono anche un altro ruolo.

La varietà delle strutture che si possono ottenere con l'instabilità lineare è piuttosto limitata. Anche considerando che le dimensioni spaziali nei casi realistici sono più di una, combinando le semplici funzioni trigonometriche che appaiono nelle soluzioni particolari, si ottengono strutture a bande, a scacchiera, esagonali e romboidali [6, cap. 2].

Gli esperimenti di laboratorio e le simulazioni numeriche rivelano che le nonlinearità delle reazioni chimiche, insieme con la diffusione, possono modificare le strutture innescate dall'instabilità di Turing, e produrre motivi punteggiati quasi-cristallini, serpeggianti forme labirintine reminiscenti delle impronte digitali, spirali e cerchi concentrici. Sofisticata analisi teorica riescono, in parte, a dare conto di queste strutture (per una introduzione tecnica si veda [7]).

## Dalla matematica all'arte

Non è una novità che l'arte si ispiri alla natura, ed in particolare al mondo biologico. Non è nemmeno una novità che i corpi degli esseri viventi siano essi stessi considerati delle forme d'arte. Già nel 1904 il biologo tedesco Ernst Haeckel pubblicava "Forme d'arte della Natura" (*Kunstformen der Natur*), una raccolta di cento litografie a colori, incise dallo stesso autore e raffiguranti animali di ogni tipo, il cui scopo non è la sistematica zoologica, ma la ricerca del bello [8]. Tuttavia, fino a qualche decennio fa, l'artista non poteva fare altro che ricopiare col pennello ciò che osservava (ovviamente modificando, rivedendo e reinterpretando, con ampie licenze poetiche).

Recentemente, da quando i metodi della biologia matematica hanno cominciato a mietere successi nello spiegare e riprodurre la morfologia dei viventi, per gli artisti si è aperta una nuova possibilità. Nella loro opera di imitazione ispirata, anziché (*ri-*)produrre essi possono (*ri-*)generare. Ciò vuol dire che l'artista non crea direttamente l'opera d'arte, ma crea l'equazione, l'algoritmo o l'automa dal quale poi scaturisce l'opera, senza ulteriori interventi o decisioni da parte dell'autore.

Una fra le più affascinanti, e più difficili, tecniche usate dagli artisti generativi consiste nell'ideare equazioni di reazione-diffusione le cui soluzioni, rappresentate graficamente (o acusticamente, in alcuni casi) siano artisticamente interessanti. L'australiano Jonathan McCabe è salito alla ribalta internazionale proprio con opere di questo genere (Figura 5) [9].

L'arte generativa ha ormai le sue mostre, i suoi estimatori, ed i suoi critici [10]. Un concetto centrale per questo tipo di arte è quello di *immersione*, per cui il fruitore si ritrova avvolto in un contesto virtuale che riproduce un mondo distinto da quello reale [11]. Poiché le soluzioni delle equazioni di reazione-diffusione evolvono nel tempo (in certi casi, dipende dal tempo anche lo stato che si raggiunge quando i termini nonlineari arrestano la crescita dell'instabilità, con soluzioni che assumono la forma di onde ed impulsi che si propagano e si inseguono) è evidente che esse si prestano a rappresentazioni artistiche immersive. Tez (pseudonimo di Maurizio Martinucci),

un artista italiano che vive e lavora ad Amsterdam, ha recentemente presentato alla Biennale Internazionale d'Art Numérique di Montréal una installazione audiovisiva, chiamata *plasm*, che circonda i visitatori con immagini di grandi dimensioni, generate in tempo reale calcolando numericamente le soluzioni di equazioni alla Turing, e che mostrano forme che assomigliano a quelle di strutture organiche (Figura 6), accompagnate da un colonna sonora anch'essa di tipo generativo [12].

Per chi desideri cimentarsi con la generazione di immagine basate su equazioni di reazione-diffusione esistono anche dei programmi di calcolo e simulazione che possono essere liberamente scaricati dalla rete [13].



- [1] ALAN M. TURING: "The Chemical Basis of Morphogenesis", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences* **237** (1952) 37–72.
- [2] MORRIS W. HIRSCH, STEPHEN SMALE, ROBERT L. DEVANEY: *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press; III edition (2012).
- [3] HAIM BREZIS: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer (2011).
- [4] TYN MYINT-U, LOKENATH DEBNATH: *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser; IV edition (2006).
- [5] JONATHAN SWINTON: "Watching the Daisies Grow: Turing and Fibonacci Phyllotaxis", in *Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker* a cura di Christof Teuscher; Springer (2004).
- [6] JAMES D. MURRAY: *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer; III edition (2003).
- [7] MICHAEL CROSS, HENRY GREENSIDE: *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems*. Cambridge University Press (2009).
- [8] Per maggiori informazioni ed esempi di queste tavole si veda la pagina di Wikipedia [http://it.wikipedia.org/wiki/Kunstformen\\_der\\_Natur](http://it.wikipedia.org/wiki/Kunstformen_der_Natur)
- [9] <http://jonathanmccabe.com>
- [10] [http://it.wikipedia.org/wiki/Arte\\_generativa](http://it.wikipedia.org/wiki/Arte_generativa) le corrispondenti pagine in inglese e francese contengono numerose altre informazioni.
- [11] OLIVER GRAU: *Virtual Art: From Illusion to Immersion*. MIT Press (2003).
- [12] <http://www.tez.it/plasm>.
- [13] <https://code.google.com/p/reaction-diffusion/>  
<http://softology.com.au/voc.htm>

**Francesco Paparella:** Laureato in Fisica presso l'Università di Torino, ha conseguito un dottorato in Geofisica presso l'Università di Genova. È attualmente ricercatore presso il Dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università del Salento dove insegna Istituzioni di Fisica Matematica. Si occupa di meccanica dei fluidi (applicata alla geofisica) e di sistemi dinamici (applicati alla meccanica dei fluidi ed all'ecologia).

# Riflessioni sulle riflessioni

Ora vediamo come in uno specchio, in immagine; ma allora vedremo a faccia a faccia.

(1 Cor 13,12)

**Giuseppe De Cecco** professore in pensione dell'Università del Salento

**E**sistono concetti matematici fondamentali che pervadono la nostra vita e scopo dell'insegnamento attivo è quello di riconoscerli e trasmetterli. Qui si prendono in considerazione le simmetrie speculari in matematica, che schematizzano la relazione che intercorre tra i punti di un oggetto e quello della sua immagine rispetto ad uno specchio piano.

Faremo le nostre considerazioni nel piano euclideo  $E$ . Se  $r$  è una retta di  $E$ , indichiamo con  $\sigma_r : E \rightarrow E$  la simmetria (ortogonale) rispetto ad  $r$  o anche simmetria assiale di asse  $r$  (o ribaltamento intorno ad  $r$ ), che, come è noto, associa al punto  $P$  di  $E$  il punto  $P' = \sigma_r(P)$  tale che il segmento  $PP'$  sia ortogonale ad  $r$  e il suo punto medio appartenga ad  $r$  (cioè si riporta una stessa misura da una parte e dall'altra della retta  $r$ , come suggerisce la parola greca  $\sigma\nu\mu - \mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$ ).

Assumendo  $r$  come asse  $x$  e una retta ortogonale ad  $r$  come asse  $y$ , al punto  $P(x, y)$  corrisponde il punto  $P'(x, -y)$ ; quindi le equazioni canoniche di  $\sigma_r$  sono

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

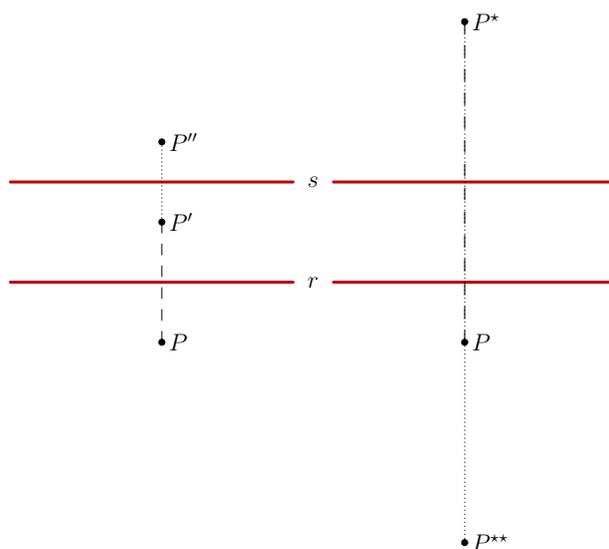


Figura 1

L'applicazione  $\sigma_r$  è una isometria (o congruenza), cioè conserva le distanze e quindi tutte le proprietà metriche del piano; inoltre essa è una isometria inversa, poiché inverte l'orientazione. Si vede facilmente che  $\sigma_r^2 = id$  (cioè  $\sigma_r$  è un'applicazione involutoria e quindi  $\sigma_r^{-1} = \sigma_r$ ) e  $\sigma_r|_r = id$  (cioè i punti di  $r$  rimangono fissi)<sup>1</sup>; dunque  $r$

<sup>1</sup>Il simbolo  $id$  indica l'applicazione identica, cioè  $id(P) = P$ ;  $\sigma_r^2$  indica che l'applicazione  $\sigma_r$  è iterata due volte;  $\sigma_r|_r$  indica la restrizione dell'applicazione ai punti di  $r$ ,

## Lo specchio

Le proprietà geometriche dello specchio hanno sempre affascinato piccoli e grandi fin dai primordi dell'umanità, a causa anche della sostanziale ambiguità dello specchio: riproduzione immediata dell'immagine, ma immagine *virtuale* (non vera). Specchi naturali sono gli "specchi" d'acqua, cioè superfici calme di acqua; a rigore ogni superficie perfettamente liscia (cioè priva di irregolarità) di qualsiasi materiale è riflettente.

Il simbolismo dello specchio si trova, poi, nelle grandi costruzioni mentali, allegoriche e letterarie delle varie epoche, dai miti orientali e greci fino alle moderne antenne dei satelliti che realizzano il sogno di Pitagora di usare la luna come grande specchio per comunicare tra due punti della terra. In questo senso "moderni" specchi sono il televisore, che permette il trasferimento simultaneo dell'immagine riflessa, e l'elaboratore elettronico, che permette la ricostruzione di immagini.

La conoscenza ha nello specchio il suo mediatore privilegiato: la parola "speculazione" porta in sé il ricordo dello specchio (*speculum* in latino); infatti in origine "speculare" era osservare il cielo e i movimenti delle stelle servendosi di uno specchio, da cui anche "considerare", guardare l'insieme delle stelle (*sidus-eris*) per ricavare gli auspici. Anche l'accezione della parola "riflettere", nel senso di riverberare il pensiero, rivolgere la mente a qualcosa, secondo alcuni ricorda la riflessione (fisica) sull'anima, considerata come uno specchio d'acqua.

La stessa arte (di qualsiasi tipo) è stata definita da molti *specchio del reale*; in quella pittorica poi i motivi ornamentali, i fregi, le pavimentazioni sono legate alle riflessioni speculari e quindi sono anche oggetto di studio della matematica.

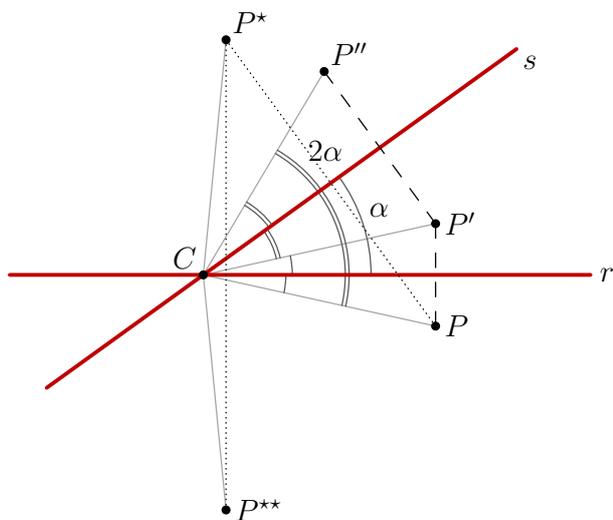


Figura 2

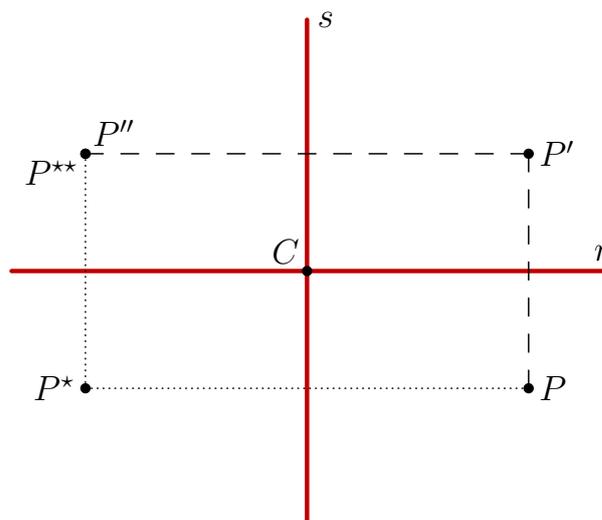


Figura 3

funziona da *specchio* [1, 2, 3].

Se il nostro ambiente è una retta, lo "specchio" sarà un *punto*; se l'ambiente è lo spazio tridimensionale lo "specchio" sarà un *piano*.

Se  $r$  ed  $s$  sono due rette parallele, allora  $\sigma_s \circ \sigma_r$  è una *traslazione* nella direzione ortogonale ad  $r$  e ad  $s$  di ampiezza  $2d$  dove  $d$  è la distanza tra  $r$

quindi  $\sigma_r|_r = id$  significa  $\sigma_r(P) = P$  per ogni punto  $P$  di  $r$ .

e  $s$ . Si osservi che  $\sigma_s \circ \sigma_r \neq \sigma_r \circ \sigma_s$  come si vede facilmente dalla Figura 1<sup>2</sup>.

Infatti

$$\begin{aligned} \sigma_s(\sigma_r(P)) &= \sigma_s(P') = P'', \\ \sigma_r(\sigma_s(P)) &= \sigma_r(P^*) = P^{**}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Il simbolo  $\circ$  indica la composizione di applicazioni, cioè  $(\sigma_s \circ \sigma_r)(P) = \sigma_s(\sigma_r(P))$ .

## Il gruppo quadrimio

Se le rette  $r$  ed  $s$  sono ortogonali, indicata per semplicità con  $e$  l'identità, si verifica facilmente che le applicazioni

$$\{e, \sigma_r, \sigma_s, \sigma_C\} = \mathcal{V}$$

rispetto alla composizione tra applicazioni, costituiscono un gruppo, chiamato gruppo quadrimio o anche *Vierergruppe*, termine introdotto da F. Klein, che per primo ha attirato l'attenzione su di esso nel 1884 nel libro *Vorlesungen über das Ikosaeder*. La tabella di moltiplicazione, (*tavola pitagorica*), è la seguente

$\circ$	$e$	$\sigma_r$	$\sigma_s$	$\sigma_C$
$e$	$e$	$\sigma_r$	$\sigma_s$	$\sigma_C$
$\sigma_r$	$\sigma_r$	$e$	$\sigma_C$	$\sigma_s$
$\sigma_s$	$\sigma_s$	$\sigma_C$	$e$	$\sigma_r$
$\sigma_C$	$\sigma_C$	$\sigma_s$	$\sigma_r$	$e$

Quindi geometricamente il gruppo quadrimio rappresenta il gruppo delle isometrie di un rettangolo. Indicando con 1, 2, 3, 4 i vertici di un rettangolo ed usando il simbolismo delle permutazioni si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \eta, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \rho\sigma = \sigma\rho.$$

Quindi  $\mathcal{V}$  si può pensare anche generato dagli elementi  $\rho$  e  $\sigma$  soddisfacenti alle seguenti condizioni

$$\eta^2 = e, \quad \sigma^2 = e, \quad \eta\sigma = \sigma\eta.$$

Questo gruppo (abeliano) può essere "visualizzato" mediante due specchi ortogonali  $r$  ed  $s$  (Figura 4).

Se, invece,  $r \cap s = \{C\}$ , allora  $\sigma_s \circ \sigma_r$  è una rotazione intorno a  $C$  di ampiezza  $2\alpha$  dove  $\alpha = rs$  è l'angolo orientato da  $r$  ad  $s$ . Anche in questo caso, in generale  $\sigma_s \circ \sigma_r \neq \sigma_r \circ \sigma_s$  (Figura 2). In simboli

$$\begin{aligned} \sigma_s \circ \sigma_r &= \rho(C, 2\alpha) \\ \sigma_r \circ \sigma_s &= \rho(C, 2\pi - 2\alpha) \end{aligned}$$

dove  $\rho(C, \phi)$  indica la rotazione intorno a  $C$  di un angolo  $\phi$ .

Si ha l'uguaglianza  $\sigma_s \circ \sigma_r = \sigma_r \circ \sigma_s$  se e solo se le rette  $r$  ed  $s$  sono ortogonali, allora  $\sigma_s \circ \sigma_r$  è la simmetria centrale di centro  $C$ , in simboli  $\sigma_C = \rho(C, \pi)$  (Figura 3).

Poiché i movimenti piani sono traslazioni, rotazioni, ribaltamenti o loro composizioni, ne segue che:

**Teorema 1.** *Le simmetrie assiali generano il gruppo*

$\mathcal{E}(2)$  delle isometrie del piano.

Anzi si può provare che:

**Teorema 2.** *Ogni isometria piana è prodotto al più di 3 simmetrie assiali.*

Questo è un classico teorema di fattorizzazione; inoltre per ogni decomposizione di una data isometria in un prodotto di simmetrie, il numero dei fattori conserva la propria *parità*: le *congruenze dirette* sono ottenibili come prodotto di un numero pari di simmetrie e quindi conservano l'orientazione; le *congruenze inverse* sono ottenibili come prodotto di un numero dispari di simmetrie e quindi invertono l'orientazione.

Le traslazioni e le antitraslazioni (composizioni di una traslazione con una simmetria assiale) non hanno punti fissi, le rotazioni hanno un punto fisso, i ribaltamenti infiniti punti fissi.

Dal punto di vista gruppale, una simmetria assiale genera un sottogruppo di ordine 2 di

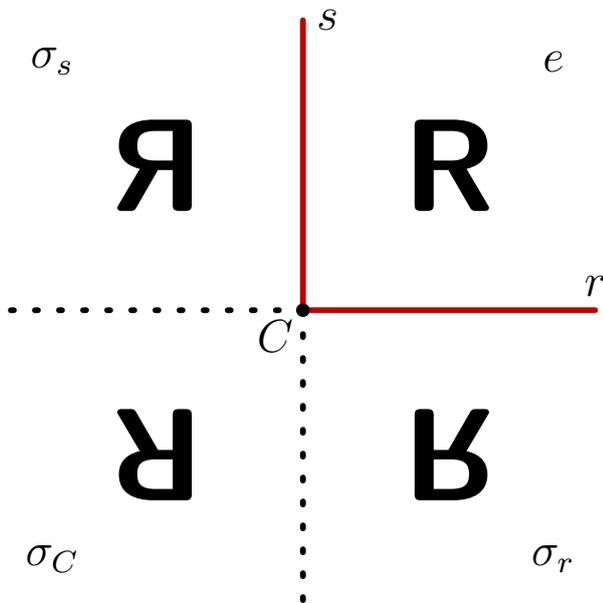


Figura 4

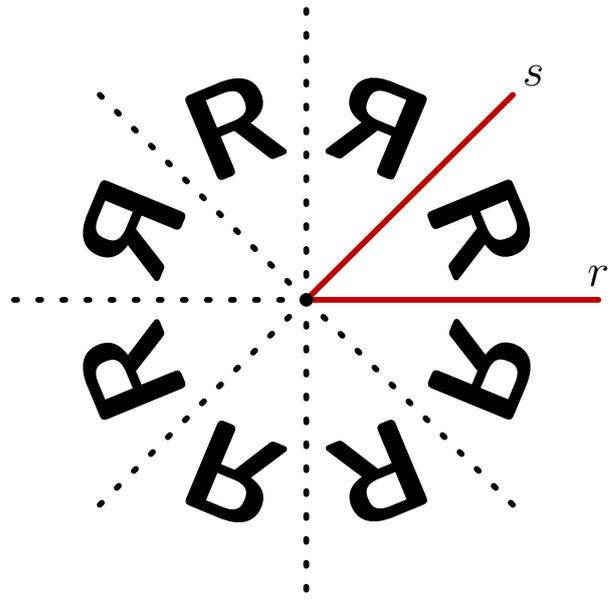


Figura 5

$\mathcal{E}(2)$ , isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ ; le traslazioni costituiscono un sottogruppo (commutativo) normale di  $\mathcal{E}(2)$ , isomorfo ad  $\mathbb{R}^2$ , essendo le traslazioni in corrispondenza biunivoca con i vettori del piano (che individuano la traslazione). Le rotazioni (intorno ad un fissato punto) costituiscono un sottogruppo (commutativo) di  $\mathcal{E}(2)$  isomorfo alla circonferenza: infatti

$$\rho(C, \vartheta) \circ \rho(C, \vartheta') = \rho(C, \vartheta + \vartheta').$$

Ricordiamo che se  $g$  è un elemento di un gruppo, si chiama *periodo* (o *ordine*) di  $g$  il minimo intero positivo  $n$  per cui  $g^n = e$ . Quindi una rotazione  $\rho(C, \alpha)$  ha periodo  $n \in \mathbb{N}$ , se

$$n\alpha = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

essendo  $\rho(C, 2\pi k) = id$ . Quindi

$$\text{periodo } n \text{ finito} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$$

In tal caso, posto per semplicità  $\rho(C, \alpha) = \rho$

$$\{\rho, \rho^2, \dots, \rho^n = e\} = C_n$$

è il un sottogruppo (discreto) del gruppo delle rotazioni intorno al punto  $C$  e si può interpretare come il gruppo delle rotazioni piane intorno al centro di un poligono regolare di  $n$  lati.

Se  $(2\pi/\alpha)$  è irrazionale, allora  $\rho(C, \alpha)$  ha periodo infinito.

Poiché il gruppo  $\mathcal{E}(2)$  delle isometrie è generato dalle simmetrie assiali, la trattazione elementare della geometria elementare ordinaria può essere sviluppata sistematicamente partendo dalle simmetrie assiali [5].

Il rinnovamento dell'insegnamento della geometria in Italia [6] fondato sulla simmetria è stato portato avanti da U. Morin e sviluppato in un testo di L. Lombardo Radice e L. Mancini Proia [7]. Questi autori mettono pure in evidenza che quel modo elegante ed efficace di introdurre e studiare i movimenti è stato trovato piuttosto tardi, cioè soltanto nel XX secolo dal danese L. Hjelmslev e portato a perfezione dal tedesco F. Bachmann nel 1959. Questo risultato può essere giustificato dal fatto che il "prodotto operatorio" di trasformazioni è stato introdotto in matematica solo nel XIX secolo, quando si andò formando la nozione di gruppo.

Il concetto di simmetria si incontra dappertutto: in natura (uomo, animali, cristalli, fiori,...), nelle scienze (matematica, fisica, chimica, biologia,...) in arte (pittura, architettura, musica, letteratura,...), nelle relazioni sociali (si pensi alla legge *talis qualis*); è una sorta di criterio di semplificazione [5, 8, 9, 10, 11, 12]. In un'accezione più ampia, è chiamata anche "simmetria (speculare)" la corrispondenza tra una teoria, una visione del mondo, e la realizzazione storica, concreta, anche attraverso opere dell'ingegno, di quella teoria.

Secondo Vitruvio (I sec. a.C.)

## Il gruppo diedrale

Due specchi  $r$  ed  $s$  formanti un angolo diedro  $\alpha = \pi/n$  con  $n \in \mathbb{N}$  possono essere utili strumenti per “visualizzare” il gruppo generato da  $\sigma_r$  e  $\sigma_s$ , isomorfo al *gruppo diedrale*  $\mathcal{D}_n$ , costituito da tutti i movimenti del piano che portano in sé un poligono regolare di  $n$  lati; esso ha  $2n$  elementi, cioè si producono  $2n$  immagini ( $n = 2$  nella Figura 4,  $n = 4$  nella Figura 5).

Se  $\alpha$  è incommensurabile con  $\pi$ , allora abbiamo infinite immagini di un punto, tutte giacenti su una stessa circonferenza.

Se  $r$  ed  $s$  sono parallele, il gruppo generato da  $\sigma_r$  e  $\sigma_s$  (indicato spesso con  $\mathcal{D}_\infty$ ) ha infiniti elementi: questo gruppo è utilizzato nello studio dei *fregi*, cioè dei motivi ripetuti ad intervalli regolari su una retta (Figura 6).

Intuitivamente possiamo dire che il *grado di simmetria* di una figura  $X \subset E$  è “misurato” dal *gruppo di simmetria*  $\mathcal{S}(X)$  della figura stessa, dove  $\mathcal{S}(X)$  è il gruppo delle isometrie di  $E$  che portano in sé la figura  $X$  (che rimane fissa).

Per esempio consideriamo un triangolo  $X$ . Se  $X$  è *scaleno*, allora  $\mathcal{S}(X)$  è costituito solo dall'identità  $e$ ; se  $X$  è *isoscele*, allora  $\mathcal{S}(X) = \{e, \sigma\} \cong \mathbb{Z}_2$ , dove  $\sigma$  è la simmetria bilaterale rispetto alla mediana; se  $X$  è *equilatero*, allora

$$\mathcal{S}(X) = \{\rho, \rho^2, \rho^3 = e, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2\} \cong \mathcal{D}_3,$$

dove  $\rho$  è la rotazione di  $2\pi/3$  intorno al centro (= incentro = circocentro) del triangolo equilatero (ancora  $\rho$ ).

Quindi tra i triangoli, quello equilatero è il più simmetrico e in un certo senso anche il più bello! *La bellezza è intimamente legata alla simmetria* - scriveva H. Weyl (1885-1955) [4], che ha studiato accuratamente le basi matematiche della simmetria, collegandole anche all'arte e alla filosofia. Gli uomini, infatti, preferiscono istintivamente la regolarità.

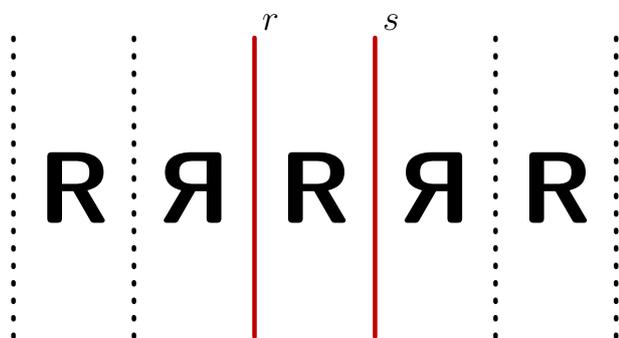


Figura 6

*La simmetria risulta dalla proporzione, la quale è commisurazione tra il tutto e le varie parti che lo costituiscono.*

Questo desiderio di simmetria in arte è spesso sinonimo d'armonia, come dice il famoso architetto Le Corbusier (1887-1965):

*L'armonia è la felice coesistenza delle cose, coesistere implica una presenza duplice o multipla, e per conseguenza si riferisce ai rapporti e agli accordi; ma di quali accordi dobbiamo interessarci?*

*Dell'accordo tra noi e il nostro ambiente, tra lo spirito dell'uomo e lo spirito delle cose, tra la matematica che è scoperta umana e la matematica che è il segreto del mondo.*

Ma la simmetria in senso lato può tradursi anche in antitesi profonde, (collegate anche all'ambiguità dello specchio): destro-sinistro, passato-futuro, vero-falso, razionale-irrazionale. In effetti lo specchio non scambia la destra con la sinistra, ma il fronte con il retro, poichè esso scambia l'orientazione delle rette ortogonali al piano dello specchio. Secondo il matematico e noto divulgatore scientifico M. Gardner (1914-2010) (ma non tutti gli studiosi sono d'accordo con la sua spiegazione)

*uno specchio, se gli state di fronte, non mostra alcuna preferenza per l'alto ed il basso o per la destra o la sinistra. Rovescia la struttura di una figura, punto per punto, lungo le rette ad esso ortogonali. Una tale inversione trasforma automaticamente una figura nella sua enantiomorfa.*

*La matematica è stata e sta sempre più diventando il mezzo per eccellenza atto ad approfondire lo studio delle simmetrie intese in senso lato, onde i suoi risultati - anche se conseguiti unicamente come diceva C.G. Jacobi (1804-1851), «per l'onore dello spirito umano» - vengono ad avere altissime doti sia estetiche che culturali. (...) Si può quindi presumere che dai comuni progressi della matematica, e da una più diffusa ed approfondita conoscenza di questa da parte dei non specialisti in materia, avrebbero, a breve o lunga scadenza, a derivarne nuovi rigogliosi sviluppi nei più disparati rami dello scibile e ciò non soltanto per quanto concerne le scienze fisiche e naturali e la tecnologia, ma altresì nei confronti dell'arte e, forse, perfino della filosofia. (B. Segre)*

Conferma il filosofo:

*Attraverso la simmetria, noi possiamo entrare nell'universo, nel mondo nella sua totalità e trovare in esso un ordine che risponde, appunto all'anima stessa dell'universo. (U. Spirito)*

*A causa della nostra simmetria bilaterale troviamo conveniente descrivere il fenomeno con uno scambio destra-sinistra. È solamente un modo di dire, una convenzione linguistica [13].*

Alcune simmetrie sono imposte dall'opera dell'uomo, altre si producono spontaneamente in natura: i cristalli hanno simmetria a reticolo, il virus della poliomelite ha la forma di un icosaedro, la molecola del metano quella di un tetraedro. Il matematico e biologo britannico D'Arcy Thomp-

son (1860-1948) studiò [14] la simmetria degli organismi in sviluppo, osservando che

*la simmetria è altamente caratteristica delle forme organiche e manca solo di rado negli organismi viventi.*

Inoltre le configurazioni di equilibrio nella dinamica evolutiva posseggono spesso simmetrie.

Anche varie leggi di dualità che si incontrano, non solo in matematica, possono essere pensate come processo di simmetrizzazione nel modo di pensare. Inoltre il concetto di simmetria, con le sue condizioni di conservazione nella ripetizione – come dice l'epistemologo E. Agazzi [1] –

*appare come il prototipo di ogni conoscenza razionale che, ad ogni livello, si configura come una certa ricerca dell'identità nel diverso, la quale non può essere altro che una forma di identità strutturale e quindi, in senso lato, una simmetria.*

Nelle scienze questo si traduce nell'invarianza rispetto a qualche trasformazione. Come è noto, tutte le trasformazioni che lasciano invarianti le proprietà geometriche fondamentali formano gruppo; invertendo questo rapporto tra gruppo e geometria, F. Klein (1849-1925) ha definito che cos'è "una" geometria ed ha chiarito come si possono subordinare le diverse geometrie. Da questo punto di vista si potrebbe dire che ogni geometria è la rappresentazione di simmetrie.

I problemi di riflessione risolvono anche problemi di minimo, poiché la luce in un mezzo omogeneo si propaga in linea retta (secondo il noto principio di Fermat: la luce segue il cammino di minima lunghezza ottica). Perciò le simmetrie speculari possono essere usate come strumento ausiliario in tanti problemi di minimo: ad es. geodetiche, percorsi luminosi, rimbalzo per palle di biliardo, moti ergodici [3, 15].

*Le diverse scienze non debbono essere viste come perni di una macchina, ma piuttosto come rami dell'albero della sapienza ed acquistano valore nella misura in cui le sentiamo legate al tronco da cui traggono e a cui danno alimento; anche nel caso della matematica, penso che il suo successo derivi dalla capacità di ogni insegnante, di ogni ricercatore di comunicare al pubblico il senso di questo legame.*

Ennio De Giorgi



- [1] E. AGAZZI: *La simmetria : Seminario interdisciplinare di Venezia*. Il Mulino, Bologna (1973).
- [2] G. CHOQUET: *L'insegnamento della geometria: introduzione e traduzione di A. Pescarini*. Feltrinelli, Milano (1994).
- [3] I. M. JAGLOM: *Trasformazioni geometriche. Le isometrie*. Zanichelli, Bologna (1972).
- [4] H. WEYL: *La simmetria*. Feltrinelli, Milano (1952).
- [5] A.A. V.V.: *Simmetrie*. Atti di un simposio tenuto a Roma (9-11 marzo 1969), Acc. Naz. Lincei, Quaderno 136, Roma (1970).
- [6] G. PRODI: *Matematica come scoperta*. Guida al progetto d'insegnamento della Matematica, Vol. I e II, Ed. G. D'Anna, Firenze (1978).
- [7] L. LOMBARDO RADICE, L. MANCINI PROIA: *Il metodo matematico nel mondo moderno. Per le Scuole. Vol. 1, 2, 3*. Principato (1988).
- [8] R. BETTI, E. MARCHETTI, L. ROSSI COSTA (A CURA DI): *Simmetria: una scoperta matematica*. Polipress, Politecnico di Milano (2007).
- [9] E. CASTELNUOVO, M. BARRA: *Matematica nella realtà*. Boringhieri, Torino (1976).
- [10] M. DEDÒ: *Forme, simmetria e topologia*. Zanichelli, Bologna (1999).
- [11] M. EMMER: *La perfezione visibile*. Theoria, Roma-Napoli (1991).
- [12] I. STEWART, M. GOLUBITSKY: *Terribili simmetrie*. Bollati Boringhieri, Torino (1995).
- [13] M. GARDNER: *L'universo ambidestro*. Zanichelli, Bologna (1984).
- [14] W. D'ARCY THOMPSON: *Crescita e forma*. Boringhieri, Torino (1969).
- [15] H. STEINHAUS: *Matematica per istantanee*. Zanichelli, Bologna (1994).



**Giuseppe De Cecco:** è stato professore ordinario di Geometria nell'Università del Salento, dove ha insegnato per circa quaranta anni. Ha tenuto numerosi corsi di tipo diverso, privilegiando sempre l'aspetto interdisciplinare, anzi transdisciplinare, alla ricerca del terreno comune in cui ogni disciplina affonda le sue radici. Le sue ricerche sono in Geometria differenziale, Topologia algebrica ed Analisi globale, in particolare sulle varietà riemanniane con singolarità.



---

# Sociologia e dimensione sociale della scienza

**Maria Luisa Dell'Atti**

Dipartimento di Storia, Società e Studi sull'Uomo, Università del Salento

---

**L**a sociologia, seppure con ritardo rispetto ad altri saperi, ha riconosciuto alla scienza la dignità di oggetto di studio. Dopo l'egemonia del paradigma mertoniano, la *Sociology of Scientific Knowledge* ha inaugurato un nutrito campionario di studi empirici: accanto alle indagini sui casi storici di controversie scientifiche, viene tematizzato soprattutto il nesso tra le forme del sapere scientifico ed i condizionamenti sociali esterni ad esso. L'analisi sul processo di produzione della conoscenza scientifica, tuttavia, si è esposta al rischio di trascurare i problemi legati alle nozioni epistemiche di verità ed oggettività della conoscenza prodotta, ovvero di oscurare gli aspetti cognitivi del sapere che appaiono del tutto indipendenti dai contesti entro i quali si sviluppano.

La sociologia, seppure tardivamente rispetto ad altre discipline, ha riconosciuto alla scienza la dignità di oggetto di studio: essa non viene letta come un mero dominio di razionalità tecnica, una sfera impermeabile rispetto alle forze agenti nella vita mondana, piuttosto una pratica intrinsecamente connessa alle dinamiche e alle relazioni presenti nella realtà sociale, e pertanto suscettibile di un'analisi teorica ed epistemica accurata.

Dal punto di vista della sociologia [1] la scienza rappresenta:

*un "sistema d'azione sociale" specializzato nel produrre e accumulare, mediante metodi che pretendono di essere socialmente legittimati per via del primato che assegnano all'evidenza empirica e all'argomentazione razionale, conoscenze attendibili, affidabili e riproducibili intese a predire, post-dire (cioè "spiegare" e manipolare, in modo statisticamente non casuale, determinate sezioni spazio-temporali del mondo, ovvero insiemi interdipendenti di eventi e processi fisici, biologici, sociali o psichici*

La sociologia si è data l'obiettivo di descrivere le strutture organizzative e professionali, di analizzare i rapporti dei saperi scientifici con fattori esistenziali, culturali, ambientali e la produzione dei significati culturali, indispensabili all'esercizio della ricerca [2, p. 145].

L'istituzionalizzazione della scienza, e la codificazione del ruolo dello scienziato, presuppongono un nucleo di elementi sociali, cioè valori e norme, che insieme ad una serie di metodi ed attività concorrono a fondare la scienza in quanto sottosistema della realtà sociale che pur essendo dotato di autonomia, conserverebbe un forte legame con il resto della società [3, p. 21].

La sociologia della scienza pertanto trascende le questioni inerenti le caratteristiche interne al sapere scientifico (la coerenza logica di una teoria, la conferma empirica o i processi di osservazione sperimentale) e tematizza le componenti

ad essa esterne: le relazioni di reciproca influenza tra scienza e gli altri sistemi sociali di base, le azioni ed i processi socioculturali costitutivi del sistema scienza, inclusi i processi di sviluppo strutturale e di crescita della conoscenza.

Robert Merton, fondatore della sociologia della scienza, attribuisce a quest'ultima il compito di indagare gli aspetti organizzativi e funzionali della scienza in quanto istituzione in grado di autoregolarsi: questo scopo conoscitivo esula lo studioso dall'onere di entrare nel merito dei contenuti tecnico-scientifici che appaiono invece universali in quanto fondati su metodi oggettivi ed impersonali [4].

Nella classica teorizzazione mertoniana la "struttura normativa della scienza" poggia su alcuni imperativi istituzionali e finalistici che garantiscono il funzionamento del sapere scientifico: l'universalismo, il comunismo, il disinteresse e il dubbio sistematico.

*L'universalismo rinvia al dovere di rispettare norme impersonali, valide in ogni circostanza, in tutte le fasi dell'agire scientifico. Il comunismo indica che le scoperte appartengono alla collettività e possono venire liberamente usate da ogni altro ricercatore, fatto salvo per lo scopritore il riconoscimento della priorità intellettuale. Il termine disinteresse designa i meccanismi istituzionali mediante i quali il sistema scienza (in concreto la comunità degli scienziati) tiene sistematicamente sotto controllo gli interessi personali dei suoi componenti. Quanto al dubbio sistematico, esso concerne l'impegno di sottoporre qualsiasi credenza al vaglio dell'evidenza empirica e dell'argomentazione razionale prima di accoglierla come forma di conoscenza [1].*

La funzionalità di tali norme, rispetto al sottosistema scienza, appare attestata dalle sanzioni che la comunità scientifica applica a coloro che si discostano.

Se nella tradizione teorica mertoniana la sociologia della scienza si è prevalentemente concentrata sulle dinamiche macro istituzionali poste alla base della produzione del sapere scientifico, negli ultimi decenni essa ha invece conosciuto un processo graduale di sviluppo ed istituzionalizzazione orientando la propria attenzione sul rapporto tra le forme del sapere scientifico ed i suoi condizionamenti sociali.

Negli anni sessanta l'irruzione della *Sociology of Scientific Knowledge* segna il definitivo tramonto dell'egemonia mertoniana: originata dalla confluenza delle tradizioni di ricerca sociologica, storica, filosofica ed antropologica, essa porta con sé la fioritura di nuovi strumenti e metodologie per leggere la conoscenza scientifica nei termini di prodotto storicamente determinato che non può essere scisso, se non per questioni analitiche, dalla società e dall'individuo [5, p. 22].

Il passaggio è epocale perché per la prima volta la spiegazione sociologica si prende carico di analizzare non solo i casi di errore, ma le proposte di conoscenza e le modalità con cui essa viene acquisita, elaborata ed al limite cambiata.

Nell'analisi sociologica sono inclusi quei prodotti scientifici che Merton aveva invece deciso di escludere dalla sociologia istituzionale della scienza. Soprattutto all'interno della tradizione di pensiero occidentale, viene decostruita la forza simbolica dell'immagine dello sviluppo come traiettoria continua di progresso nella quale le unità impurità (o interferenze) provengono dall'esterno.

Negli anni settanta, all'interno della Scuola di Edimburgo, nasce lo SSK - *Strong Programme in the Sociology of Knowledge* che annovera fra i suoi massimi rappresentanti David Bloor [6] e Barry Barne [7], fondatori della *Science Studies Unit*: il primo centro da cui prende le mosse una sociologia della conoscenza scientifica che, ancorando gli studi teorici e filosofici ad analisi empiriche, sottopone ad un'indagine meticolosa l'intero nucleo del ragionamento e dell'attività scientifica.

Il Programma Forte nasce con l'esplicito proposito di abbattere le resistenze ad includere la scienza nel campo di azione di una ricerca sociologica e dichiara di

*voler estendere il raggio di azione della sociologia della conoscenza fino a includere la spiegazione dei contenuti e delle procedure tecniche delle scienze empiriche e matematiche [8, p. 173].*

Sotto l'influenza degli studi di Khun, interpretati alla luce della fenomenologia, dello strutturalismo e del postmodernismo, i ricercatori della SSK prendono le distanze dalla filosofia di Popper e degli empiristi logici e

*fanno valere la tesi che la scienza è una pratica inseparabile dal culturale, dal sociale e dal politico da cui è stata ed è ognora istituita [2, p. 150].*

La spiegazione del contenuto, e la natura stessa della conoscenza scientifica, non viene disgiunta dagli eventi che ne determinano la produzione: vengono demistificate le pretese di universalità, autonomia e neutralità della scienza e si evidenzia l'esistenza della pluralità di metodi, procedure e risultati delle inchieste scientifiche come prodotti culturalmente e storicamente marcati [2, p. 151].

Tutti i sistemi cognitivi correnti in una società sono equivalenti sul piano della spiegazione, ed è per questa ragione che la ricerca sulla scienza è chiamata a ricostruire le condizioni di produzione dei sistemi di credenze multipli mirando ad accertare le condizioni sociali che accanto ad altre producono la conoscenza (principio di *causalità*); essere imparziale rispetto ad affermazioni vere/false, razionali/irrazionali ecc., impegnandosi in una spiegazione sociologica di ciascun termine della dicotomia (principio di *imparzialità*); fare in modo che le credenze vere e quelle false, logiche o non logiche, efficaci ed inefficaci, siano spiegate unicamente sulla base della medesima causa (principio di *simmetria*). Il principio di *riflessività*, infine, prescrive al ricercatore di applicare il medesimo schema esplicativo previsto per il sapere scientifico, alla spiegazione sociologica prodotta.

Tali principi costituiscono la *conditio sine qua non* per un approccio naturalistico allo studio della scienza. Sempre all'interno del framework generale che informa la SSK, Bloor legittima in particolare la tesi per cui le azioni degli scienziati, così come la cristallizzazione dei paradigmi scientifici, sono influenzati da fattori intra ed extrateorici per cui è la dimensione sociale della conoscenza che garantirebbe la credibilità di una teoria. Tuttavia, precisa Bloor, l'attendibilità dei risultati cognitivi ottenuti dal sapere scientifico non è invalidata dal riconoscimento dell'esistenza dei condizionamenti sociali.

*"La sociologia della scienza ... mette dunque in evidenza i limiti dei contenuti della scienza, rivelandone la genesi sempre all'interno di contesti sociali concreti" [8, p. 175].*

Rispetto al ruolo che la percezione svolge nell'attività di ricerca, ad esempio, le teorie non sarebbero mai completamente determinate dai fatti che invocano a loro sostegno (sottodeterminazione della teoria da parte dei fatti). Al limite è l'osservazione ad essere orientata dalla teoria all'interno della quale si osserva la realtà.

Senza molti infingimenti retorici anche Barry Barne, studioso mainstream della SSK e promotore dell'*interest approach*, evidenzia come l'attività dello scienziato non è determinata univocamente dalla natura delle cose, ma sarebbe collegata agli interessi sociali propri della tradizione di ricerca, o la disciplina di afferenza, così come a quelli esterni alla comunità scientifica. In generale, nella prospettiva del Programma Forte di Edimburgo, la scienza è raffigurabile non come mero insieme di teorie, cioè di proposizioni che collegano asserti di natura empirica ad asserti di natura generale (ipotesi e leggi): essa costituisce piuttosto un

*segmento della cultura che non può essere reso intellegibile attraverso il ricorso a criteri esterni, ma soltanto attraverso un esame dettagliato dell'attività scientifica, nei termini in cui essa è realmente condotta in tempi e contesti differenti*  
[...]

*Essa possiede il carattere di pratica sociale differenziata e di sistema di conoscenza relativo ad una particolare cultura [9, p. 113].*

Viene respinta come infondata la tesi che riguarda l'autonomia della scienza e rigettato con forza l'approccio individualista di stampo psicologico che espunge dalle proprie spiegazioni la componente sociale della conoscenza: tutti o quasi le componenti dello spazio di azione scientifica infatti appaiono soggetti al condizionamento di svariati fattori sociali.

Gli scopi che uno scienziato deve perseguire, la scelta degli oggetti da indagare, o le priorità della ricerca, sono influenzati almeno in parte da macro fattori sociali (gli interessi di classe o i rapporti della scienza con gli stadi di sviluppo economico): non casualmente essi variano di epoca in epoca e da una società all'altra [1].

Al limite anche le ricerche compiute dai sociologi cognitivi all'interno dei luoghi di produzione della conoscenza scientifica (come gli istituti

di ricerca o i laboratori) mostrerebbero come le relazioni interpersonali, o le dinamiche di gruppo, intervengano a condizionare la costruzione delle teorie, i concetti di base, piuttosto che la scelta dei modelli da adottare.

I fattori sociali non si limitano dunque ad influenzare la conoscenza scientifica, ma rappresentano una parte costitutiva della stessa come dimostrano le ricerche sulle controversie scientifiche compiute da Collins e dai suoi collaboratori (fondatori della cosiddetta *Scuola di Bath*) [10].

Le dispute intorno ad alcuni temi sono strutturalmente legate ad interessi sociali che interferiscono con l'attività di ricerca e l'osservazione dei dati sperimentali: essi coprono uno spettro ampio che va dagli interessi professionali interni ad una comunità scientifica (interessi, scopi ed obiettivi) fino a quelli esoterici (ad esempio influenze di tipo politico, religioso o di classe).

Nel lungo contenzioso tra gruppi di fisici sull'esistenza delle onde gravitazionali, ad esempio, Collins mostra come gli scienziati, intenti a trovare un accordo sui criteri per stabilire l'affidabilità dello strumento di rilevazione, facciano ripetutamente appello, non solo a criteri di carattere epistemologico come le prove o la teoria, ma anche a fattori sociologici come la reputazione dello sperimentatore e della sua istituzione, il livello di inserimento nei circuiti scientifici più rilevanti per l'oggetto di ricerca, le notizie di carattere informale ricavate dai suoi collaboratori o da altri colleghi [3, p. 584].

È sulla base di tali studi che Collins formula un nuovo manifesto programmatico noto come *Programma empirico del relativismo* con l'intento di fissare gli obiettivi di uno studio sociale della scienza: dimostrare la *flessibilità interpretativa* dei risultati sperimentali, cioè la possibilità che questi si prestino a più di un'interpretazione; analizzare i meccanismi attraverso cui viene raggiunta questa *chiusura* ed infine trovare i collegamenti tra questa e la più vasta struttura sociale.

Ad uno sguardo retrospettivo appare chiaro come la sociologia della scienza non si preoccupa soltanto di indagare casi storici, cioè fenomeni globali e di lungo periodo come le dispute scientifiche, ma ha minuziosamente indagato anche la dimensione micro del sapere scientifico, ovvero le pratiche di produzione locale della conoscenza.

Tra gli altri, soprattutto il filone di Studi di laboratorio si è fatto promotore di una significativa svolta metodologica: la riflessione sociologica si apre allo studio delle modalità specifiche di connessione fra pratiche sociali e scienza. Il laboratorio assurge a luogo privilegiato di ricerca in quanto spazio simbolico in cui si dipanano microprocessi di scambio, interazioni e negoziazioni fra gli attori impegnati in un lavoro quotidiano di produzione della conoscenza.

Nella fattispecie, un gruppo di ricercatori facenti capo a Bruno Latour e Michel Callon, si pongono l'obiettivo di svelare il carattere informale, tacito, artigianale della conoscenza eventualmente prodotta; di

*capire come viene costruito un fatto scientifico prendendo le distanze dal punto di vista degli scienziati circa il processo nel quale sono interamente coinvolti* [5, p. 65].

Nella monografia "Laboratory Life", [11] Latour e Steve Woolgar rendono conto in modo puntuale le attività messe in atto da un gruppo di scienziati per la costruzione dei fatti scientifici all'interno di un piccolo laboratorio di biologia molecolare (dalla produzione di articoli, alla formulazione di enunciati fino alla stesura di libri destinati alla comunità scientifica di afferenza). L'approccio antropologico adottato dagli autori mette in luce soprattutto la dimensione retorica della scienza, ovvero, le strategie discorsive e le tecniche di rappresentazione impersonale dei dati ottenuti in laboratorio il cui esito finale è rappresentato dall'articolo pubblicato su una rivista in cui agli aggiustamenti progressivi, alle intuizioni estemporanee, ai dubbi e alle comunicazioni private tra i ricercatori all'interno del loro ambiente di lavoro, si sostituiscono frasi impersonali e resoconti asettici e neutrali, strumenti atti a rendicontare i risultati conseguiti.

Lo scienziato risponde alle possibili controargomentazioni mostrando in modo leggibile il proprio lavoro mediante *dispositivi di registrazione*, intesi come un qualunque sistema, che a prescindere dalle dimensioni, dal costo e dalla sua natura, offre una rappresentazione visiva dell'esperimento in un testo scientifico [12, p. 88].

I fatti scientifici sono separati sistematicamente dal luogo e dal momento della loro origine per-

ché assumano i contorni di realtà indipendenti dal contesto nel quale sono stati costruiti.

Gli *studi di laboratorio* concorrono a svelare una dimensione sociale dei processi di costruzione della conoscenza scientifica, che troverà poi una più compiuta trattazione nella proposta teorica dell'*Actor Network Theory*.

Questo filone di ricerca, nato negli anni ottanta da un gruppo di studiosi francesi ed inglesi (Bruno Latour, Madeline Arich, Michell Callon e John Law), si connota sin dagli albori come approccio STS (*Science and Technology Studies*) fondato sulla radicalizzazione del principio di simmetria esplicitato dal programma di Edimburgo.

A Bruno Latour, in particolare, si deve la proposta di una nuova teorizzazione del sociale e la ridefinizione dei campi di interesse della sociologia della scienza e della tecnica.

Latour ha provato a spogliare la scienza dalla sua aurea di purezza mettendo in discussione la distinzione tra scienza e tecnologia, a cui sostituisce l'espressione di *tecnoscienza*, e quella tra umani e non umani, indicati con il termine semiotico di *attanti*. La conoscenza scientifica, a lungo differenziata per ragioni soprattutto ideologiche dalla tecnica, è raffigurata come una fitta trama di componenti giustapposte, un processo di *ingegneria eterogenea* [13]; non una mera accumulazione di dati e risultati, dunque, piuttosto l'esito finale di una trama di componenti diverse (provette, reagenti, organismi, microscopi, scienziati, articoli su riviste), un network di elementi eterogenei, umani e non umani.

Per Latour lo studioso non si troverebbe mai di fronte alla scienza, alla tecnica o alla società, dunque, ma ad una gamma di associazioni forti o deboli classificate come appartenenti ad ognuna di queste partizioni.

*Le idee tradizionali sulla scienza e la tecnologia rinviano tradizionalmente al divario esistente fra un contenuto tecnico ed un contesto spiegabile dalle scienze sociali. Negare questa asimmetria ed assumere come un'unità di analisi un ibrido socio tecnico, vuol dire invece trovare gli strumenti per spiegare contesto e contenuto come parte di uno stesso processo [14, 21].*

La scienza si mostra contestualmente nella forma di prodotti finiti, disponibili all'uso, e come processo in costruzione, in azione: mentre l'epi-

stemologo si impegna a studiare le caratteristiche della prima dimensione, il sociologo si preoccupa di ricostruire con minuzia di dettaglio il percorso che porta un enunciato scientifico, o un risultato conseguito in laboratorio, a mutare nella forma di fatto o verso quella opposta di artefatto scientifico; di comprendere la dinamica del processo di costruzione collettiva di un dato e di indagare come, una volta consolidato, lo stesso venga impiegato senza più alcuna critica o ipotesi di veridicità sulla sua attendibilità [12, p. 3-28].

Latour invita inoltre a liberarsi dalla credenza che certe asserzioni pronunciate dagli scienziati siano irrazionali, o le tesi sostenute dagli stessi egualmente credibili e giudica utile "procedere seguendo le persone in lotta per rendere più credibili le proprie tesi rispetto a quelle altrui", tracciare il sistema delle associazioni create, la natura imprevedibile ed eterogenea di questa mappa, senza fare alcuna "assunzione sul loro grado di realtà" [12, p. 273-278]. Il viaggio alla scoperta della tecnoscienza prevede di ricostruire anche il tessuto di relazioni, a volte marcatamente conflittuali, tra i ricercatori che si sforzano in modo attivo e continuativo, di accrescere la possibilità di sopravvivenza delle rispettive asserzioni [12, p. 235]. Le pretese di conoscenza si trasformano in "fatti", non solo sulla base di qualità cognitive intrinseche agli stessi: essi devono poter superare una soglia di attenzione, cioè poter competere con le affermazioni alternative e sopravvivere ad eventuali dispute che ne potrebbero compromettere l'esistenza.

Lo scienziato difende le sue tesi arruolando *alleati* diversi: autori, libri o articoli contemplati in letteratura, ma anche procedure, protocolli, strumenti tecnici in grado di validare i suoi esperimenti.

*Questo lavoro di costruzione dei fatti scientifici è sostanzialmente agonistico, è un'impresa conflittuale tra agenti, oggetti, fattori tecnologici e sociali. In ultima istanza la conflittualità condiziona la materializzazione e l'argomentazione degli enunciati - fatti in vista di farne delle realtà esterne, le quali poi sono presunte essere antecedenti alle attività stesse della ricerca [2, p. 158].*

La conoscenza scientifica può essere dunque

ridotta ad un processo attraverso il quale si dà un significato a fattori scientifici ed extrascientifici, ad intrighi accademici, ovvero componenti d'una attività sostanzialmente sociale.

I ricercatori costruiscono delle reti complesse ed articolate che trasformano gli enunciati in fatti ed in realtà ritenuti discutibili, ovvero capaci di resistere alle obiezioni e alle critiche dei colleghi concorrenti.

Nel gergo di Latour, il lavoro scientifico consisterebbe nella fabbricazione di *attori-reti*, in negoziazioni continue per costituire delle associazioni cooperative, in arruolamenti di studiosi per difendere ed imporre degli enunciati-fatti.

*Un collega ricercatore, un rimando bibliografico in un paper, un'apparecchiatura in grado di ottenere un'immagine al microscopio, un'azienda disposta ad investire in una ricerca, un virus che si comporta in un certo modo, un gruppo di potenziali utenti per un'innovazione tecnologica: sono tutti alleati che concorrono a quel processo che trasforma una serie di risultati sperimentali ed asserzioni [...] in una scatola nera: un fatto scientifico o prodotto tecnologico [2, p. 586-587].*

*Il programma di ricerca promosso dalla teoria dell'Actor Network Theory mostra molto chiaramente la traiettoria di sviluppo che la sociologia della scienza ha seguito: essa eludendo almeno in parte l'analisi del rapporto generale scienza - società si è snodata attraverso l'analisi empirica delle modalità e delle pratiche attraverso cui gli scienziati, immersi nel mondo quotidiano della ricerca, producono la verità scientifica e costruiscono le loro scoperte [8, p. 172].*

*La microsociologia interessata al "come" della scienza ha gradualmente preso il sopravvento su un orientamento macrosociologico interessato al "perché" del sapere scientifico riproponendo la distinzione, tipica dell'epistemologia, tra elementi esterni ed interni all'analisi del fenomeno scientifico: mentre gli internalisti ritengono di poter provare la scarsa influenza che processi o strutture sociali esercitano sulle azioni compiute da scienziati nei domini del loro agire scientifico (oggettuale, concettuale, finalistico e pragmatico), gli externalisti si preoccupano di istituire dei nessi causali tra le modalità di*

*organizzazione extrascientifiche e la produzione della conoscenza [8, p. 181].*

*I programmi di ricerca di sociologia della scienza, ampliando una linea di indagine iniziata da Robert Merton, seppure con impostazioni talvolta divergenti, hanno mostrato come la conoscenza sia sempre connessa alle forme sociali di vita [8, p. 172].*

Alla sociologia della scienza va riconosciuto il merito di aver evidenziato che lo sviluppo scientifico è legato alla dimensione culturale. Allo stesso modo tuttavia è opportuno ammettere i limiti di taluni approcci ingenuamente costruttivisti che si sono distinti per il radicalismo delle tesi espresse: alcuni filoni di analisi, infatti, nel considerare le leggi della scienza come il prodotto di mere stipulazioni collettive, hanno rischiato di mettere in ombra un insieme di aspetti cognitivi indipendenti dall'influenza dei possibili contesti entro i quali la conoscenza si è sviluppata.

In particolare, svariati orientamenti teorici hanno prestato attenzione alla natura collettiva della conoscenza scientifica tralasciando la gamma di problemi legati alle nozioni epistemiche di verità ed oggettività della conoscenza [15].

Pertanto, se è condivisa l'idea che il problema cardine di un'epistemologia sociologica consista soprattutto nel chiarire quali siano i processi attraverso i quali il contesto culturale influenzi la costruzione del sapere scientifico, parimenti appare legittimo chiarire i confini entro i quali individuare l'influenza riconducibile a fattori di tipo sociale, ma indipendenti dall'oggetto della conoscenza.

A tal fine, se si separano sul piano della speculazione teorica, la "forma della conoscenza" scientifica dal suo "contenuto", non sembra difficile ipotizzare un nesso tra la dimensione organizzativa, istituzionale e metodologica della scienza (cioè la sua forma conoscitiva) ed il contesto sociale.

Una diversa conclusione vale invece

*se si considera il rapporto tra contesto e contenuti della scienza, cioè le risposte che quest'ultima fornisce una volta formulate le domande e stabilite le procedure (metodologie) d'indagine [16, p. 54-55].*

Piuttosto che far riferimento ad un'ingenua concezione del dato assoluto, quindi, si tratta di difendere la tesi secondo la quale è possibile delineare un'indipendenza dei contenuti della conoscenza che non si possono considerare meri prodotti sociali [17].

Alla sociologia della scienza è demandato il difficile compito di spiegare le dinamiche che connotano il sapere scientifico e comprendere attraverso quali processi la società interviene ad influenzare gli sviluppi della ricerca scientifica.



- [1] L. Gallino, *Sociologia della scienza*, Enciclopedia italiana - V Appendice (1995) [online], Treccani.it. L'enciclopedia Italiana, <http://www.treccani.it> (ultimo accesso: 24 giugno 2012).
- [2] G. BUSINO: "Intorno alle discussioni e ricerche recenti sulla sociologia delle scienze", *Revue européenne des sciences sociales* XXXIX-120 (2001) 145-189.
- [3] M. BUCCHI: *Scienza e società. Introduzione alla sociologia della scienza*. Il Mulino (Bologna). 2002
- [4] R. MERTON: *La sociologia della scienza. Indagini teoriche ed empiriche*. Franco Angeli (Milano). 1981
- [5] A. CERRONI, S. ZENIA: *Sociologia della scienza. Capire la scienza per capire la società contemporanea*. Carocci (Bologna). 2014
- [6] B. BARNE: *Scientific Knowledge and Sociological Theory*. Routledge & Kegan Paul (London and Boston). 1974
- [7] D. BLOOR: *Knowledge and Social Imagery*. Routledge & Kegan Paul (London). 1976

- [8] F. CRESPI, F. FORNARI: *Introduzione alla sociologia della conoscenza*. Donzelli (Roma). 1998
- [9] V. ANCARANI: *La scienza decostruita. Teorie sociologiche della conoscenza scientifica*. Franco Angeli (Milano). 1996
- [10] H. COLLINS: "Stage in the empirical Programme of Relativism", *Social Studies of Science* 11 (1981) 3-11.
- [11] B. LATOUR, S. WOOLGAR: *Laboratory Life: the Social Construction of Scientific Fact*. Sage (Los Angeles). 1979
- [12] B. LATOUR: *La scienza in azione. Introduzione alla sociologia della scienza*. Edizioni di comunità (Torino). 1998
- [13] J. LAW: *Technology and Heterogeneous Engineering: The case of Portuguese Expansion* Bijker, Hughes, Pinch (1987), 111-134.
- [14] A. MONGILI: *Tecnologia e società*. Carocci (Roma). 2007
- [15] M. BUNGE: "A critical examination of the new sociology of Knowledge", *Philosophy of the social Science* 21 (1991) 524-560.
- [16] S. CAIANI ZIPOLLO: "Alcune riflessioni attorno alla dimensione sociale della scienza", *Humana.Mente* 3 (2007) 37-59.
- [17] I. HACHING: *La natura della scienza. Riflessioni sul costruttivismo*. McGraw Hill (Milano). 2000



**Maria Luisa Dell'Atti:** laureata in Sociologia e ricerca sociale, attualmente è dottoranda in teoria e ricerca sociale presso il Dipartimento di Scienze Sociali e della Comunicazione dell'Università del Salento.



# L'analisi armonica e le serie di Dirichlet

*En los lenguajes humanos no hay proposición que no implique el universo entero*

Jorge Luis Borges

**Rocco Chirivi**

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi" - Università del Salento

---

**L**a simmetria ha un ruolo primario nella compresione delle leggi dell'universo fisico e del mondo matematico. Un esempio di come essa possa unificare discipline diverse come teoria dei numeri, analisi, probabilità e meccanica quantistica è fornito dall'analisi armonica: un metodo che permette di decomporre una funzione in termini di funzioni con simmetrie assegnate.

Nel 1753 Bernoulli, studiando le oscillazioni di una corda con estremi vincolati, osservò che la linearità dell'equazione differenziale che descrive il problema permette di costruire soluzioni sommando le armoniche dell'oscillazione fondamentale con coefficienti arbitrari. Pochi anni prima Eulero aveva provato che le soluzioni dello stesso problema potevano essere espresse tramite coppie di funzioni derivabili qualsiasi. Combinando insieme le due osservazioni si ha che una funzione, alquanto arbitraria, può essere espressa come serie di funzioni seno. A metà del diciottesimo secolo questa conclusione venne considerata paradossale.

Si dovette quindi attendere il 1822 e la pubblicazione del trattato *Théorie analytique de la chaleur* da parte di Fourier prima che l'analisi armonica venisse accettata. Nasceva così un potente metodo per la soluzioni delle equazioni differenziali che venivano via via proposte per lo studio di vari problemi fisici.

Lo sviluppo in serie di Fourier per funzioni periodiche reali non è, però, il primo esempio di uso dell'analisi armonica. Già Gauss nel suo fondamentale *Disquisitiones arithmeticae*, studiando le forme quadratiche binarie sugli interi, e in particolare nella dimostrazione della legge di reciprocità quadratica, aveva valutato alcune somme di radici complesse dell'unità. E dopo di lui Dirichlet aveva con profitto usato l'analisi armonica per i gruppi ciclici finiti per provare, generalizzando la dimostrazione di Eulero dell'esistenza di infiniti primi, che ogni progressione aritmetica  $a, a + m, a + 2m, \dots$ , con  $a$  e  $m$  primi tra loro, contiene infiniti primi.

Bisogna a questo punto notare che, solo nel 1927, Hermann Weyl osservò che questi risultati di Gauss e Dirichlet in teoria dei numeri e lo sviluppo in serie per le soluzioni di alcune equazioni differenziali sono diversi esempi di una

stessa idea. Vediamo ora di chiarire, per sommi capi, in quale senso ciò sia vero.

Sia  $G$  un gruppo abeliano compatto, gli omomorfismi continui  $\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$  sono detti *caratteri* del gruppo. Se, ad esempio,  $G$  è la circonferenza unitaria  $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  con la topologia di sottospazio di  $\mathbb{R}^2$ , o equivalentemente con la topologia quoziente di  $\mathbb{R}$ , allora i caratteri sono le funzioni

$$S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni x \mapsto e^{2\pi nix} \in \mathbb{C},$$

con  $n$  intero qualsiasi. Mentre, se  $N$  è un intero positivo e  $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , con la topologia discreta, abbiamo i caratteri

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \ni t \mapsto \zeta^{ht} \in \mathbb{C},$$

dove  $\zeta$  è la radice primitiva  $N$ -esima complessa  $e^{2\pi i/N}$  e  $h = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Possiamo allora, a costo di una lieve vaghezza, descrivere l'analisi armonica nel seguente semplice modo per un gruppo commutativo compatto. Esiste un'opportuna misura  $\mu$  su  $G$  tale che, per ogni funzione  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  sufficientemente regolare, possiamo definire i *coefficienti di Fourier* di  $f$  come

$$a_\rho(f) \doteq \frac{1}{\mu(G)} \int_G f(x) \overline{\rho(x)} \mu(x)$$

con  $\rho$  carattere di  $G$  ed avere

$$f(g) = \sum_\rho a_\rho(f) \rho(g), \quad \text{per ogni } g \in G,$$

espressione che scrive la funzione  $f$  come somma pesata dei caratteri di  $G$ .

Nel caso particolare di  $G = S^1$  abbiamo lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica su  $\mathbb{R}$  mentre per un gruppo ciclico otteniamo che una funzione  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  di periodo  $N$  si scrive come

$$f(n) = \sum_{t=0}^{N-1} a_t(f) \zeta^{nt}$$

dove i coefficienti di Fourier si calcolano come

$$a_t(f) \doteq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \zeta^{-nt}, \quad t = 0, 1, \dots, N-1.$$

Osserviamo che sono esattamente queste le somme di radici complesse dell'unità considerate da

Gauss e da Dirichlet e richiamate sopra.

L'analisi armonica, così come presentata, può essere definita anche per altri tipi di gruppi. Il punto chiave per questa generalizzazione è la seguente costruzione che cattura l'idea intuitiva di simmetria rispetto ad un gruppo. Chiamiamo *rappresentazione* di un gruppo  $G$  nello spazio vettoriale complesso  $V$ , un omomorfismo continuo  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ , dove abbiamo indicato con  $\text{GL}(V)$  il gruppo degli isomorfismi lineari di  $V$ . In particolare, se  $V \simeq \mathbb{C}$  ha dimensione 1 allora  $\text{GL}(V) \simeq \mathbb{C}^*$  e ritroviamo la definizione di carattere. Diciamo poi che una rappresentazione è *irriducibile* se  $V \neq 0$  e gli unici sottospazi  $U$  di  $V$  mandati in se stessi da  $\rho(G) \subset \text{GL}(V)$  sono  $U = 0$  e  $U = V$ . Per vaste classi di gruppi di significato geometrico è possibile provare che ogni rappresentazione è somma diretta (topologica) di rappresentazioni irriducibili.

Inoltre se il gruppo  $G$  è abeliano allora ogni rappresentazione irriducibile è di dimensione 1. Visto che  $S^1$  e  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  sono abeliani possiamo pensare ai casi particolari di analisi armonica sopra ricordati come la decomposizione di opportuni spazi di funzioni sul gruppo in termini di rappresentazioni irriducibili; in questo linguaggio, i coefficienti di Fourier danno la proiezione di una funzione sui sottospazi irriducibili (1-dimensionali).

In generale però, se il gruppo  $G$  non è commutativo, ci saranno rappresentazioni che non sono di dimensione 1 e, per poter decomporre gli spazi di funzioni su  $G$ , bisognerà far intervenire anche tali rappresentazioni. Così, ad esempio, per il gruppo di Lie non commutativo  $\text{SO}(3)$  il procedimento sopra delineato fornisce la decomposizione di una funzione sulla sfera come somma di armoniche sferiche; e per questo risultato le rappresentazioni di dimensione maggiore di 1 sono essenziali.

Nel seguito vediamo come l'analisi armonica per le funzioni periodiche su  $\mathbb{R}$  e per un gruppo ciclico  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  possa portare al calcolo di alcuni valori della zeta di Riemann e delle sue generalizzazioni alle serie di Dirichlet. Il nucleo di questo calcolo sono i numeri di Bernoulli e gli associati polinomi di Bernoulli. Infatti le derivate di tali polinomi hanno una cruciale proprietà che permette di scrivere in modo molto semplice alcuni coefficienti di Fourier.

Per ulteriori dettagli storici sulla centralità dell'analisi armonica per la teoria dei numeri, la teoria delle rappresentazioni, la probabilità, l'analisi e la meccanica quantistica rimandiamo il lettore all'interessante saggio di Mackey [2]. Quello che segue è invece un adattamento dell'articolo di Cartier [1] dove è possibile trovare anche altri calcoli simili; come, ad esempio, il calcolo del valore della zeta di Riemann per interi negativi, calcolo che portò Eulero a congetturare l'equazione funzionale, poi dimostrata da Riemann nel suo fondamentale articolo [3]. Invece, per un approccio contemporaneo alla determinazioni dei valori critici delle  $L$ -serie, si può guardare l'articolo [4].

Cominciamo con i numeri di Bernoulli  $B_k$ , con  $k \geq 0$ , introdotti da Jakob Bernoulli nel 1713, nella sua opera *Ars Conjectandi*, in relazione ad una formula chiusa per la somma delle potenze dei primi numeri interi. Esistono varie definizioni equivalenti, una di esse usa lo sviluppo in serie

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Abbiamo, ad esempio,

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}.$$

Inoltre tutti i  $B_k$ , con  $k$  dispari maggiore di 1, sono nulli in quanto la funzione

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$$

è pari. E' poi possibile provare che vale la seguente relazione ricorsiva

$$B_k = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} B_h.$$

Essa permette di calcolare direttamente i numeri di Bernoulli senza usare lo sviluppo in serie della definizione.

Usando i numeri di Bernoulli definiamo i polinomi di Bernoulli

$$B_k(x) \doteq \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} B_{k-h} x^h.$$

E' chiaro che  $B_k(x)$  è un polinomio a coefficienti

razionali di grado  $k$ . Abbiamo, ad esempio

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Usando la relazione ricorsiva riportata sopra per i numeri di Bernoulli è facile provare che valgono le seguenti proprietà:

- (a)  $B_k(0) = B_k(1)$  per ogni  $k \geq 2$  mentre  $B_1(1) - B_1(0) = 1$ ;
- (b) la derivata di  $B_k(x)$  rispetto ad  $x$  è uguale a  $kB_{k-1}(x)$  per ogni  $k \geq 1$ , mentre la derivata di  $B_0(x)$  è zero.

Ricordiamo ora i dettagli per lo sviluppo in serie di Fourier delle funzioni periodiche su  $\mathbb{R}$ . Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione di periodo 1, cioè tale che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , e con solo un numero finito di discontinuità di tipo salto nell'intervallo  $[0, 1]$ . Per tali funzioni possiamo definire i coefficienti di Fourier come

$$a_n(f) \doteq \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Abbiamo allora il seguente sviluppo in serie di Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) e^{2\pi i n x} = f^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove

$$f^0(x) \doteq \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} [f(x+t) + f(x-t)].$$

Osserviamo che si ha quindi  $f^0(x) = f(x)$  in tutti i punti in cui  $f$  è continua mentre  $f^0(x)$  è la media dei limiti destro e sinistro nei punti di discontinuità (in numero finito in  $[0, 1]$ ).

Per applicare l'analisi armonica ai polinomi di Bernoulli li rendiamo periodici nel seguente modo

$$\widetilde{B}_k(x) = B_k(x - [x])$$

dove abbiamo indicato con  $[x]$  il massimo intero non maggiore di  $x$ . Da quanto osservato sopra sui valori di  $B_k(x)$  in 0 e 1, possiamo concludere che  $\widetilde{B}_k(x)$  è una funzione continua tranne che per  $k = 1$  in cui si ha una discontinuità di tipo salto in tutti gli interi.

Il calcolo dei coefficienti di Fourier di  $\widetilde{B}_k(x)$  è molto facile nel caso  $k = 1$  essendo  $B_1(x)$  un polinomio lineare. Troviamo infatti subito che

$$a_n(\widetilde{B}_1) = \begin{cases} -(2\pi in)^{-1} & \text{se } n \neq 0 \\ 0 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Per lo stesso calcolo in generale ricordiamo prima una relazione tra i coefficienti di Fourier di una funzione e della sua derivata. Se una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è derivabile e  $f$  e la sua derivata sono del tipo considerato sopra, allora, usando l'integrazione per parti, ricaviamo

$$a_n(f) = \frac{f(1) - f(0)}{-2\pi in} + \frac{1}{2\pi in} a_n\left(\frac{df}{dx}\right).$$

Applicando questa relazione alle funzioni periodiche  $\widetilde{B}_k(x)$  e usando le proprietà (a) e (b) sopra riportate abbiamo

$$a_n(\widetilde{B}_k) = \begin{cases} -k!(2\pi in)^{-k} & \text{se } n \neq 0 \\ 0 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Ma allora lo sviluppo in serie di Fourier di  $\widetilde{B}_k(x)$  ci dice che

$$\widetilde{B}_k(x) = -\frac{k!}{(2\pi i)^k} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi inx}}{n^k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se specializziamo  $k$  ad un intero pari positivo  $2m$  e valutiamo in  $x = 0$  otteniamo

$$\zeta(2m) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m+1} (2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m},$$

formula che esprime il valore della zeta di Riemann per i pari positivi in termini dei numeri di Bernoulli.

Ad esempio troviamo i seguenti valori per i primi pari positivi

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Se invece proviamo a specializzare ad un intero dispari ritroviamo solo che  $B_k = 0$  per  $k$  dispari maggiore di 1, questo in quanto le somme sugli interi positivi e negativi della serie a destra si annullano a vicenda. Ritroveremo ancora in seguito questo diverso comportamento per i valori sui pari e sui dispari.

Quanto visto sulle funzioni periodiche  $\widetilde{B}_k(x)$

può essere usato anche per calcolare i valori delle serie di Dirichlet. Nel contesto che a noi interessa possiamo definire tali serie nel seguente modo.

Sia  $N$  un intero positivo fissato e sia  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione di periodo  $N$ , cioè tale che  $\chi(n + N) = \chi(n)$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ad ogni funzione periodica  $\chi$  associamo la serie di Dirichlet

$$L_\chi(s) \doteq \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

E' possibile provare che  $s \mapsto L_\chi(s)$  è ben definita per ogni complesso  $s$  con parte reale maggiore di 1 e si estende ad una funzione meromorfa su tutto  $\mathbb{C}$  con al più una singolarità polare semplice in 1.

Osserviamo che per la funzione  $\mathbb{Z} \ni n \mapsto 1 \in \mathbb{C}$ , di periodo 1, ritroviamo la zeta di Riemann come caso particolare di una serie di Dirichlet.

Ricordiamo ora che, come visto sopra, se  $\zeta \doteq e^{2\pi i/N} \in \mathbb{C}$ , una radice primitiva  $N$ -esima dell'unità, ad una funzione  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  di periodo  $N$ , possiamo associare i coefficienti di Fourier  $a_t(\chi)$ , con  $t = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , così definiti

$$a_t(\chi) \doteq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi(n) \zeta^{-nt}.$$

ed avere, per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ,

$$\chi(n) = \sum_{t=0}^{N-1} a_t(\chi) \zeta^{nt}.$$

Usiamo ora l'espressione dei polinomi di Bernoulli come serie di Fourier per calcolare alcuni valori delle serie di Dirichlet. Abbiamo infatti l'identità

$$\sum_{t=0}^{N-1} a_t(\chi) B_k\left(\frac{t}{N}\right) = -\frac{k!}{(2\pi i)^k} \sum_{n \neq 0} \frac{\chi(n)}{n^k}.$$

Se assumiamo anche che la parità di  $k$  e la funzione  $\chi$  siano tali che  $\chi(-n) = (-1)^k \chi(n)$ , per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ , possiamo ricavare

$$L_\chi(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2k!} \sum_{t=0}^{N-1} a_t(\chi) B_k\left(\frac{t}{N}\right).$$

Vediamo ora alcuni esempi di calcolo con la formula appena dimostrata.

Sia  $N = 3$  e consideriamo il carattere definito da  $\chi(0) = 0$ ,  $\chi(1) = 1$  e  $\chi(2) = 1$ . Osserviamo che  $\chi(-n) = \chi(n)$ , per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ , e quindi la nostra formula può essere usata per calcolare il valore di  $L_\chi(k)$  per  $k$  pari; prendiamo ad esempio  $k = 2$ . I coefficienti di Fourier del carattere  $\chi$  si calcolano subito come

$$\begin{aligned} a_0(\chi) &= 2/3 \\ a_1(\chi) &= (\zeta^{-1} + \zeta)/3 = -1/3 \\ a_2(\chi) &= (\zeta + \zeta^{-1})/3 = -1/3 \end{aligned}$$

inoltre, visto che  $B_2(x) = x^2 - 1/2x + 1/6$  abbiamo subito

$$\begin{aligned} B_2(0) &= 1/6 \\ B_2(1) &= -1/18 \\ B_2(2) &= -1/18. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + 2\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{18}\right) = -\frac{2 \cdot 2}{(2\pi i)^2} L_\chi(2)$$

da cui

$$L_\chi(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{4}{27}\pi^2$$

Questo valore può anche essere calcolato, in modo più elementare, come

$$L_\chi(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{27}\pi^2.$$

Vediamo ora un esempio per  $N = 4$ . Consideriamo il carattere definito da  $\chi(0) = 0$ ,  $\chi(1) = 1$ ,  $\chi(2) = 0$  e  $\chi(-1) = -1$ . Osserviamo che per tale  $\chi$  la serie di Dirichlet è a segni alterni con termine generale infinitesimo e, visto che  $\chi(-n) = -\chi(n)$ , per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ , possiamo quindi prendere  $k = 1$  nella nostra formula. I coefficienti di Fourier di  $\chi$  sono subito calcolati come

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= -i/2 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= i/2 \end{aligned}$$

e per i valori del polinomio di Bernoulli  $B_1$  abbiamo  $B_1(1/4) = -1/4$  e  $B_1(3/4) = 1/4$ . Ricaviamo quindi il valore

$$L_\chi(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Tale formula era già nota a Leibniz.

Ancora un ultimo esempio con  $N = 4$  e lo stesso carattere  $\chi$  definito sopra; calcoliamo la serie di Dirichlet in  $k = 3$ . Per i relativi polinomi di Bernoulli abbiamo  $B_3(1/4) = 3/64$  e  $B_3(3/4) = -3/64$ . Ricaviamo quindi che vale

$$L_\chi(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots = \frac{\pi^3}{32}.$$



- [1] P. CARTIER. *An introduction to zeta functions*. In *From number theory to physics*. Editors M. Waldschmidt, P. Moussa, J.-M. Luck, C. Itzykson, 1992, Springer-Verlag.
- [2] G. W. MACKAY. *Harmonic analysis as the exploitation of symmetry – A Historical survey*. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 3, Number 1, July 1980, 543–698.
- [3] B. RIEMANN. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. 1859.
- [4] D. ZAGIER. *Values of zeta functions and their applications*. First European Congress of Mathematics, Volume II, Progress in Math. 120, Birkhäuser-Verlag, 1994 497–512.



**Rocco Chirivì:** Laureato in matematica all'università di Pisa e alla Scuola Normale Superiore. Ha conseguito il dottorato di ricerca presso la Scuola Normale Superiore. E' stato ricercatore in Algebra alla Sapienza di Roma e all'università di Pisa. Da maggio 2012 è ricercatore presso il dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università del Salento. Si occupa di teoria delle rappresentazioni di algebre e gruppi di Lie.

Numero IV Anno 2014

Viaggio nella Scienza

# Ithaca



---

Arte e Scienza

---

